Redes de Petri

A rede de Petri, técnica de modelagem original de onde derivou mais tarde o SFC, foi introduzida em 1962 por Carl Adam Petri. Consiste de uma ferramenta gráfica e matemática extremamente efetiva para a modelagem gráfica e matemática e a para a análise de Sistemas de Eventos Discretos (SEDs). É uma ferramenta de modelagem abrangente e aplicada a muitos sistemas discretos, sendo uma ferramenta adequada para descrever e estudar informações processadas nos sistemas caracterizados como concorrentes, assíncronos, distribuídos, paralelos, não determinísticos e/ou estocásticos. Como ferramenta gráfica, as redes de Petri podem ser usadas como ajuda à comunicação visual, simulação de gráficos de fluxo, diagramas de blocos e redes.

Uma rede de Petri consiste é um grafo direcionado, com peso e bipartido, composto por dois elementos estruturais: *lugares* e *transições.* O lugar é representado graficamente por um círculo e a transição por uma barra. Os elementos estruturais são utilizados para criar o modelo, no qual arcos orientados conectam lugares a transições e transições a lugares. Estes arcos podem ser rotulados com um valor inteiro positivo, indicando seu peso. Um arco de peso *k* pode ser interpretado como *k* arcos paralelos.

Marcação e seu comportamento dinâmico

Marcação

Cada lugar pode possuir marcas (fichas), indicando um estado. A marcação do sistema (estado) é denotada por um vetor *M* de dimensão igual ao número de lugares do modelo. O p-ésimo componente de *M,* indicado por *M(p)* consiste no número de fichas do lugar *p*. O vetor M_o consiste no vetor de marcação inicial, isto é, estado inicial do sistema.

Na modelagem, usando o conceito de condições e eventos, o lugar pode ser interpretado como uma condição e a transição como um evento. Uma transição (evento) possui certo número de lugares de entrada e de saída, representando as pré e pós-condições, respectivamente. A presença de uma ficha em um lugar indica que a condição deste é verdadeira.

O comportamento de diversos sistemas pode ser descrito em temos de seus estados e de sua respectiva mudança ou transição para outros possíveis estados. Nas redes de Petri, a mudança de estado ocorre de acordo com a regra de habilitação e disparo das transições.

Habilitação e disparo de transição

A ocorrência de um evento é denominada disparo de transição. A regra de habilitação e disparo de transições é:

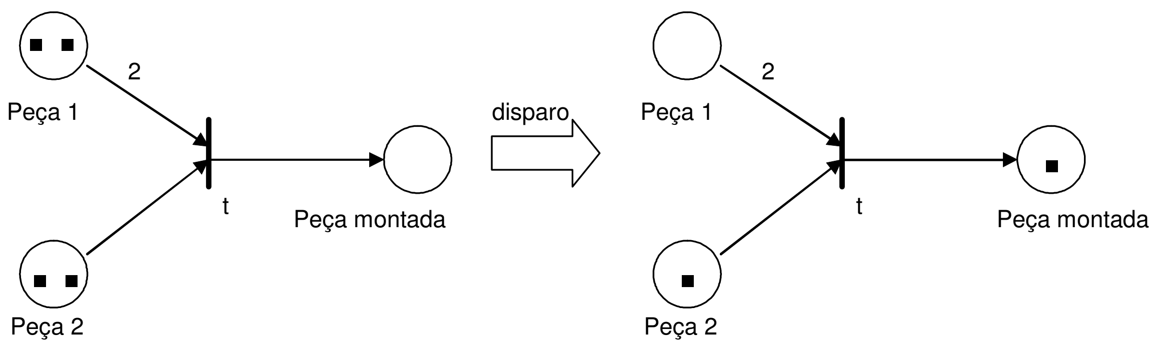
- Uma transição está habilitada para disparar se todo lugar de entrada, que possuir arco para a transição, possuir um número de marcas maior ou igual ao peso do arco;

- Uma transição habilitada pode disparar ou não, dependendo se o evento realmente ocorrer;

- No disparo de uma transição habilitada, todo lugar que possui um arco para a transição tem seu número de marcas reduzido pelo valor do peso deste arco, e todo lugar que possui um arco vindo da transição tem seu número de marcas acrescido do valor do peso deste arco.

Uma transição sem lugares de entrada é denominada transição fonte, e a sem lugares de saída é chamada de transição sumidouro. Uma transição fonte está sempre habilitada, e o disparo de uma transição sumidouro consome fichas, mas não produz nenhuma.

A Figura a seguir esboça um exemplo de modelo em rede de Petri, representando a montagem de uma peça a partir de outras duas peças ("peça 1" e "peça 2"). Segundo o modelo, para montar uma peça são utilizadas duas peças do tipo "1" e uma peça do tipo "2".



Os lugares "peça 1" e "peça 2" representam, respectivamente, o número de peças do tipo "1" e do tipo "2" disponíveis. De forma análoga o lugar "peça montada" representa o número de peças montadas. A transição "t" indica o evento de montagem.

O modelo é apresentado em dois estados distintos: (a) representa o estado inicial, no qual existem duas peças do tipo 1 e duas peças do tipo 2, e nenhuma peça montada, e (b) representa o estado do sistema após a montagem de uma peça, indicando o disparo da transição "t" a partir do estado inicial.

Definição

Uma rede de Petri é uma quíntupla, $PN = (P, T, F, W, M_o)$ onde:

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ é um conjunto finito de lugares,

$T = \{t_1, t_2, \dots, tn\}$ é um conjunto finito de transições,

$(P \cap T = \varnothing, P \cup T = \varnothing)$

$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ é um conjunto de arcos (relação de fluxo),

$W: F \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ é a função peso,

$M_0: P \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ é a marcação inicial,

A estrutura da rede de Petri $N = (P,T,F,W)$ sem qualquer marcação inicial específica é denotada por N. Uma rede de Petri com uma dada marcação inicial é denotada por (N,M_o).

Além disto:

$M(p_i)$ é a marcação $\in M$ em p_i

$\bullet p = \{t \mid (t,p) \in F\}$ é o conjunto de transições de entrada de p,

$p\bullet = \{t \mid (p, t) \in F\}$ é o conjunto de transições de saída de p ,

$\bullet t = \{p \mid (p,t) \in F\}$ é o conjunto de lugares de entrada de t ,

$t\bullet = \{p \mid (t,p) \in F\}$ é o conjunto de lugares de saída de t ,

$R(N,M_o)$ ou simplesmente $R(M_o)$ é o conjunto de todas possíveis marcações alcançáveis a partir de Mo e $L(N,M_o\}$ ou simplesmente $L(M_o\}$ é o conjunto de todas possíveis seqüências de disparos de transições a partir de M_o.

Propriedades comportamentais

As propriedades comportamentais da rede de Petri indicam como o sistema se comporta a partir da marcação inicial. Os trabalhos relativos a análise das redes de Petri para sistemas de automação podem ser divididos entre aqueles que se concentram em tratar suas características para solucionarem questões de controle e aqueles que se preocupam em realizar uma análise de desempenho, onde o tempo é incluído a definição das redes de Petri.

Na análise das características das redes de Petri, dois métodos têm destaque, são os métodos gráficos e construídos sobre os conceitos de árvore de alcançabilidade (isto significa que o método é dependente da marcação inicial e assim utilizado para se determinar *propriedades comportamentais),* e os métodos em matrizes que descrevem como os nós em um a rede de Petri estão interconectados (esta interconexão não é influenciada pela marcação inicial, tratando esta abordagem das *propriedades estruturais* de uma rede de Petri).

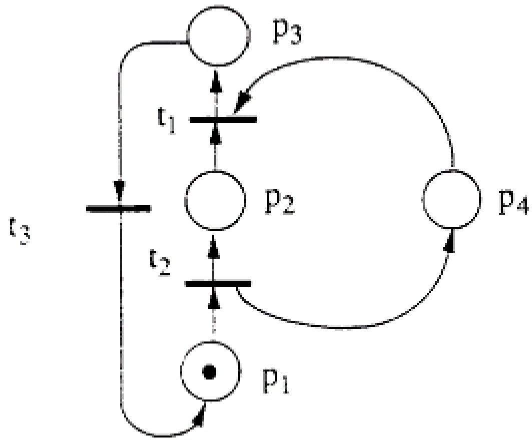
A análise de várias propriedades qualitativas, incluindo *alcançabilidade, vivacidade, limitabilidade, conservatividade* e *reversibilidade* podem levar ao controle de um sistema de manufatura. Alcançabilidade se refere a possibilidade da evolução do sistema a um determinado estado, *vivacidade* indica que o sistema é livre de *"deadlocks"* ou situações de travamento*, limitabilidade e conservatividade* indicam em geral o sobrecarregamento de *"butters"* e a *reversibilidade* indica a habilidade do sistema para reiniciar a si mesmo.

Alcançabilidade

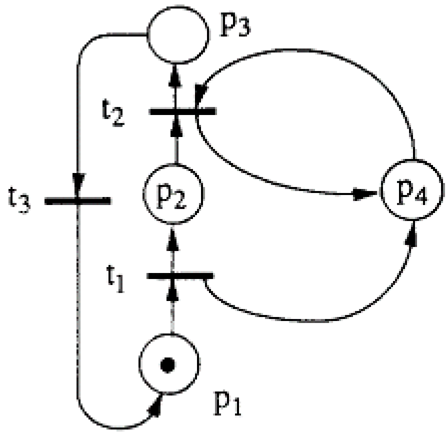
A alcançabilidade é base fundamental para o estudo de propriedades dinâmicas de qualquer sistema, e consiste em determinar se um dado estado M_n; é alcançável a partir de uma dada seqüência de disparos de transições em uma rede (N,M_0). Isto é, determinar se $M(p) \in R(M_0)$. Esta seqüência de disparos é denotada por $\sigma = M_0\ t_1\ M_1\ t_2\ M_2\ \ldots\ t_n\ M_n$ ou simplesmente por $\sigma = t_1\, t_2 \ldots\ t_n$.

Limitabilidade

Uma rede de Petri (N,M_0) é dita ser *k-limitada* ou simplesmente *limitada* se o número de marcas em cada lugar não exceder um número finito k para qualquer marcação alcançável de M_0, isto é, $M\ (p) \leq k$, para cada lugar p e para cada marcação $M \in R(M_0)$. Uma rede de Petri é dita ser *segura* ou estritamente limitada se é 1-limitada.



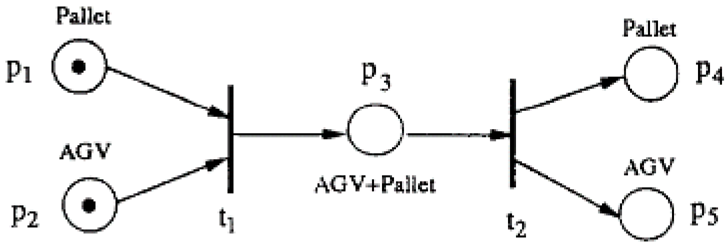
Exemplo de uma rede limitada



Exemplo de uma rede não limitada

Conservatividade

Uma rede de Petri é dita conservativa se o número de marcas permanece constante em uma rede. Do ponto de vista estrutural, isso seria possível se em todas as transições, o número de arcos de entrada fosse igual ao número de arcos de saída para todas as transições. Entretanto, em sistemas reais, alguns recursos são combinados para a realização de dada tarefa e depois separados ao final do processo. Para se compensar este fato, adotam-se pesos para cada marca de forma a se manter a conservação (que representa a conservação de recursos em um processo). Uma rede de Petri é, portanto, considerada conservativa se existir um vetor *w, w = [w1, w2, w3, ... wn]*, onde *n* é o número de lugares e w(p) > 0 para cada p $\in$ P tal que a soma ponderada das marcas permanece inalterada para cada M $\in$ R(M0). A rede é dita estritamente conservativa se *w* for unitário.



Exemplo de uma rede de Petri 2-limitada e conservativa em relação a *w = [1 1 2 1 1]*

Os lugares em rede de Petri são muitas vezes usados para representar *buffers* ou registros para armazenamento de dados de intermédio. Verificar se uma rede é limitada ou segura, garante que não haverá estouro nos *buffers* ou registros *(overflows),* independentemente da seqüência sendo disparada.

Vivacidade

Uma rede de Petri (N,M_0) é tida como viva se para qualquer marcação $M \in R(M_0)$ existir sempre pelo menos uma transição habilitada para disparo. A vivacidade é uma propriedade desejada para muitos sistemas, pois trata da ausência de "*deadlocks*". Quatro condições são necessárias para a ocorrência de *deadlock* nos sistemas de manufatura:

1. Exclusão mútua: quando um recurso está disponível ou sendo usado por um processo com acesso exclusivo a ele.

2. *"Hold and Wait":* um processo pode reservar um recurso enquanto aguarda por outros recursos.

3. *"No preemption":* um recurso em uso permanece ocupado por um processo até que tal processo termine sua execução.

4. *"Circular Wait":* existe um conjunto $\{p_1,p_2, \ldots p_n\}$ de processos de espera tal que p_1 está esperando por um recurso que está preso por p_2, e p_2 está esperando que está preso por p_3, ... , e p_n está esperando por um recurso que está preso por p_1.

Neste sentido são definidos diferentes níveis de vivacidade. Assim, uma transição t numa rede de Petri (N,M_0) é dita ser:

- *morta (L0-viva)* se *t* nunca pode ser disparada em qualquer seqüência de disparo em $L(M_o)$;

- *L1-viva (potencialmente disparável)* se *t* pode ser disparada pelo menos uma vez em alguma seqüência de disparo em $L(M_o)$;

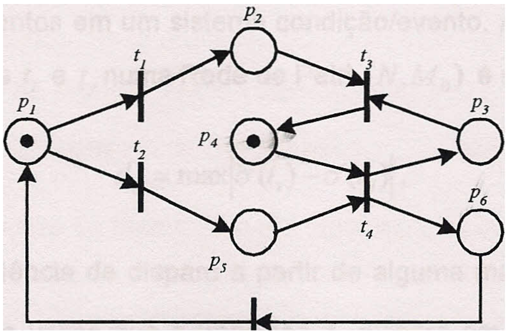
- *L2-viva* se, dado um inteiro positivo *k, t* pode ser disparado pelo menos *k* vezes em alguma seqüência de disparo em $L(M_o)$;

- *L3-viva* se *t* aparece muitas vezes em alguma seqüência de disparo em $L(M_o)$;

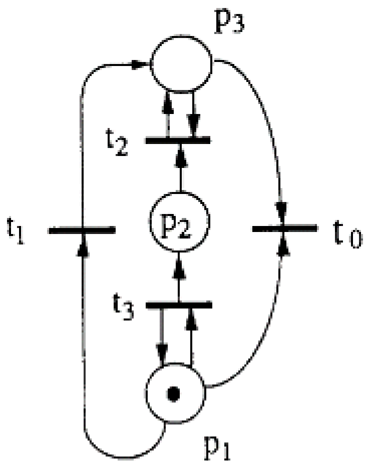
- *L4-viva* ou *viva* se *t* é L1-viva para cada marcação $M \in R(M_0)$.

Uma rede de Petri (N,M_0) é dita com *Lk-viva* se cada transição na rede for *Lk-viva,* para *k* = 0,1,2,3,4.

A figura a seguir apresenta uma rede de Petri não viva, uma vez que nenhuma transição fica habilitada para disparo se a transição t_1 for disparada inicialmente. Mas ela pode também ser classificada como estritamente L 1-viva.



Exemplo de rede de Petri segura, não viva, mas estritamente L1-viva



Exemplo de rede de Petri onde t_0, t_1, t_2 e t_3 possuem vivacidade L0, L1, L2 e L3 respectivamente

Reversibilidade e estado origem

Uma rede de Petri (N,M_0) é dita *reversível* se, para cada $M \in R(M_0)$, *Mo* é alcançável de *M* . Desta forma, numa rede reversível é sempre possível retornar ao estado inicial. Em muitas aplicações não é necessário retornar ao estado inicial, sendo suficiente retornar a algum estado (origem). Uma marcação *M'* é dita *estado origem* se, para cada $M \in R(M_0)$, *M'* é alcançável de *M.*

Métodos de análise

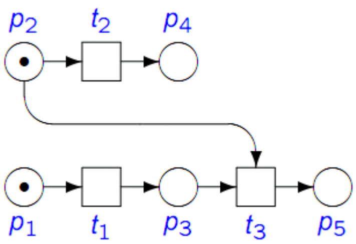
A partir de uma análise do modelo pode-se determinar todos os estados que o sistema pode assumir, e como estes estados alternam-se entre si de acordo com eventos relacionados ao sistema. Desta forma, tais métodos consistem em ferramentas fundamentais na validação do modelo.

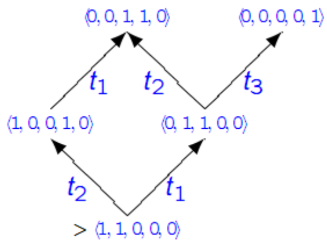
Árvore de alcançabilidade

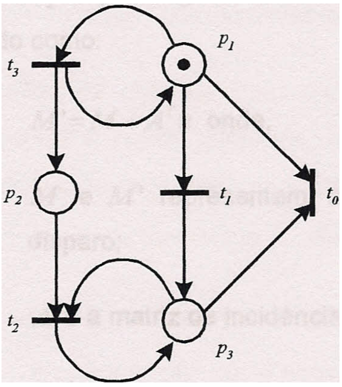
A árvore de alcançabilidade descreve todos os possíveis estados do sistema e a seqüência de disparos para alcançá-los. Dada uma Rede de Petri (N,M_o), a partir da marcação inicial *Mo* pode-se obter outras marcações de acordo com o disparo das transições habilitadas. Esse processo pode ser interpretado como uma árvore de marcações. Cada nó representa uma marcação a partir de *Mo* (nó raiz), e cada arco (galho) representa o disparo de uma transição.

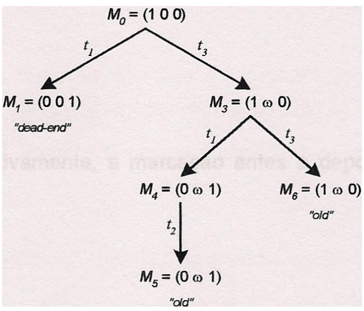
Em redes onde o número de marcas em um lugar excede um número finito, isto é, redes não limitadas, essa representação em árvore cresceria infinitamente. Assim, introduz-se o símbolo ω, representando uma marcação que tende ao infinito. Dessa forma, para cada inteiro n, $\omega > n$, $\omega \pm n = \omega$.

As figuras adiante exibem exemplos de representação da árvore de alcançabilidade para redes de Petri. Nota-se que é introduzido o conceito de *dead-end*, indicando uma marcação no qual não há transições habilitadas, e *old,* indicando que a marcação já existe em algum nó de nível inferior da árvore (mais próximo da raiz).

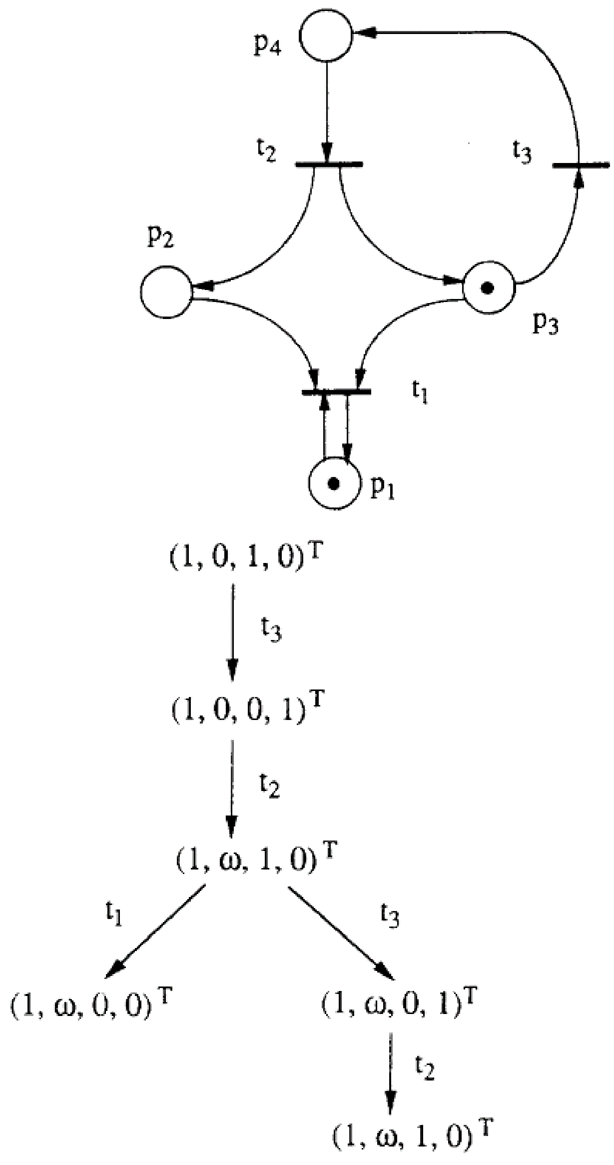

p2
t2
p4
p1
t1
p3
t3
p5


⟨0, 0, 1, 1, 0⟩
⟨0, 0, 0, 0, 1⟩
t1
t2
t3
⟨1, 0, 0, 1, 0⟩
⟨0, 1, 1, 0, 0⟩
t2
t1
> ⟨1, 1, 0, 0, 0⟩


p1
t3
p2
t1
t0
t2
p3


M0 = (1 0 0)
t1
t3
M1 = (0 0 1)
"dead-end"
M3 = (1 ω 0)
t1
t3
M4 = (0 ω 1)
M6 = (1 ω 0)
"old"
t2
M5 = (0 ω 1)
"old"

Exemplos de representação de uma árvore de alcançabilidade



Exemplo de uma árvore de alcançabilidade de rede não limitada

Matriz de incidência e equação de estado

A matriz de incidência e a equação de estado possibilitam a análise algébrica do comportamento dinâmico das redes de Petri. Para uma Rede de Petri (N,M_0) composta por *n* transições e *m* lugares, a matriz de incidência $A = [a_{ij}]$ é uma matriz *n* x *m* de inteiros onde seus elementos a_{ij} são dados por,

$$a_{ij} = a_{ij}^{+} - a_{ij}^{-},$$

$a_{ij}^{+} = W(i, j)$ é o peso do arco da transição *i* para o lugar *j* e

$a_{ij}^{-} = W(j,i)$ é o peso do arco do lugar *j* para a transição *i*.

Observa-se que a_{ij}^{+}, a_{ij}^{-} e a_{ij} representam, respectivamente, o número de marcas adicionadas, removidas e alteradas no lugar *j* a partir do disparo da transição *i*. Uma transição *i* está habilitada para disparo numa marcação *M* se e somente se:

$a_{ij}^{-} \leq M(j),\ j = 1, 2, \ldots, m.$

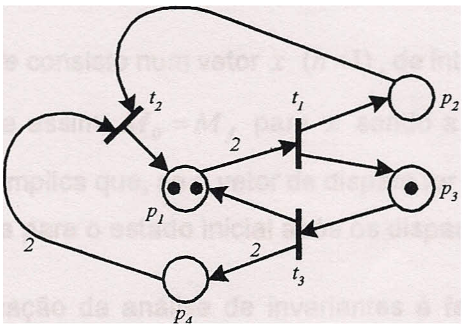
A equação de estado indica a alteração de estado (marcação) em uma rede de Petri após o disparo de uma transição. Para uma Rede de Petri (N,M_0) composta por *n* transições, *m* lugares e uma matriz de incidência A, define-se a equação de estado como:

$M' = M + A^T u$ onde,

M e *M'* representam, respectivamente, a marcação antes e depois do disparo;

A é a matriz de incidência;

u é um vetor de controle do tipo coluna *n x 1*, de *n -1* posições de valor zero e uma entrada de valor um, indicando a transição disparada.



Exemplo de rede de Petri

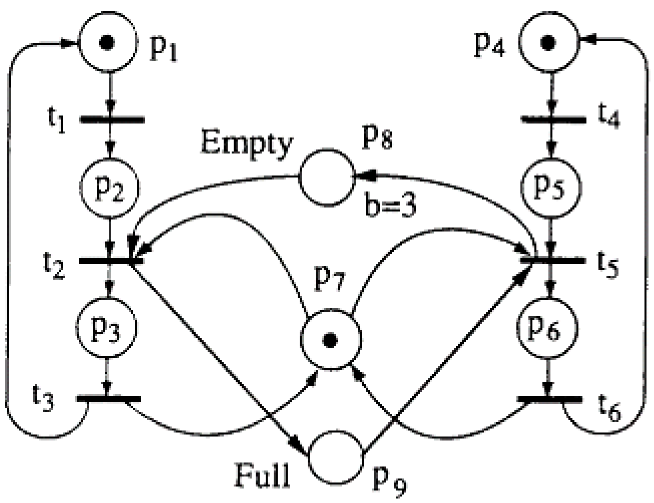
Por exemplo, considerando a rede de Petri da figura anterior, com marcação inicial $M_0 = (2\ 0\ 1\ 0)^T$, a equação de estado pode ser utilizada para determinar qual a marcação da rede, a partir da do disparo da transição t_3:

$$M' = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Considerando-se a equação de estado e uma seqüência de *d* disparos a partir da marcação inicial M_0, pode-se escrever a seguinte equação:

$$M_f = M_0 + A^T \sum_{k=1}^{d} u_k$$

Exemplo:

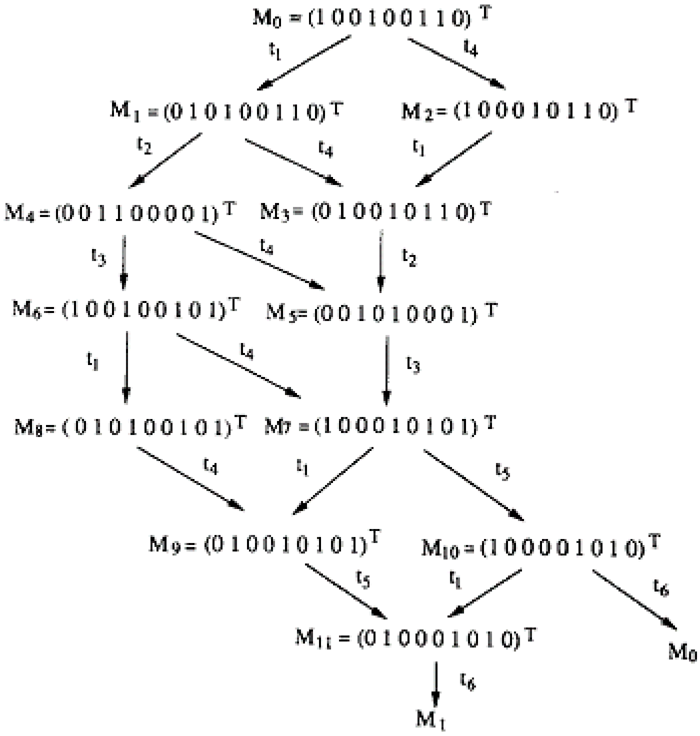


Considerando-se a rede de Petri anterior que modela um sistema de dois robôs, com a seguinte interpretação de lugares e transições:

INTERPRETATION OF PLACES AND TRANSITIONS OF THE PETRI NET MODEL OF THE MULTIROBOT ASSEMBLY SYSTEM

Place (with tokens)	Interpretation
$p_1(p_4)$	Robot R1 (R2) performs tasks outside the common workspace
$p_2(p_5)$	Robot R1(R2) waits for the access to the common workspace
$p_3(p_6)$	Robot R1 (R2) performs in the common workspace
p_7	mutual exclusion
$p_8(p_9)$	number of empty (full) positions in buffer
Transition	Interpretation
$t_1(t_4)$	Robot R1 (R2) requests access to the common workspace
$t_2(t_5)$	Robot R1(R2) enters the common workspace
$t_3(t_6)$	Robot R1 (R2) leaves the common workspace

Têm-se as seguintes propriedades:



Árvore de alcançabilidade

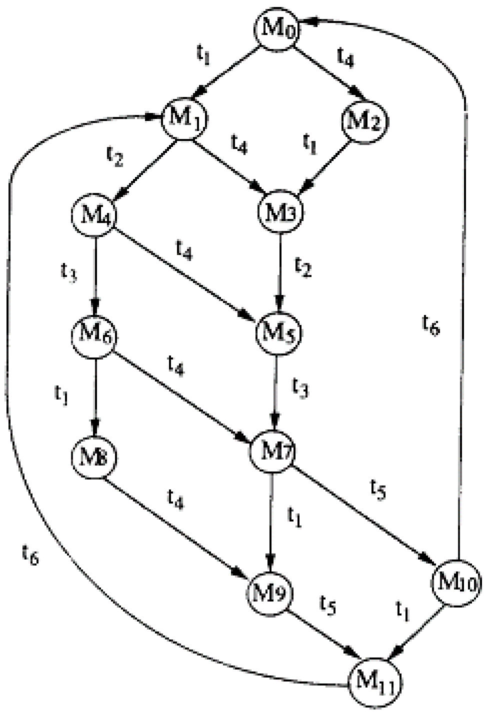


Gráfico de Alcançabilidade

$$
\begin{array}{c}
 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 & p_9 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matriz de incidência

Esta rede de Petri é limitada, pois nenhuma marcação na árvore de alcançabilidade possui o símbolo ω, e também, como nenhuma das marcações é maior que 1, a rede é segura. A rede é conservativa em relação a *w = [1 1 2 1 1 2 1 1 1]*. A soma das marcações permanece a mesma (=4) em todos os possíveis estados a partir do estado inicial.

Vivacidade: todas as transições da rede são vivas, por inspeção verifica-se que a rede é L4 (observando-se o mapa de alcançabilidade) e também atende ao critério de reversibilidade.

Análise de desempenho

Em relação à análise de desempenho, a adição do parâmetro tempo nas redes de Petri permite a análise temporal dos sistemas de automação, pois em sua definição original não possui há referência ao tempo. A temporização foi introduzida em meados dos anos 70 e início dos anos 80. Existem duas classes principais de redes de Petri temporais: TPNs - Timed Petri Nets; e SPNs - Stochastics Petri Nets. TPNs são redes de Petri de transições com tempo determinísticas e SPNs utilizam transições com tempos aleatórios. Outra classe, as redes de Petri estocásticas generalizadas (GSPN) incorporam tanto as transições SPN, como as transições imediatas.