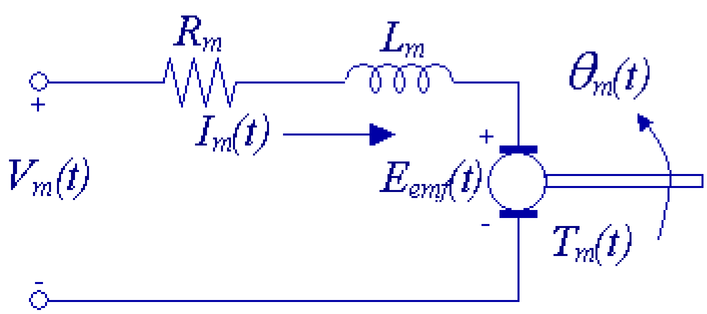
1) Controle de Posição e Velocidade de um Motor DC

1.1) Modelo Dinâmico

O circuito mostrado abaixo representa um motor elétrico:



Usando a Lei de Kirchhoff, temos a seguinte equação:

$$V_m - R_m I_m - L_m \frac{dI_m}{dt} - E_{emf} = 0 \tag{1}$$

Considerando $L_m << R_m$, a corrente pode ser escrita como:

$$I_m = \frac{V_m - E_{emf}}{R_m} \tag{2}$$

A força contra eletromotriz pode ser escrita como:

$$E_{emf} = K_m \dot{\theta}_m \tag{3}$$

No eixo do motor é conectado um redutor, o qual possui uma redução K_g e uma eficiência η_g. Assim aplicando a segunda lei de Newton no eixo do motor, temos:

$$J_m \ddot{\theta}_m = T_m - \frac{T_l}{\eta_g K_g} \tag{4}$$

sendo $\frac{T_l}{\eta_g K_g}$ o torque devido a carga que está conectada ao redutor.

Agora aplicando a segunda lei de Newton na carga conectada ao redutor, temos:

$$J_l \ddot{\theta}_l = T_l - B_{eq} \dot{\theta}_l \tag{5}$$

sendo B_{eq} o fator de amortecimento viscoso.

Substituindo a equação (4) na equação (5) e reorganizando:

$$J_l\ddot{\theta}_l = \eta_g K_g T_m - \eta_g K_g J_m \ddot{\theta}_m - B_{eq}\dot{\theta}_l \qquad (6)$$

Sabendo que a relação de redução vale $\theta_m = K_g\theta_l$, e que o torque no motor elétrico vale $T_m = \eta_m K_t I_m$ (sendo η_m a eficiência do motor), pode-se reescrever a equação (6) como:

$$J_l\ddot{\theta}_l + \eta_g K_g^2 J_m \ddot{\theta}_l + B_{eq}\dot{\theta}_l = \eta_g \eta_m K_g K_t I_m \qquad (7)$$

Finalmente combinando as equações elétrica (3) e mecânica (7), e aplicando a transformada de Laplace, chegamos a seguinte função transferência:

$$\frac{\theta_l(s)}{V_m(s)} = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{J_{eq} R_m s^2 + \left(B_{eq} R_m + \eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2\right)s} \qquad (8)$$

Onde $J_{eq} = J_l + \eta_g J_m K_g^2$, é o momento de inércia equivalente do sistema do motor.

1.2) Respostas no tempo:

Assumindo os seguintes valores para as constantes acima:

Símbolo	Descrição	Valor Nominal (sistema SI de unidades)
η_g	Eficiência da redução	0,9
η_m	Eficiência do motor	0,69
K_g	Fator de redução	70
K_t	Constante de torque do motor	0,00767
K_m	Constante de força contra eletromotriz	0,00767
J_m	Momento de inércia do motor	3,87 e-7
J_{eq}	Momento de inércia equivalente do sistema	2 e-3
R_m	Resistência de armadura	2,6
B_{eq}	Fator de amortecimento viscose	4 e-3

Com esses valores é possível calcular J_l = 2,93 e-4. Assim a função transferência para esses valores vale:

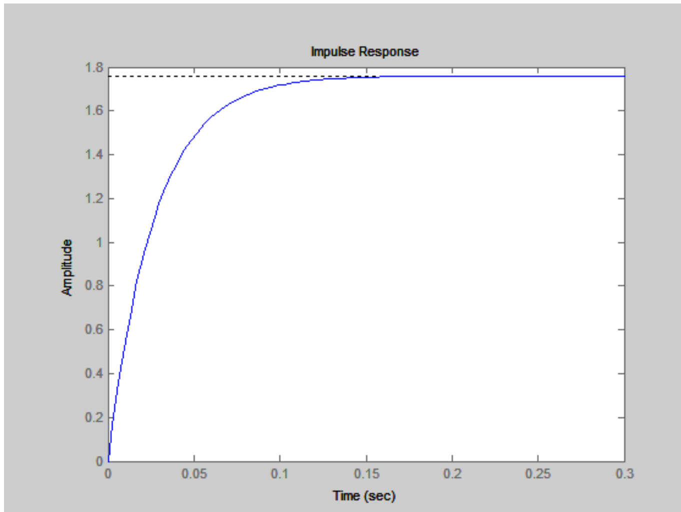
$$\frac{\theta_l(s)}{V_m(s)} = \frac{0{,}3334}{0{,}00512 s^2 + 0{,}1894 s} = \frac{65}{s^2 + 37 s}$$

No Matlab:

```
>> num = [65];
>> den=[1 37 0];

>> G = tf(num,den)

G =
      65
  ----------
  s^2 + 37 s

>> pole(G)

ans =

     0
   -37
```

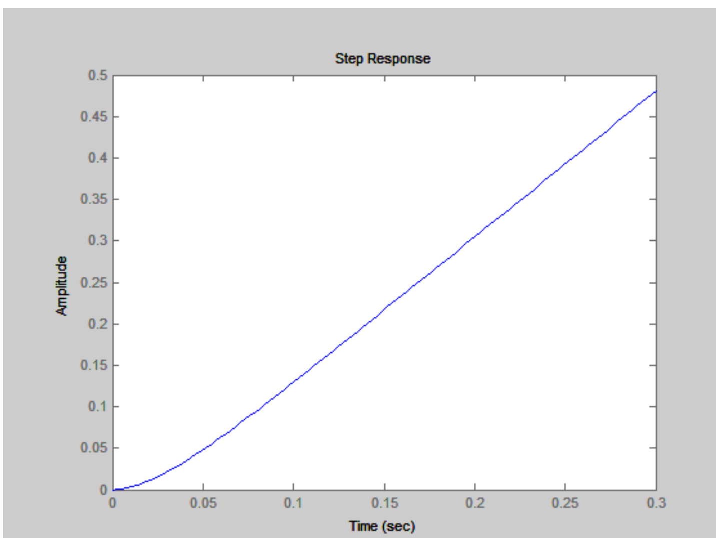
Resposta ao impulso unitário:

```
>> impulse(G)
```



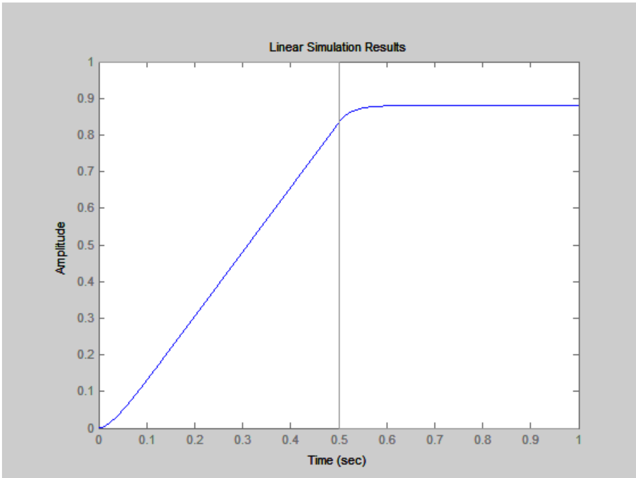
Resposta ao degrau unitário:

```
>> step(G)
```



Resposta a um pulso de 0,5 s:

```
>> t = 0:0.0001:1;
>> u=[ones(1,5001) zeros(1,5000)];

>> lsim(G,u,t)
```



1.3) Função de Transferência da Velocidade

Considerando $\dot{\theta}_l = \omega_l$ e $\ddot{\theta}_l = \dot{\omega}_l$, a equação (7) pode ser reescrita como:

$$J_l \cdot \dot{\omega}_l + \eta_g \cdot K_g{}^2 \cdot J_m \cdot \dot{\omega}_l + B_{eq} \cdot \omega_l = \eta_g \cdot \eta_m \cdot K_g \cdot K_t \cdot I_m \qquad (9)$$

Juntando o circuito de armadura com a parte mecânica e aplicando a transformada de Laplace:

$$G(s) = \frac{\omega_l(s)}{V_m(s)} = \frac{\eta_g \cdot \eta_m \cdot K_g \cdot K_t}{J_{eq} \cdot R_m \cdot s + B_{eq} \cdot R_m + \eta_g \cdot \eta_m \cdot K_m \cdot K_t \cdot K_g{}^2} \qquad (10)$$

, onde: $J_{eq} = J_l + \eta_g \cdot J_m \cdot K_g^2$;

Assim a função transferência utilizando os valores da Tabela 1 é dada por:

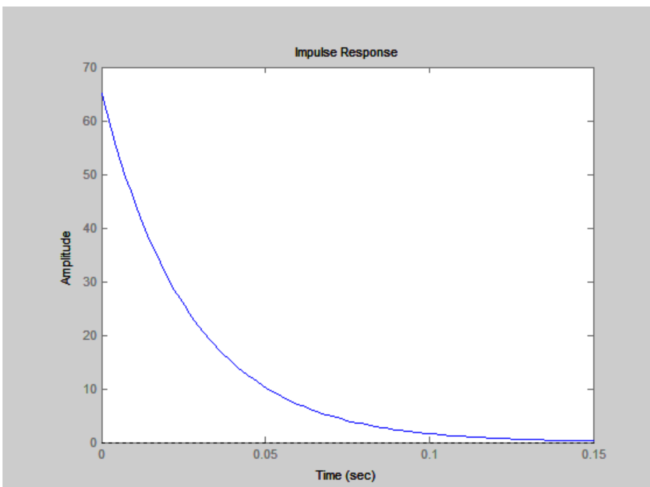
$$\frac{\omega_l(s)}{V_m(s)} = \frac{0{,}3334}{0{,}00512\,s + 0{,}1894} = \frac{65}{s+37}$$

No Matlab:

```
>> num = [65];
>> den=[1  37];

>> G = tf(num,den)

Transfer function:
       65
----------------------
s + 37
```

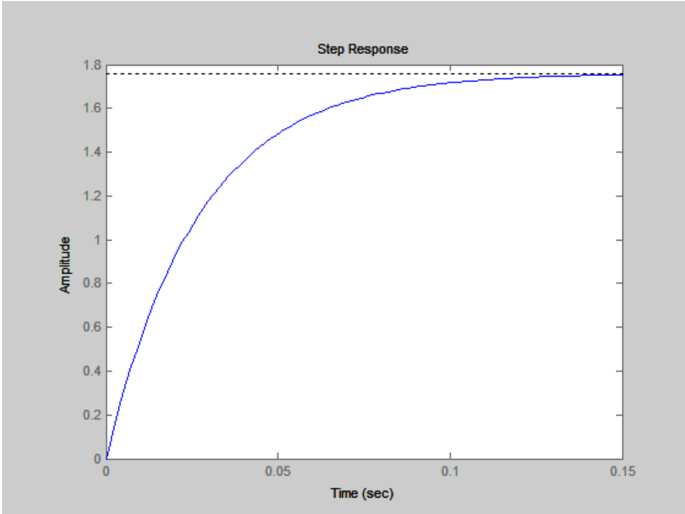
Resposta ao impulso unitário:

```
>> impulse(G)
```



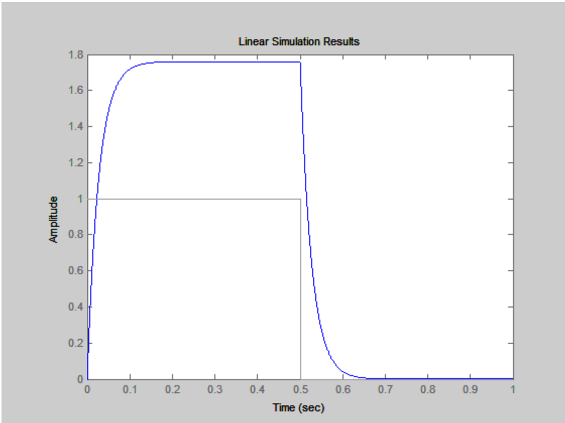
Resposta ao degrau unitário:

```
>> step(G)
```

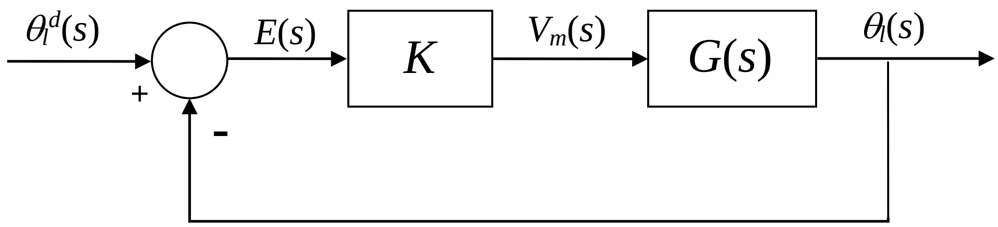


Resposta a um pulso de 0,5 s:

```
>> t = 0:0.0001:1;
>> u=[ones(1,5001) zeros(1,5000)];

>> lsim(G,u,t)
```



1.3) Controle de Posição



Planta:

$$G(s) = \frac{\theta_l(s)}{V_m(s)} = \frac{65}{s^2 + 37s}$$

Controlador:

$$D(s) = \frac{V_m(s)}{E(s)} = \text{K}$$

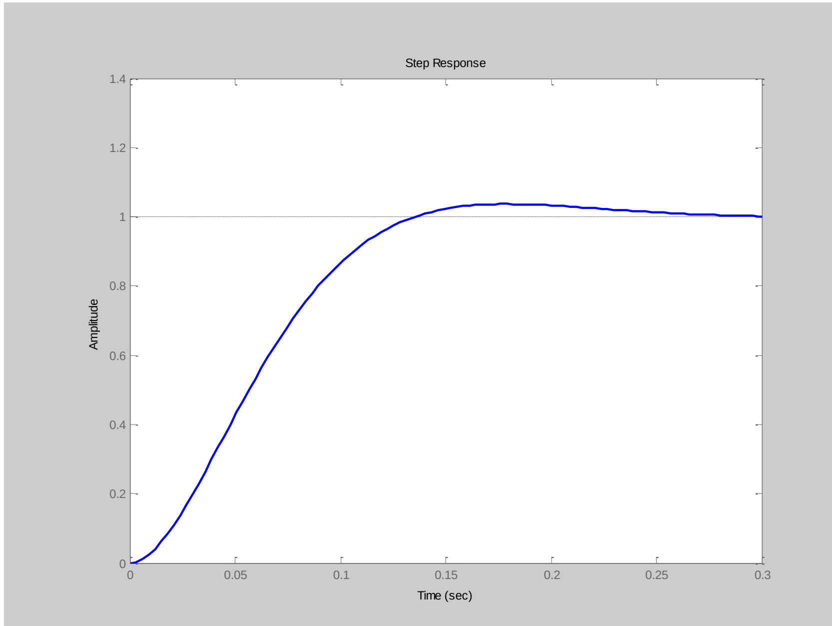
Malha fechada:

$$T(s) = \frac{\theta_l(s)}{\theta_l^d(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{65K}{s^2 + 37s + 65K}$$

No Matlab: K = 10

```
>> num = [65];
>> den=[1  37 0];

>> G = tf(num,den)

>>C = tf(10,1);

>>CG = series(C,G)

>>T = feedback(CG,1)

>> pole(T)
 -18.4961 +17.5803i
 -18.4961 -17.5803i

>>damp(T)

       Eigenvalue            Damping     Freq. (rad/s)
 -1.85e+001 + 1.76e+001i     7.25e-001      2.55e+001
 -1.85e+001 - 1.76e+001i     7.25e-001      2.55e+001
```

>> step(T)



>> ltiview(T)