Lista de Exercícios - Eletromagnetismo

Prof. Luís Fernando Costa Alberto

5 de Agosto de 2015

1 Corrente e densidade de corrente elétrica

1. Num cabo coaxial, existe uma corrente de fuga que flui pelo dielétrico de forma radial partindo do condutor interno para o condutor externo. Se a corrente de fuga total é $I[A]$ por metro de cabo, encontre uma expressão vetorial para $\vec{J}$.

   Resposta: $\vec{J} = \frac{I}{2\pi r L}\ \vec{a_r}\ [\frac{A}{m^2}]$.

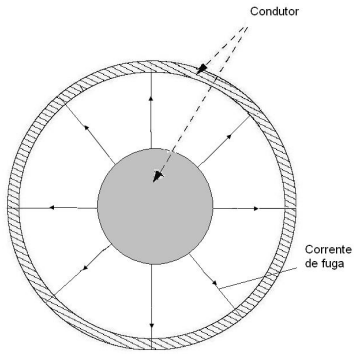


Figura 1: Seção transversal do cabo coaxial referente à questão (1).

2. A distribuição de cargas uniforme na forma de uma arruela (vide Figura 2) gira a uma velocidade angular $\omega[rad/s]$ em torno do eixo z. Calcule a densidade superficial de corrente $\vec{K}[A/m]$.

   Resposta: $\vec{K} = \rho_s \omega r\ \vec{a_\phi}\ [\frac{A}{m}]$.

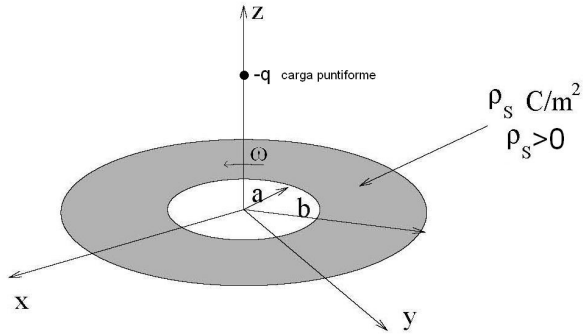


Figura 2: Distribuição superficial de cargas referente às questões (2) e (16).

2 Forças entre cargas elétricas

3. Duas esferas metálicas de massa m estão inseridas em um aro isolante. As esferas são suficientemente pequenas a ponto de podermos considerá-las cargas puntiformes. Elas estão livres para se movimentar ao longo do aro e a força de atrito entre o aro e as esferas é desprezível. Suponha que o aparato esteja localizado no vácuo e que as forças devido a ação da gravidade sejam desprezíveis. Suponha que as duas esferas estejam inicialmente descarregadas e localizadas na posição indicada na Figura 3. (a) O que acontece quando as duas esferas são carregadas simultaneamente, cada uma delas com carga q Coulombs? Qual é a nova posição de equilíbrio? (b) Qual é a força eletrostática em cada uma das esferas? (c) Se existissem 3 esferas e se as mesmas fossem carregadas com carga q, qual seria a configuração de equilíbrio e as forças em cada uma das esferas no equilíbrio?

   Resposta: (a) Ambas as esferas se repelem e estabelecem uma posição de equilíbrio, diametralmente opostas uma a outra. (b) $\vec{F_{el(1)}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{2r^2(1-cos(\theta))}\,\vec{a_{21}}\ [N]$ e $\vec{F_{el(2)}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{2r^2(1-cos(\theta))}\,\vec{a_{12}}\ [N]$, na posição de equilíbrio $\theta = 180^o$. (c) As esferas se posicionam nos vértices do triângulo equilátero inscrito no aro e as forças são dadas por $\vec{F_{el(1)}} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_o r^2}\left(\frac{1}{1-cos(\alpha)}\vec{a_{21}} + \frac{1}{1-cos(\beta)}\vec{a_{31}}\right)\ [N]$, $\vec{F_{el(2)}} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_o r^2}\left(\frac{1}{1-cos(\alpha)}\vec{a_{12}} + \frac{1}{1-cos(\gamma)}\vec{a_{32}}\right)\ [N]$ e $\vec{F_{el(3)}} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_o r^2}\left(\frac{1}{1-cos(\beta)}\vec{a_{13}} + \frac{1}{1-cos(\gamma)}\vec{a_{23}}\right)\ [N]$, na posição de equilíbrio $\alpha = \beta = \gamma = 120^o$.

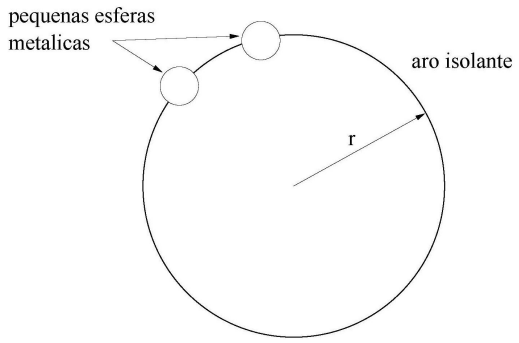


Figura 3: Aro isolante referente ao Exercício (3).

4. Quatro cargas elétricas puntiformes estão dispostas, segundo a Figura 4, nos vértices de um quadrado de lado L. Calcule a força (módulo e direção) de origem elétrica exercida em cada uma das cargas.

   Resposta: $\vec{F_{el(1)}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o L^2}\left(\frac{-4+\sqrt{2}}{4}\vec{a_y} + \frac{4-\sqrt{2}}{4}\vec{a_x}\right)\ [N]$, $\vec{F_{el(2)}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o L^2}\left(\frac{-4+\sqrt{2}}{4}\vec{a_y} + \frac{-4+\sqrt{2}}{4}\vec{a_x}\right)\ [N]$, $\vec{F_{el(3)}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o L^2}\left(\frac{4-\sqrt{2}}{4}\vec{a_y} + \frac{-4+\sqrt{2}}{4}\vec{a_x}\right)\ [N]$ e $\vec{F_{el(4)}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o L^2}\left(\frac{4-\sqrt{2}}{4}\vec{a_y} + \frac{4-\sqrt{2}}{4}\vec{a_x}\right)\ [N]$.

5. Um dipolo elétrico é constituído por cargas de dimensão infinitesimal de módulo q $[C]$. As cargas estão separadas por uma distância d $[m]$. Qual é a força (externa) necessária para manter estas cargas separadas desta distância?

   Resposta: $\vec{F_{el(1)}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o d^2}\vec{a_{21}}\ [N]$ e $\vec{F_{el(2)}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o d^2}\vec{a_{12}}\ [N]$.

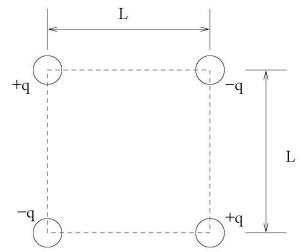


Figura 4: Quatro cargas carregadas referentes à questão (4).

6. O eletroscópio da Figura 5 é constituído por 2 esferas metálicas de massa m penduradas por hastes isolantes de comprimento l e massa desprezível. Calcule o ângulo θ formado pelas hastes quando as esferas estão carregadas com q Coulombs de carga elétrica. Para efeito de cálculo, considere que as dimensões das esferas são suficientemente pequenas a ponto de podermos considerá-las cargas pontuais.

   Resposta: $sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\ tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_o l^2 mg}$.

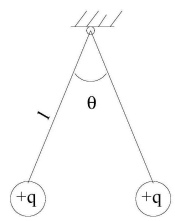


Figura 5: Eletroscópio referente à questão (6).

3 Campo Elétrico

7. Uma esfera de raio b está carregada com uma densidade volumétrica de cargas $\rho_v[C/m^3]$. (a) Encontre argumentos para mostrar que o campo elétrico, dentro ou fora é radial. (b) Calcule o campo elétrico $\vec{E}$ dentro e fora da esfera.

   Resposta: (a) Para todo elemento infinitesimal de carga dq_1 é sempre possível encontrar outro elemento inifinitessimal de carga dq_2, ambos dentro da esfera, equidistantes do ponto P (sob análise) e da origem, simetricamente opostos, de forma que o campo elétrico resultante seja radial. (b) Para $r > b$: $\vec{E} = \frac{\rho_v b^3}{3\varepsilon_o r^2}\ \vec{a_r}\ [\frac{N}{C}]$ e para $r \leq b$: $\vec{E} = \frac{\rho_v r}{3\varepsilon}\ \vec{a_r}\ [\frac{N}{C}]$.

8. Considere a distribuição superficial de cargas da Figura 6 na forma de uma "arruela". Se ρ_S $[C/m^2]$ é a densidade superficial de cargas nesta superfície, calcule o campo elétrico ao longo do eixo z. Suponha que $\rho_S > 0$ e que uma pequena esfera carregada com carga $q < 0$ seja abandonada em algum lugar no eixo z. O que acontece com a esfera?

   Resposta: Ao longo do eixo z: $\vec{E_z} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2+z^2}}\right)\ \vec{a_z}\ [\frac{N}{C}]$. Dessa forma, como o campo elétrico sempre aponta na direção $z\ \vec{a_z}$, observa-se que a esfera carregada com carga $q < 0$ sempre irá ser atraída na direção da origem.

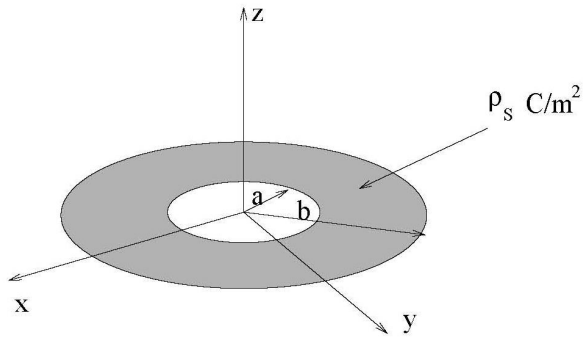


Figura 6: Distribuição superficial de cargas referente à questão (8).

9. Calcule o campo elétrico em todo o espaço devido a uma distribuição volumétrica uniforme de cargas na forma de uma esfera oca, conforme Figura 7.

   Resposta: Para $r < a$: $\vec{E} = 0$ $[\frac{N}{C}]$, para $a \leq r < b$: $\vec{E} = \frac{\rho_v(r^3-a^3)}{3\varepsilon r^2}\ \vec{a_r}$ $[\frac{N}{C}]$, e para $r \geq b$: $\vec{E} = \frac{\rho_v(b^3-a^3)}{3\varepsilon_o r^2}\ \vec{a_r}$ $[\frac{N}{C}]$.

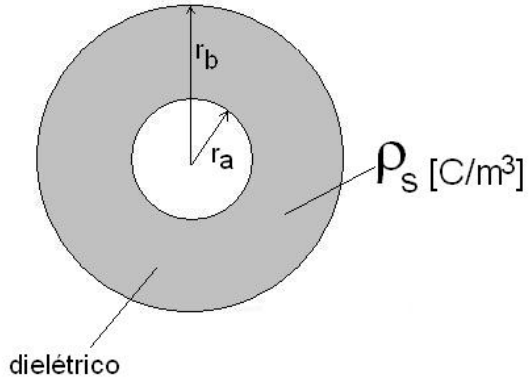


Figura 7: Esfera referente à questão (9).

10. Considere um capacitor de placas retangulares planas e paralelas. Seja S a área de cada uma das placas e d a distância entre elas. Suponha que as placas estejam separadas pelo vácuo. Suponha que o capacitor esteja carregado de tal forma que ρ_s $[C/m^2]$ é a densidade superficial de cargas em uma das placas e $-\rho_s$ é a densidade superficial na outra placa. Calcule a força, por unidade de área, que uma placa exerce na outra. **Sugestão:** Para efeito de cálculo de campo, considere que as placas do capacitor sejam infinitas.

    Resposta: $\frac{\vec{F_{12}}}{S_2} = \frac{{\rho_s}^2}{2\varepsilon_o}\ (-\vec{a_z})$ $[N]$ e $\frac{\vec{F_{21}}}{S_1} = \frac{{\rho_s}^2}{2\varepsilon_o}\ \vec{a_z}$ $[N]$.

11. Considere a distribuição de cargas da Figura 8 na forma de um anel de raio a. A densidade linear de cargas ao longo do anel é uniforme e igual a ρ_L $[C/m]$, $\rho_L > 0$. Uma esfera de massa m, raio desprezível, carregada com carga q $[C]$, $q > 0$ está, no instante $t = 0$, sobre o eixo z na posição $(0, 0, b)$ $[m]$, $b > 0$, com velocidade $\vec{v} = (0, 0, -v)$ $[m/s]$, $v > 0$. Calcule a mínima velocidade v necessária para que a carga passe pela origem do sistema de coordenadas.

Sugestão: Calcule o potencial elétrico da distribuição de cargas na forma de um anel ao longo do eixo z e utilize o princípio de conservação de energia.

Resposta: $v = \sqrt{\frac{q\rho_L}{m\varepsilon_o}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}\right)}$ $[\frac{m}{s}]$.

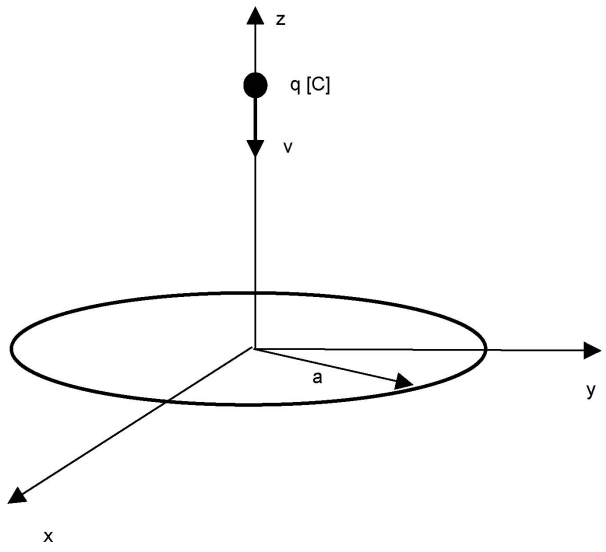


Figura 8: Distribuição de cargas na forma de um anel referente a questão (11).

12. Qual é a diferença entre o campo elétrico produzido por uma carga puntiforme de Q $[C]$, uma esfera metálica de raio a carregada com a mesma quantidade de carga e uma esfera de material dielétrico de permissividade elétrica ε carregada com a mesma quantidade de carga, todas elas imersas no vácuo. Para a esfera dielétrica considere que a mesma esteja carregada com densidade volumétrica de carga uniforme.

    Resposta: Carga puntiforme: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\ \vec{a_r}$ $[\frac{N}{C}]$. Esfera metálica: $\vec{E} = 0$ $[\frac{N}{C}]$, se $r < r_e$, e $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\ \vec{a_r}$ $[\frac{N}{C}]$, se $r \geq r_e$. Esfera dielétrica: $\vec{E} = \frac{q\left(\frac{r}{r_e}\right)^3}{4\pi\varepsilon_o r^2}\ \vec{a_r}$ $[\frac{N}{C}]$, se $r \leq r_e$, e $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\ \vec{a_r}$ $[\frac{N}{C}]$, se $r > r_e$. Dessa forma, observa-se que as esferas comportam-se como cargas puntiformes sempre que $r > r_e$, porém quando $r \leq r_e$ observa-se que a esfera metálica apresenta um campo elétrico nulo em seu interior, uma vez que as cargas se concentram na superfície da mesma, já a esfera dielétrica apresenta um campo elétrico diferente de zero, pois a densidade de carga é uniforme em seu interior.

13. Considere a distribuição de cargas na forma de um anel conforme mostra a Figura 9. Se ρ_L $[C/m]$ é a densidade linear de cargas ao longo do anel, (a) Apresente argumentos que comprovem que o campo elétrico no ponto P não possui componente na direção $\vec{a}_y$. (b) Calcule o campo elétrico no ponto P. (Não é necessário resolver a integral). (c) Mostre, utilizando os cálculos do item anterior, que $\vec{E} = 0$ se $b = 0$.

    Resposta: (a) Para todo elemento infinitesimal de carga dq_1 é sempre possível encontrar outro elemento inifinitessimal de carga dq_2, ambos sobre o anel, eqüidistantes do ponto P (sob análise) e simetricamente opostos, de forma que o campo elétrico resultante esteja na direção $\vec{a_x}$. (b) $\vec{E_P} = \int_{-a}^{a} \frac{-(x+b)a\rho_L}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{a^2-x_P^2}[(b+x_P)^2+a^2-x_P^2]^{3/2}}\ dx\ \vec{a_x}$ $[\frac{N}{C}]$. (c) Sendo $b = 0$, concluí-se

que $\vec{E} = \int_{-a}^{a} f(x)\ dx$, onde $f(x)$ é uma função ímpar e portanto $\vec{E} = 0$.

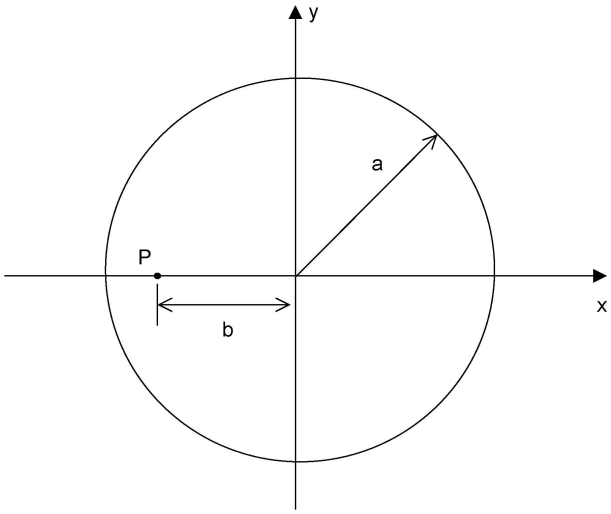


Figura 9: Distribuição de cargas na forma de um anel referente a questão (13).

4 Campo Magnético

14. (Um motor elétrico rudimentar). Uma fonte de corrente de intensidade I Ampères é conectada ao aparato da Figura 10. O aparato consiste de dois trilhos retilíneos paralelos, separados por uma distância de a metros, e uma barra condutora, livre para se movimentar na direção y, apoiada nos trilhos. Suponha que o aparato está imerso em um campo magnético uniforme de intensidade B. (a) Qual a direção e o sentido do campo $\vec{B}$ para que a barra se desloque para a direita, isto é, na direção de crescimento de y? (b) Qual é a força de origem magnética aplicada à barra?

    Resposta: (a) $\vec{B} = B\ (-\vec{a_z})\ [\frac{N}{A.m}]$. (b) $\vec{F} = IBa\ \vec{a_y}\ [N]$.

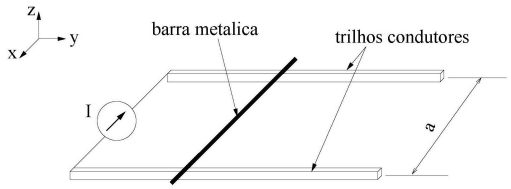


Figura 10: Barra condutora livre para se movimentar apoiada nos trilhos retilíneos condutores referente aos exercícios (14) e (31).

15. Para controlar a posição do feixe de elétrons em um tubo de raios catódicos (TRC) em uma televisão, geralmente utilizam-se um par de bobinas nas laterais do tubo como mostra a Figura 11. (a) Indique na figura a direção da corrente que deve ser aplicada às bobinas para que o feixe de elétrons deflexione para cima. (b) Considere o par de espiras num sistema de coordenadas conforme a Figura 11. Calcule a intensidade de campo magnético na origem do sistema de coordenadas sabendo que as espiras estão paralelas ao plano xz, possuem raio r,

distam a deste plano e I é a corrente que circula em cada uma das espiras no sentido indicado na figura.

Resposta: (a) Para que o feixe de elétrons sera desviado no sentido $\vec{a_z}$ as correntes devem estar orientadas no sentido anti-horário. (b) $\vec{H} = \frac{-Ir^2}{(a^2+r^2)^{3/2}}\ \vec{a_y}\ [\frac{A.espira}{m}]$.

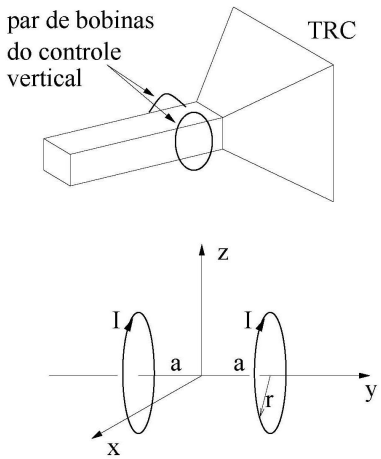


Figura 11: Tubo de raios catódicos referente aos exercícios (15) e (17).

16. A distribuição superficial de cargas uniforme na forma de uma arruela (vide Figura 2) gira a uma velocidade angular $\omega[rad/s]$ em torno do eixo z. Calcule o campo elétrico e magnético sobre o eixo z. Uma carga negativa puntiforme com massa m é abandonada com velocidade nula sobre o eixo z. O que ocorre com esta carga?

    Resposta: Ao longo do eixo z, o campo elétrico é: $\vec{E_z} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2+z^2}}\right)\ \vec{a_z}\ [\frac{N}{C}]$ e o campo magnético é: $\vec{B_z} = \frac{\mu_o\rho_s\omega}{2}\left(\frac{z^2}{\sqrt{b^2+z^2}} - \frac{z^2}{\sqrt{a^2+z^2}} + \sqrt{b^2+z^2} - \sqrt{a^2+z^2}\right)\ \vec{a_z}\ [\frac{N}{A.m}]$. Dessa forma, como os campos elétrico e magnético sempre apontam na direção $z\ \vec{a_z}$, constata-se que uma carga puntiforme com carga $q < 0$ sempre irá ser atraída na direção da origem.

17. Num tubo de raios catódicos, um par de bobinas na forma de um anel com N espiras, cada uma, é utilizado para deflexionar o feixe de elétrons que é acelerado em direção à tela. A Figura 12 ilustra a situação. Os elétrons possuem velocidade $\vec{v} = -v\ \vec{a}_x$, $v > 0$ e o feixe coincide com o eixo x. Sabendo que uma carga elétrica q em movimento sob a ação de um campo magnético $\vec{B}$ sofre a ação de uma força dada por $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, Determine o sentido das correntes nas bobinas para que o feixe sofra deflexão para cima, ou seja, na direção de $\vec{a}_z$. Calcule o campo magnético na origem do sistema de coordenadas da figura imaginando que uma corrente de intensidade I [A] flui em cada uma das bobinas no sentido determinado anteriormente.

    Resposta: Na origem do sistema de coordenadas observa-se: $\vec{B} = \frac{-N\mu_o Ir^2}{(a^2+r^2)^{3/2}}\ \vec{a_y}\ [\frac{N}{A.m}]$.

18. Considere uma espira plana retangular de lados a e b. Suponha que uma corrente I seja aplicada a esta espira. Sabendo que $d\vec{F} = I\vec{dl} \times \vec{B}$, indique a direção e o sentido das forças que surgem nesta mesma espira em função da corrente aplicada.

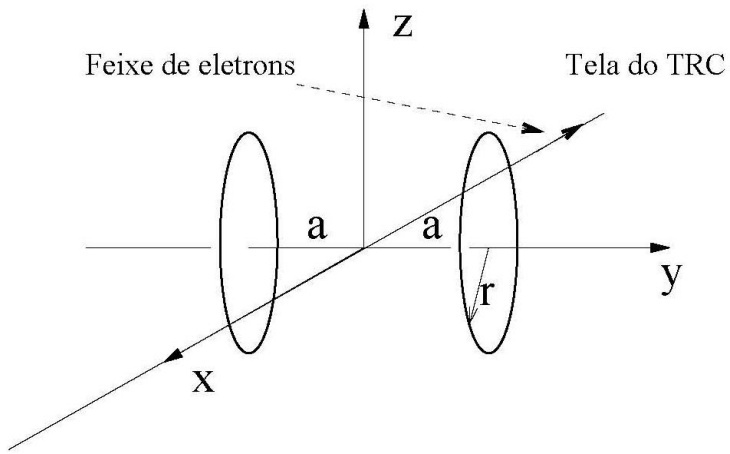


Figura 12: Esquema do tubo de raios catódicos referente à questão (17). Os elétrons possuem velocidade $\vec{v} = -v\ \vec{a}_x$, $v > 0$. O feixe coincide com o eixo x.

Resposta: Para ambos os sentidos de corrente, observa-se: no lado superior da espira $d\vec{F}_1 = dF_1\ \vec{a_y}$, no lado inferior $d\vec{F}_2 = dF_2\ (-\vec{a_y})$, na lateral direita $d\vec{F}_3 = dF_3\ \vec{a_x}$ e na lateral esquerda $d\vec{F}_4 = dF_4\ (-\vec{a_x})$.

19. Calcule e indique as diferenças entre os campos magnéticos produzidos por um filamento de corrente $I[A]$ e pela mesma intensidade de corrente I distribuída de maneira uniforme em um fio condutor retilíneo infinito de raio a quando ambos estão imersos no vácuo.

    Resposta: Filamento de corrente infinito: $\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi r}\ \vec{a_\phi}\ [\frac{N}{A.m}]$. Condutor retilíneo infinito: $\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi r}\ \vec{a_\phi}\ [\frac{N}{A.m}]$, se $r \geq r_c$ e $\vec{B} = \frac{\mu_o I r}{2\pi a^2}\ \vec{a_\phi}\ [\frac{N}{A.m}]$, se $r < r_c$. Nota-se portanto, que para $r \geq r_c$ o condutor retilíneo se comporta como um filamento de corrente, porém para o caso $r < r_c$, o condutor apresenta um comportamento diferenciado, dado a sua geometria e volume.

20. Uma corrente I $[A]$ atravessa um condutor cilíndrico de raio a, retilíneo e de comprimento infinito. Admitindo que a corrente se distribui uniformemente na seção transversal deste condutor, calcule o campo magnético no interior e no exterior do condutor devido a corrente I que passa por ele.

    Resposta: $\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi r}\ \vec{a_\phi}\ [\frac{N}{A.m}]$, se $r \geq r_c$ e $\vec{B} = \frac{\mu_o I r}{2\pi a^2}\ \vec{a_\phi}\ [\frac{N}{A.m}]$, se $r < r_c$.

5 Potencial Elétrico e Magnético

21. Considere um par de fios retilíneos, de comprimento infinito e paralelos no vácuo ($\varepsilon = 8,854 \times 10^{-12} F/m$). A Figura 13 mostra a seção transversal destes condutores. Se o raio a do condutor é muito menor do que a distância d entre os condutores, então podemos considerar, para efeito de cálculo de campo elétrico, que os fios são condutores filamentares. Seja $\rho_L[C/m]$ a densidade linear de cargas no condutor à esquerda e $-\rho_L[C/m]$ a densidade linear de cargas no condutor à direita.(a) Calcule a diferença de potencial entre estes condutores. (b) Se $d = 15m$, $a = 10cm$ e a diferença de potencial é de $750kV$, qual é a densidade de carga ρ_L?

Resposta: (a) $V_{BA} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{a^2}{(d-a)^2}\right)$ $[V]$. (b) $\rho_L = 4,17.10^{-6}$ $[\frac{C}{m}]$.

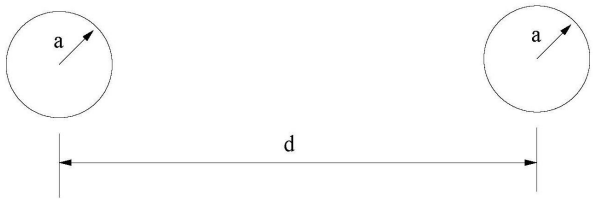


Figura 13: Par de fios paralelos e infinitos referentes à questão (21).

22. Para a distribuição superficial de carga na forma de uma circunferência de raio a da Figura 14, calcule o potencial elétrico no ponto P. Considere que a referência, ou seja, o potencial nulo, esteja no infinito.

    Resposta: $V_P = \frac{\rho_L}{2\sqrt{2}\varepsilon_0}$ $[V]$.

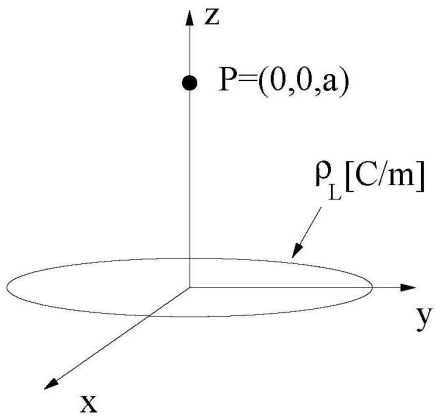


Figura 14: Circunferência carregada referente a questão (22).

23. Define-se a diferença de potencial escalar magnético entre um ponto a e b como sendo a integral de linha $V_m = \int_a^b \vec{H} \cdot \vec{dl}$. Explique qual é a inconsistência desta definição.

    Resposta: Tomando $V_m = \int_a^b \vec{H} \cdot \vec{dl}$ e avaliando o mesmo sobre um caminho fechado temos que $V_m = \int_a^a \vec{H} \cdot \vec{dl} = I \neq 0$, portanto $\vec{H}$ não é conservativo se existirem correntes no domínio sob análise, fato essencial à existência de campo magnético, o que impede a definição de uma função potencial escalar magnético V_m.

24. Uma carga de intensidade Q [C], com $Q > 0$, está fixa na origem do sistema de coordenadas da Figura 15. Uma segunda carga de intensidade q [C], com $q < 0$, é trazida do infinito, pela ação de uma força externa, até a posição A indicada na Figura 15.(a)Qual é a força externa necessária para manter a carga q na posição A? (b)Qual é o trabalho realizado pela força externa para trazer a carga q pelo caminho retilíneo radial ∞A do infinito até a posição A?

(c) Qual é o trabalho realizado pela força externa para trazer a mesma carga q do infinito até a posição A pelo caminho ∞BA?

Resposta: (a) $\vec{F_{ext}} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{a_r}$ $[N]$. (b) $W_{\infty A} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $[J]$. (c) $W_{\infty BA} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $[J]$.

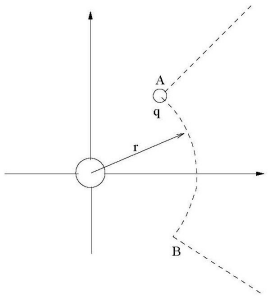


Figura 15: Cargas referentes à questão (24).

25. Calcule o campo elétrico e o potencial elétrico sobre o eixo z da distribuição superficial de cargas da Figura 16 na forma de um círculo. A distribuição de cargas no círculo é uniforme e igual a ρ_s $[C/m^2]$.

    Resposta: $\vec{E_z} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)\vec{a_z}$ $[\frac{N}{C}]$ e $V_z = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2+r^2} - |z|)$ $[V]$

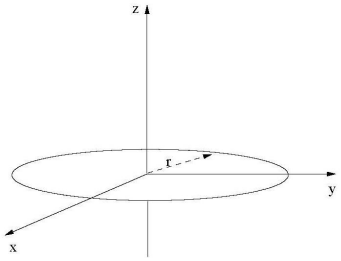


Figura 16: Distribuição superficial de cargas na forma de um círculo referente à questão (25).

26. Considere um filamento retilíneo infinito com densidade de cargas uniforme $\rho_L[C/m]$. (a) Calcule o potencial elétrico devido a esta distribuição de cargas. Escolha como referência para medir o potencial elétrico um ponto a uma distância r_0 da linha de cargas. (b) Considere os dois filamentos de carga retilíneos e infinitos da Figura (17). Escolha uma referência conveniente e calcule o potencial elétrico total devido as duas linhas de carga. (c) Mostre que o plano xz é uma superfície equipotencial.

    Resposta: (a) $V = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$ $[V]$. (b) $V = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\ln\left(\sqrt{(\frac{x_P^2+(y_P-a)^2}{x_P^2+(y_P+a)^2})}\right)$ $[V]$. (c) No plano xz, tem-se $y = 0$ e portanto $V = 0$ $[V]$, o que caracteriza uma o mesmo como uma superfície equipotencial.

27. Calcule (a) o potencial elétrico e (b) o campo elétrico devido a um filamento retilíneo e infinito com distribuição de cargas elétricas uniforme e igual a ρ_L $[C/m]$.

    Resposta: (a) $V = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$. (b) $\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{a_r}$ $[\frac{N}{C}]$.

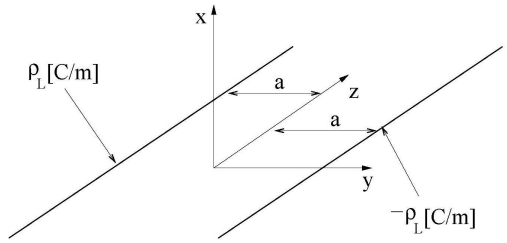


Figura 17: Filamentos retilíneos e infinitos referentes à questão (26).

6 Lei de Faraday

28. Um gerador síncrono elementar é constituído por uma única bobina retangular de lados a e b. O eixo de rotação da bobina coincide com o eixo x e a bobina está imersa em um campo magnético uniforme de intensidade B na direção y (vide Figura 18). O ângulo θ é o ângulo que o plano da bobina faz com o plano xz. Por ação de uma força externa, a bobina gira em torno do eixo de rotação com velocidade angular constante ω. (a) Qual é o fluxo concatenado pela bobina em função do tempo? (b) Qual é a tensão induzida $V(t)$? Não esquecer de observar a polaridade! (c) Se uma carga resistiva de 1Ω é conectada ao gerador pergunta-se: Qual é a corrente que circula pelo circuito bobina-resistor? Qual é o torque necessário (aplicado pela força externa) para manter a bobina girando a velocidade constante ω? **Sugestão:** A força exercida em um comprimento infinitesimal de condutor **dl** imerso em um campo magnético **B** é dada por $\mathbf{dF} = I\mathbf{dl} \times \mathbf{B}$, onde **dl** aponta no sentido da corrente I.

Resposta: (a) $\phi(t) = Bab\cos(\theta_0 + \omega t)$ $[Wb]$. (b) $V(t) = B\omega ab sen(\theta_o + \omega t)$ $[V]$. (c) A corrente elétrica que circula pelo circuito é dada por $i(t) = B\omega ab sen(\theta_o + \omega t)$ $[A]$ e o torque necessário à manutenção do movimento uniforme é dado por $T(t) = B^2\omega a^2 b^2 sen^2(\theta_o + \omega t)$ $[N.m]$.

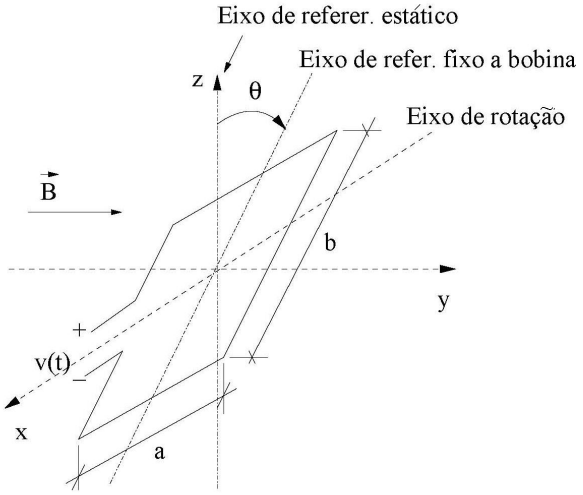


Figura 18: Gerador síncrono elementar referente a questão (28).

29. Considere o aparato da Figura 19. A barra desloca-se sobre os trilhos a velocidade constante v por ação de uma força externa F_{ext}. (a) Calcule a tensão e sobre o resistor. (Não esqueça da polaridade!). (b) Qual deve ser a força externa para que a barra desloque-se com velocidade constante? (c) O que poderíamos fazer, do ponto de vista construtivo, para dobrar a tensão e?

    Resposta: (a) $e = -Bhv$ $[V]$. (b) $\vec{F_{ext}} = \frac{B^2h^2v}{R}\vec{a_x}$ $[N]$. (c) Para dobrar a tensão e pode-se multiplicar B por α, v por β e h por γ, de forma que $\alpha.\beta.\gamma = 2$.

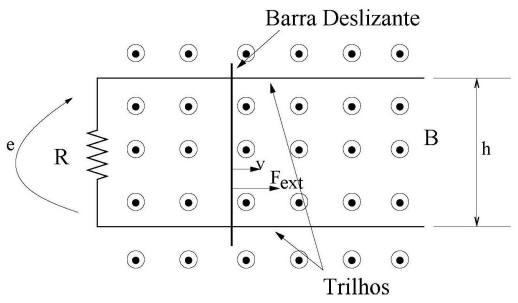


Figura 19: Gerador elementar referente a questão (29).

30. Uma linha de transmissão trifásica é atingida por um raio. Neste instante, uma corrente de $10KA$ flui pelo cabo pára-raios número 1 (vide Figura 20) no sentido entrando no papel. (a) Admitindo que a linha tenha comprimento infinito, calcule o campo magnético produzido pela corrente no cabo pára-raio número 1. (b) Calcule o fluxo magnético (por unidade de comprimento) concatenado pelo circuito formado pelos condutores das fases a e b. (c) Quais devem ser os raios r_a e r_b para que o fluxo concatenado pelo circuito em questão seja mínimo?

    Resposta: (a) $\vec{B} = \frac{1.10^4\mu_0}{2\pi r}\vec{a_\phi}$ $[\frac{N}{A.m}]$. (b) $\frac{\phi}{L} = \frac{1.10^4\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)$ $[\frac{Wb}{m}]$. (c) para que o fluxo concatenado pelo circuito seja mínimo devemos ter $r_a = r_b$.

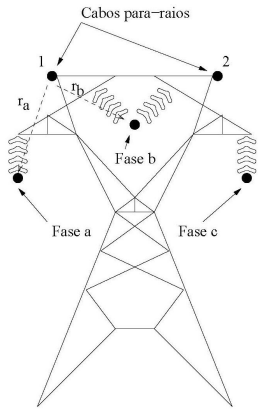


Figura 20: Seção transversal da Linha de Transmissão referente à questão (30).

31. Considere o aparato da Figura 10. Os trilhos estão separados por uma distância de 5cm. A barra condutora desloca-se com velocidade constante $v = 5,4\ m/s$. Os sinais positivo e

negativo indicam a polaridade do voltímetro. Um campo magnético uniforme e constante de $0,4\ Wb/m^2$ perpendicular ao plano dos trilhos e com sentido de baixo para cima é aplicado. (a) A tensão indicada no voltímetro é positiva? (b)Calcule o módulo da força eletromotriz induzida.

Resposta: (a) Não, a tensão indicada pelo voltímetro é negativa. (b) $|e| = 0,108\ [V]$.

32. Considere o aparato da Figura 21. A barra desloca-se sobre os trilhos para a direita a velocidade constante v por ação de uma força externa F_{ext}. Sabendo que existe uma densidade de fluxo magnético uniforme de intensidade B entrando perpendicularmente ao plano do papel, responda: (a) A tensão V é positiva? (b) Calcule a tensão V sobre o voltímetro. (c) Qual deve ser a força externa para que a barra desloque-se com velocidade constante?

    Resposta: (a) Sim. (b) $V(t) = B.v.(L + 2.v.t.tg(\alpha))\ [V]$. (c) $\vec{F_{ext}} = \frac{B^2.v.(L+2.v.t.tg(\alpha))^2}{R}\vec{a_x}\ [N]$.

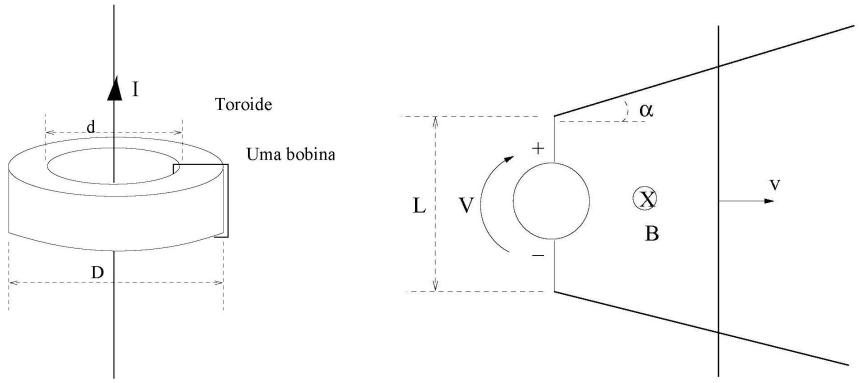


Figura 21: Transformador de corrente referente a questão (41) e Gerador referente a questão (32).

33. O conjunto barra trilhos da Figura 22 está sujeito a a ação de uma densidade de fluxo magnético $B[Wb/m^2]$.(a) Quais são as tensões nos voltímetros V_1 e V_2 (magnitude e polaridade) se a barra se desloca a uma velocidade constante $v[m/s]$ e o campo B é constante e uniforme ao longo de todo o circuito elétrico? (b) Quais são as tensões nos voltímetros V_1 e V_2 (magnitude e polaridade) se a barra está parada na posição x e $\frac{dB}{dt} = \alpha > 0$?

    Resposta: (a) $V_1 = BLv\ [V]$ e $V_2 = BLv\ [V]$. (b)$V_1 = Lx\alpha\ [V]$ e $V_2 = -L(c-x)\alpha\ [V]$.

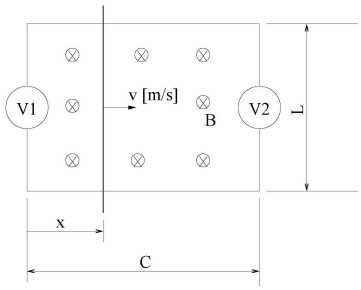


Figura 22: Conjunto trilhos e barra referente à questão (33).

34. Em um circuito magnético, a seção transversal do material ferromagnético é retangular conforme a Figura 23. Seja L o comprimento total do circuito magnético e K a largura de sua seção transversal. O material ferromagnético é um material condutor com condutividade elétrica σ $[S]$. Em um certo circuito de corrente alternada, o núcleo ferromagnético está sujeito a uma densidade de fluxo magnético B senoidal, uniforme ao longo de toda seção transversal, dada por $B = B_0 sin\omega t$. A variação do fluxo magnético no núcleo induz correntes elétricas no material ferromagnético denominadas correntes de Foucault. (a)Existem infinitos "caminhos de corrente" ao longo do material ferromagnético. Considere o caminho de corrente no núcleo de ferro delimitado por linhas tracejadas na Figura 23.Calcule a resistência elétrica total deste caminho. (Lembre-se que L é o comprimento total do circuito magnético e K a largura de sua seção transversal). (b) Calcule a tensão induzida neste caminho devido ao fluxo magnético variável. (c) Calcule a potência elétrica média dissipada neste circuito (perdas por correntes de Foucault).

Resposta: (a) $R = \frac{2.(h+w)}{\sigma.L.dw}$ $[\Omega]$. (b) A tensão induzida é igual a $e(t) = h.w.\omega.B_0 \cos(\omega t)$ $[V]$. (c) $P_m = \frac{\sigma.L.h^2.\omega^2.B_0^2}{4}.\left[\frac{K}{8} - \frac{Kh}{2} + h^2 \ln\left(\frac{K+2h}{2h}\right)\right]$ $[W]$.

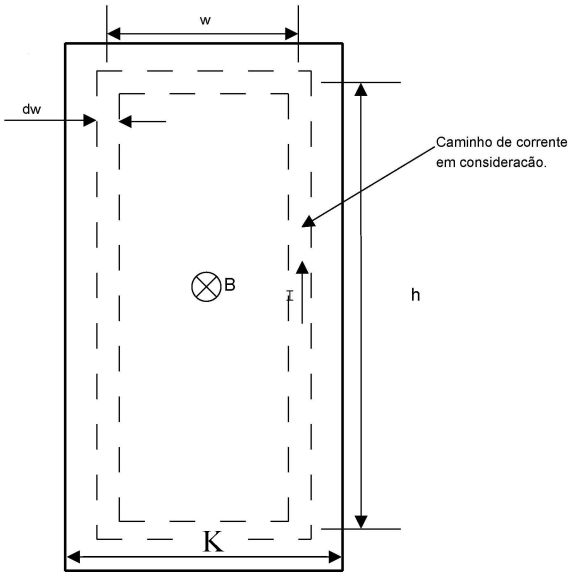


Figura 23: Seção transversal do núcleo ferromagnético do circuito magnético referente a questão (34).

35. Considere o aparato da Figura 24. Os trilhos condutores estão separados por uma distância de 20cm. Na região entre os trilhos existe um campo magnético uniforme de intensidade $B = 0,15Wb/m^2$. A barra condutora desloca-se para a direita com velocidade constante $v = 8\ m/s$ e contém um voltímetro ideal. Os sinais positivo e negativo indicam a polaridade do voltímetro. Qual seria a leitura do voltímetro se: (a) as extremidades do trilho estiverem abertas, (b)a extremidade $x = 0$ for curto-circuitada, (c) ambas extremidades forem curto-circuitadas, (d)a extremidade $x = 0$ for curto-circuitada, o voltímetro possui resistência interna $100K\Omega$ e o trilho possui resistividade $10K\Omega/m$.

Resposta: (a) $V = 0$ $[V]$. (b) $V = 0,24$ $[V]$. (c) $V = 0$ $[V]$. (d) $V(x) = 0,24 - \frac{0,24.10^{-3}}{102+2x}$ $[V]$.

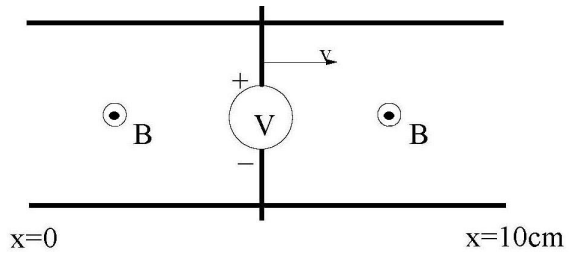


Figura 24: Aparato referente à questão (35).

36. No transformador da Figura 31 aplica-se uma tensão no enrolamento número 1 igual a $A\cos\omega t$. (a) Calcule o fluxo na perna central do material ferromagnético admitindo que o fluxo de dispersão (fluxo no ar) é nulo. Para este cálculo, despreze as resistências internas dos enrolamentos. (b) Determine a polaridade (o ponto) no enrolamento número 2. (c) Calcule a tensão induzida no enrolamento número 2. A seção transversal da perna central do núcleo possui $2,5cm^2$ e a seção transversal das pernas laterais possui $2cm^2$.

    Resposta: (a) $\phi_C = \frac{A}{N_1\omega} sen(\omega t)$ $[Wb]$. (b) O ponto deve ser colocado na extremidade superior do enrolamento 2. (c) $e_2(t) = \frac{A.N_2}{2.N_1}\cos(\omega t)$.

37. Um condutor perfeito une as duas extremidades de um resistor conforme mostra a Figura 25. Sendo $B = 0.4sen120\pi t[Wb/m^2]$ e considerando desprezível o fluxo magnético produzido pela própria corrente da espira, determine $V_{ab}(t)$ e $I(t)$.

    Resposta: $V_{ab} = -1,92\pi^2\cos(120\pi t)$ $[V]$ e $I(t) = -0,0192\pi^2\cos(120\pi t)$ $[A]$

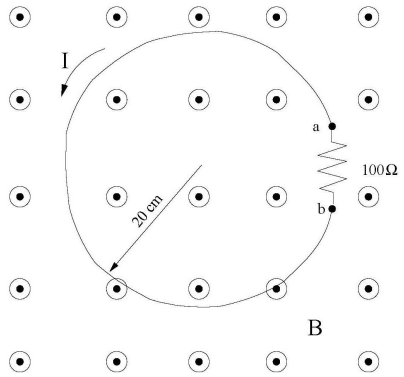


Figura 25: Aparato referente à questão (37).

7 Capacitância, Indutância e Resistência

38. (a)Defina capacitância. (b) Calcule a capacitância (por unidade de comprimento) do cabo coaxial cuja seção transversal está apresentada na Figura 26. O raio do condutor interno é r_A. O condutor externo é um tubo de raio interno r_B e raio externo r_C onde obviamente $r_C > r_B > r_A$. A permissividade elétrica do teflon é ε_R.(c) Do ponto de vista construtivo, o

que poderíamos fazer para diminuir a capacitância (por unidade de comprimento) deste cabo? **Sugestão:** Para efeito de cálculo da capacitância, considere o condutor de comprimento infinito e suponha existir uma carga de Q Coulombs/m no condutor interno e -Q Coulombs/m no externo.

Resposta: (a) Capacitância é definida como a razão entre a carga, $+Q$ $[C]$, armazenada em um condutor e a diferença de potencial entre este e um segundo condutor, carregado com uma carga $-Q$ $[C]$, separados por um dielétrico. (b) $\frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_R}{\ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right)}$ $[\frac{F}{m}]$. (c) Para diminuir sua capacitância deve-se: substituir o dielétrico por um de menor permissividade elétrica e aumentar a razão r_B/r_A.

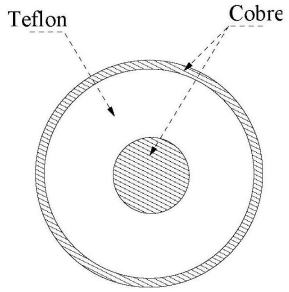


Figura 26: Seção transversal do cabo coaxial das questões (38), (39) e (40).

39. (a) Defina indutância. (b) Calcule a indutância (por unidade de comprimento) do mesmo cabo coaxial do exercício anterior. (c) Do ponto de vista construtivo, o que poderíamos fazer para diminuir a indutância (por unidade de comprimento) deste cabo?(d)Calcule o campo magnético $\vec{B}$ no interior do solenóide da Figura 27 via Lei de Ampere. (e)Do ponto de vista construtivo, o que poderíamos fazer para aumentar a indutância (por unidade de comprimento) do solenóide? **Sugestão:** Para efeito de cálculo de indutância do cabo coaxial, suponha existir uma corrente I atravessando a seção transversal do condutor interno e uma corrente -I no condutor externo. **Sugestão:** Para efeito de cálculo de indutância do solenóide, considere o solenóide de comprimento infinito e suponha que o número de espiras por unidade de comprimento seja grande o suficiente para considerarmos a existência de uma corrente superficial circulando na "casca" do cilindro. Além disto, lembre-se que o campo magnético no lado externo do solenóide infinito é nulo.

    Resposta: (a) Indutância é definida como a razão entre o fluxo magnético, causado pela corrente elétrica que circula na malha do circuito, que concatena a área delimitada por este circuito e a intensidade da corrente que percorre a malha deste mesmo circuito. (b) $\frac{L}{L'} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\left(\frac{c}{b}\right) + \frac{b^2}{c^2-b^2}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]$ $[\frac{H}{m}]$. (c) Para diminuir sua indutância deve-se: substituir o dielétrico por um de menor permeabilidade magnética e diminuir as razões b/a e c/b. (d) $\vec{B} = \mu K$ $[\frac{N}{A.m}]$. (e) Sendo a indutância por unidade de comprimento do solenóide dada por: $\frac{L}{L'} = N^2\mu\pi r^2$ $[\frac{H}{m}]$, para aumentá-la deve-se: substituir o material ferromagnético por um de maior permeabilidade magnética e aumentar r e N.

40. Considere o cabo coaxial da Figura 26. Suponha, para efeito de cálculo, que o condutor tem comprimento infinito. O raio do condutor interno é $r_a = 1mm$ enquanto que os raios do condutor externo são $r_b = 3mm$ para a superfície interna e $r_c = 3,5mm$ para a externa.

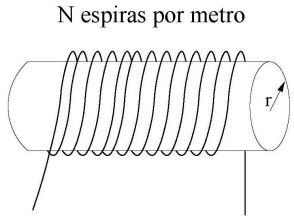


Figura 27: Solenóide da questão (39).

Em condições estáticas, existem $Q = 40\pi\ nC/m$ de cargas no condutor interno. (a)Calcule a densidade superficial de carga no condutor interno. (b)Calcule a densidade superficial de cargas na superfície interna do condutor externo. (c) Calcule o campo elétrico produzido por esta distribuição de cargas. (d)Calcule a diferença de potencial entre os condutores. (e) Calcule a capacitância do cabo coaxial por unidade de comprimento. (Permissividade elétrica relativa do teflon: $\epsilon_R = 2,1$, Permissividade elétrica do ar $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$) **Lembrete:** O campo elétrico no interior de um condutor, em condições estáticas, é nulo.

Resposta: (a) $\rho_{S-interno} = 20.10^{-}6\ [\frac{C}{m^2}]$. (b)$\rho_{S-externo} = \frac{20.10^{-}6}{3}\ [\frac{C}{m^2}]$. (c) $\vec{E} = \frac{1{,}076.10^3}{r}\vec{a_r}\ [\frac{N}{C}]$. (d) $V_{BA} = 1,182.10^3\ [V]$. (e) $\frac{C}{L'} = 1,063.10^{-10}\ [\frac{F}{m}]$.

41. (a)Defina indutância mútua. (b) A Figura 21 mostra um transformador de corrente formado por uma bobina de N espiras enrolada em um núcleo toroidal de seção quadrada. A figura mostra apenas uma espira deste enrolamento. Calcule a indutância mútua entre o condutor filamentar retilíneo de comprimento infinito (primário do transformador) e o enrolamento de N espiras no toróide (secundário do transformador). O núcleo toroidal é composto de um material com permeabilidade magnética relativa igual a $1,0$. (c)O que poderíamos fazer, do ponto de vista construtivo, para aumentar a indutância mútua?

    Resposta: (a) Indutância mútua é definida como a razão entre o fluxo magnético, produzido por um circuito 1, que concatena a área delimitada pelo circuito 2 e a intensidade de corrente elétrica que percorre o circuito 1. (b) $M_{12} = \frac{N\mu(D-d)}{4\pi}\ln\left(\frac{D}{d}\right)$. (c) Para aumentar a indutância mútua deve-se: substituir o material do núcleo por um de maior permeabilidade magnética, aumentar N e D, e diminuir d.

42. (a) Calcule a densidade de campo magnético $\vec{B}$ devido a uma densidade de corrente uniforme $J\ [A/m^2]$ atravessando um condutor cilíndrico, retilíneo, de comprimento infinito e com raio a. (b) Calcule a parcela de indutância, por unidade de comprimento, deste condutor devido somente ao fluxo magnético interno ao condutor.

    Resposta: (a) $\vec{B} = \frac{\mu_0 Jr}{2}\vec{a_\phi}\ [\frac{N}{A.m}]$, se $r \leq a$, e $\vec{B} = \frac{\mu_0 Ja^2}{2.r}\vec{a_\phi}\ [\frac{N}{A.m}]$, se $r > a$. (b) $\frac{L}{L'} = \frac{\mu_0}{4\pi}\ \frac{H}{m}$.

43. Define-se indutância mútua M_{12} como sendo a razão entre o fluxo magnético ϕ_{12} produzido pelo circuito 1 que concatena o circuito 2 e a corrente I_1 do circuito 1, isto é, $M_{12} = \frac{\phi_{12}}{I_1}$. Considere o aparato da Figura 28 onde o circuito 1 é constituído por uma linha infinita de corrente, coincidente com o eixo z, e o circuito 2 é uma bobina retangular com 1000 espiras no plano yz. Calcule a indutância mútua entre o filamento infinito de corrente e a bobina retangular. Considere $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ [H/m]$.

    Resposta: $M_{12} = 0,916\ [mH]$.

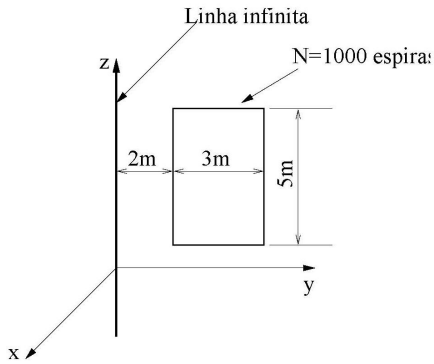


Figura 28: Aparato referente à questão (43).

8 Circuitos Magnéticos

44. O núcleo do circuito magnético da Figura (29) é de aço silício. A bobina enrolada no braço central possui 900 espiras. Qual é o comprimento do entreferro d que implica em uma densidade de fluxo no braço central de $1,2Wb/m^2$ quando uma corrente de 0,2 A é aplicada à bobina? Considere $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ $[H/m]$. **Dados:** A área efetiva do braço central é $2,5cm^2$ e o comprimento efetivo deste mesmo braço é $5cm$. O comprimento efetivo dos braços externos é $15cm$ e a área efetiva dos mesmos é $2cm^2$.

    Resposta: $d = 148$ $[\mu m]$.

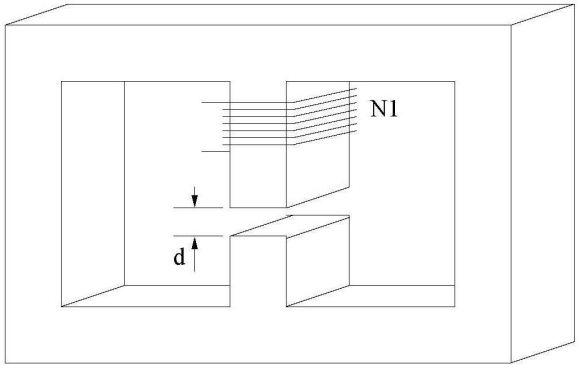


Figura 29: Circuito magnético referente ao exercício (44).

45. (a)Utilize a Lei de Faraday para determinar a polaridade (indicar o terminal que recebe o ponto) do enrolamento n. 2. Utilizando a teoria de circuitos magnéticos para o cálculo aproximado dos fluxos magnéticos no núcleo ferromagnético de aço-silício da Figura 31, calcule a indutância mútua entre os enrolamentos n.1 e n.2 se o fluxo na perna central é: (b) $\phi_C = 3 \times 10^{-4}$ $[Wb]$. (c) $\phi_C = 1,5 \times 10^{-4}[Wb]$. A seção transversal da perna central do núcleo possui $2,5cm^2$ e a seção transversal das pernas laterais possui $2cm^2$.

    Resposta: (a) O ponto deve ser colocado no terminal superior do enrolamento 2. (b) $M_{12} =$

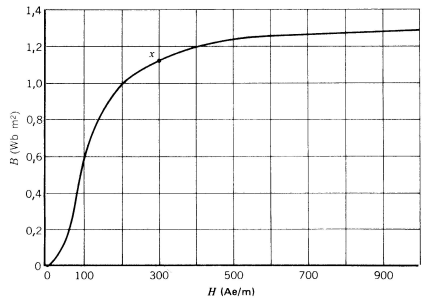


Figura 30: Curva de magnetização do aço-silício referente ao exercício (44).

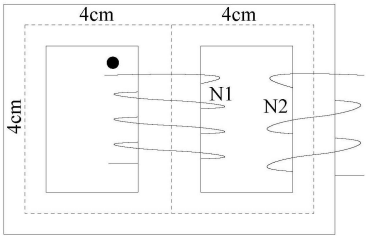
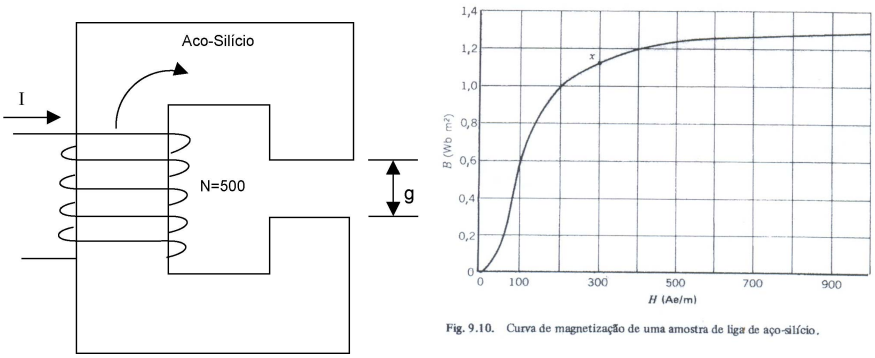


Figura 31: Circuito magnético referente às questões (45) e (36).

$N_1.N_2.4,839$ $[\mu H]$. (c) $M_{12} = N_1.N_2.5,414$ $[\mu H]$.

46. Calcule a indutância do aparato da Figura 32 se o fluxo magnético no núcleo ferromagnético de aço-silício é $\phi = 1,2 \times 10^{-4}$ $[Wb]$ e (a) $g = 2mm$ (b) $g = 1mm$. A área da seção transversal do núcleo ferromagnético é $A_{fe} = 1cm^2$ e o comprimento efetivo do material ferromagnético é $l_{fe} = 20cm$. Considere $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ $[H/m]$.

    Resposta: (a) $L = 15,08$ $[mH]$. (b) $L = 29$ $[mH]$.



(a) (b)

Figura 32: Circuito magnético referente a questão (46).