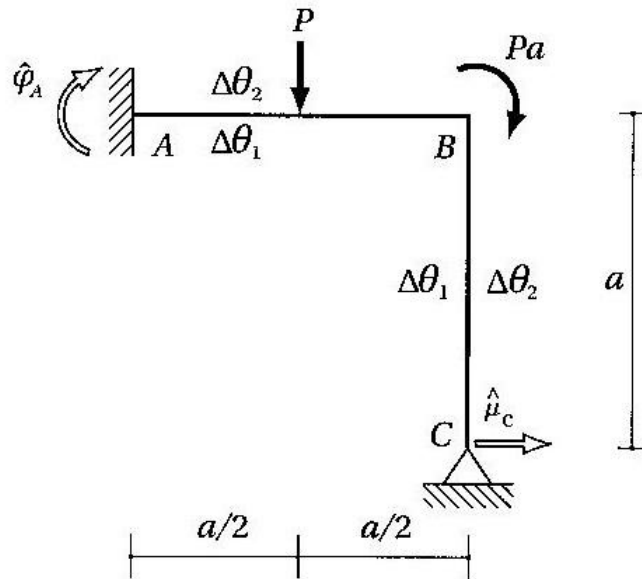


Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços

Idéias básicas

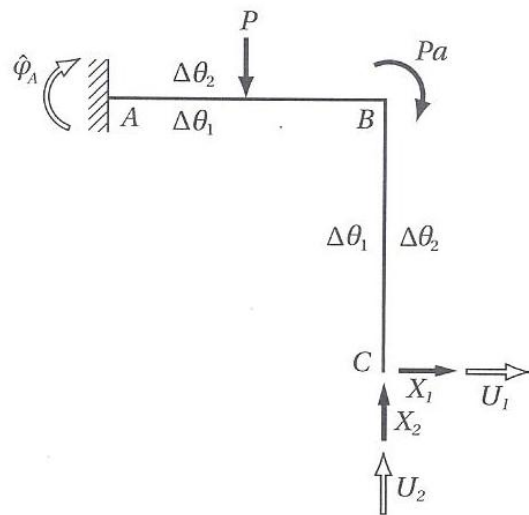
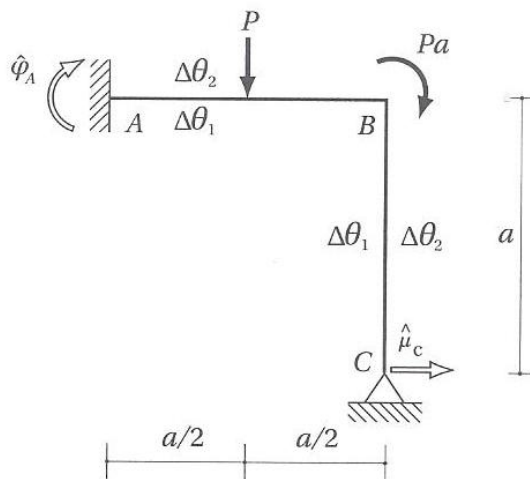
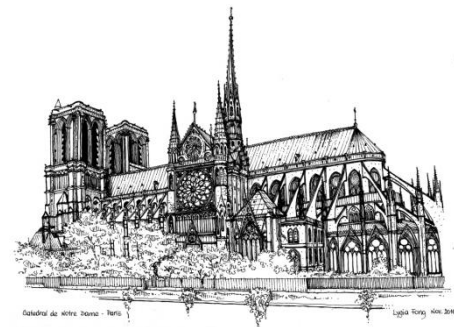


Estabelece-se um conjunto de soluções equilibradas que contém a solução real da estrutura hiperestática.

COMO ?

Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços

Idéias básicas

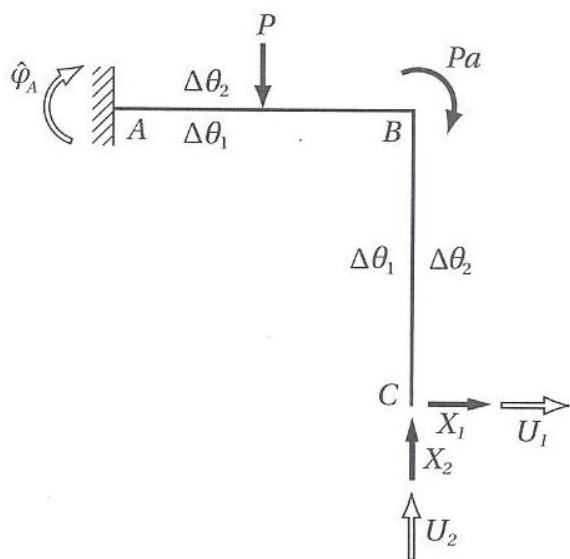
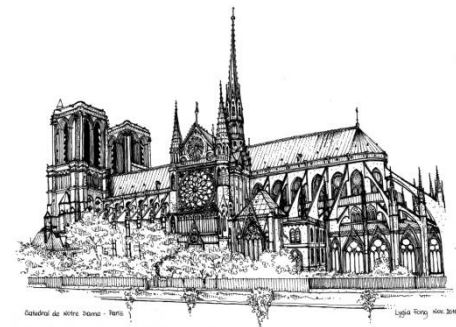


COMO ?

Suprimindo-se, arbitrariamente e convenientemente, vínculos externos ou internos, em número igual ao grau de hiperestaticidade, n , e introduzindo-se os esforços, chamados hiperestáticos, correspondentes aos vínculos retirados.

Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços

Idéias básicas



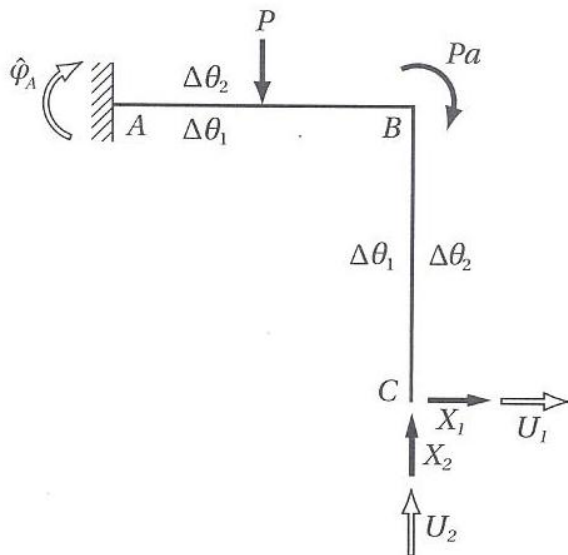
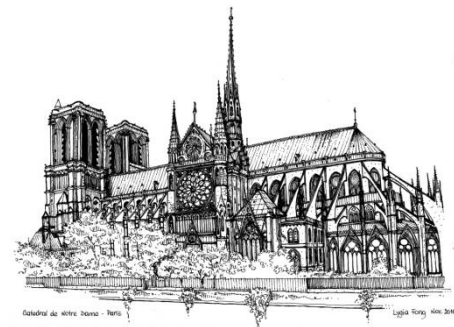
A cada conjunto de n valores das incógnitas hiperestáticas corresponderá uma solução equilibrada, o que permite definir o conjunto de todas as soluções equilibradas associados a uma particular isostática fundamental.

Entre essas infinitas soluções equilibradas, definidas na isostática fundamental, será a solução real da estrutura hiperestática aquela que também for compatível, ou seja, aquela que satisfizer às n condições de vínculos retirados da estrutura hiperestáticas

$$U_1 = \hat{u}_c \qquad U_2 = 0$$

Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços

Idéias básicas



$$U_1 = \hat{u}_c$$

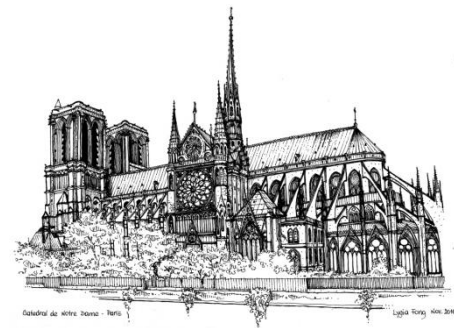
$$U_2 = 0$$

$$U_{10} + U_{1\theta} + U_{1R} + F_{11}X_1 + F_{12}X_2 = \hat{U}_1$$

$$U_{20} + U_{2\theta} + U_{2R} + F_{21}X_1 + F_{22}X_2 = \hat{U}_2$$

Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços

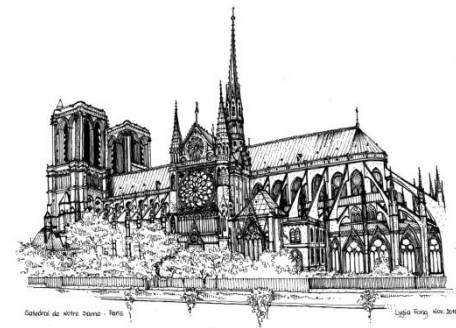
Idéias básicas



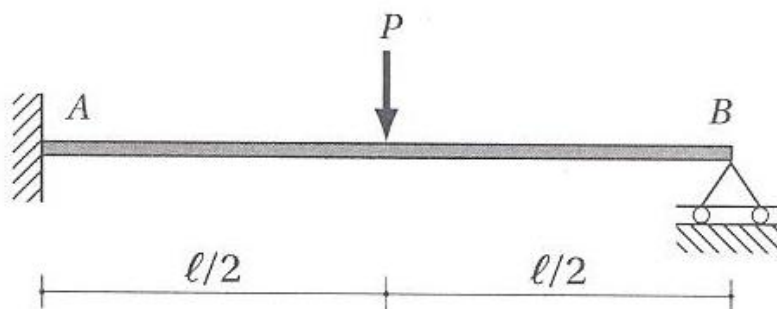
- As n equações, , são chamadas equações reduzidas de compatibilidade e a sua resolução leva à determinação das incógnitas hiperestáticas , ou seja, ao levantamento da indeterminação estática da estrutura original, e, portanto, à solução real do problema, que é equilibrada e compatível.
- Como a escolha da isostática fundamental é arbitrária pode-se sintetizar o método dos esforços por:

“Entre todas as soluções equilibradas será a solução real aquela também compatível”.

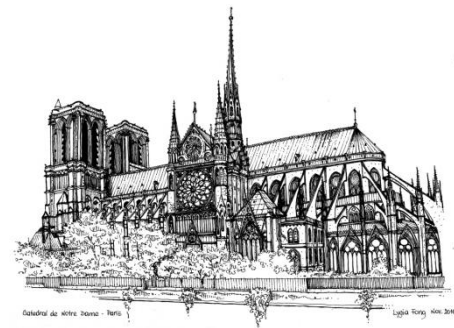
Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços



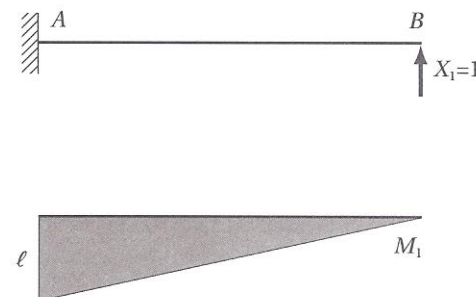
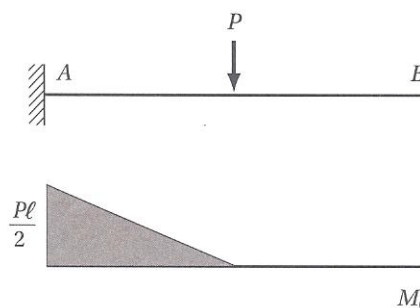
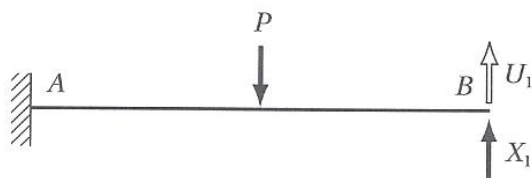
Exemplo 4.1 Resolver a viga engastada-articulada submetida ao carregamento externo, conforme se apresenta na figura 4.1. A viga é prismática com seção transversal de momento de inércia I e de material com módulo de elasticidade E .



Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços



1) Soluções equilibradas



$$M = M_0 + X_1 M_1$$

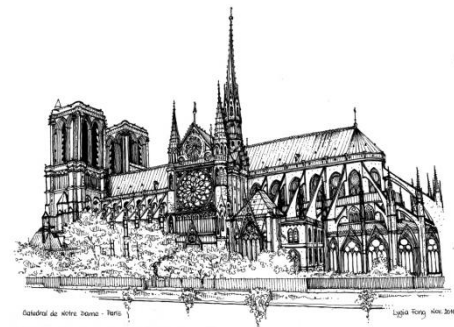
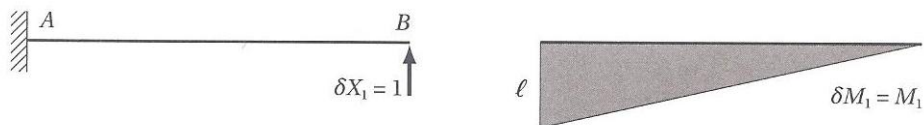
A cada valor de X_1 está associado um valor de U_1 de uma solução equilibrada.

Entre essas soluções equilibradas, será a solução real da viga engastada-apoiada aquela que satisfizer a equação reduzida de compatibilidade $U_1 = 0$.

Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços

2) Equação reduzida de compatibilidade

- Cálculo de U_1



$$U_1 = \int_0^{\ell} \delta M_1 \frac{M}{EI} dx = \int_0^{\ell} M_1 \frac{(M_0 + X_1 M_1)}{EI} dx$$

$$U_1 = \int_0^{\ell} \frac{M_1 M_0}{EI} dx + X_1 \int_0^{\ell} \frac{M_1 M_1}{EI} dx$$

$$U_1 = U_{10} + X_1 F_{11} \quad \text{com} \quad U_{10} = \int_0^{\ell} \frac{M_1 M_0}{EI} dx \quad F_{11} = \int_0^{\ell} \frac{M_1 M_1}{EI} dx$$

- Equação reduzida de compatibilidade

$$U_{10} + F_{11} X_1 = \hat{U}_1 \quad \text{com} \quad \hat{U}_1 = 0$$

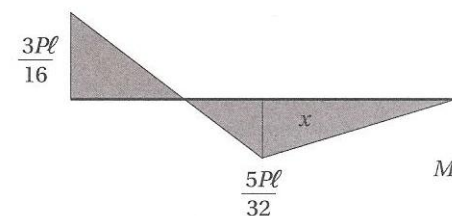
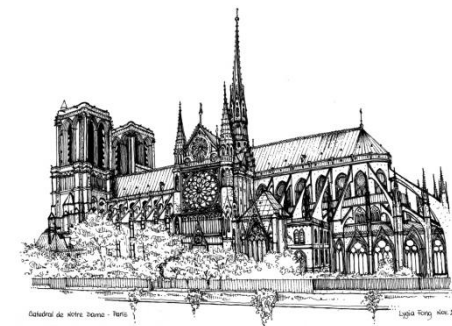
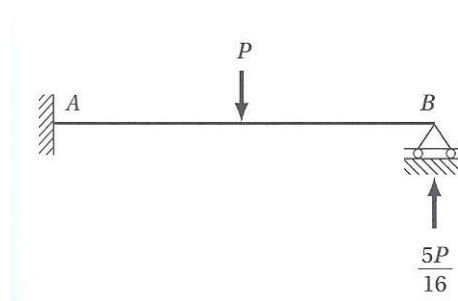
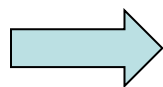
Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços

3) Solução real da viga engastada-apoiada

$$U_{10} + F_{11}X_1 = \hat{U}_1$$

$$\underbrace{\left(-\frac{5P\ell^3}{48EI}\right)}_{U_{10}} + \underbrace{\left(\frac{\ell^3}{3EI}\right)}_{F_{11}} X_1 = \underbrace{0}_{\hat{U}_1}$$

$$X_1 = \frac{5P}{16}$$

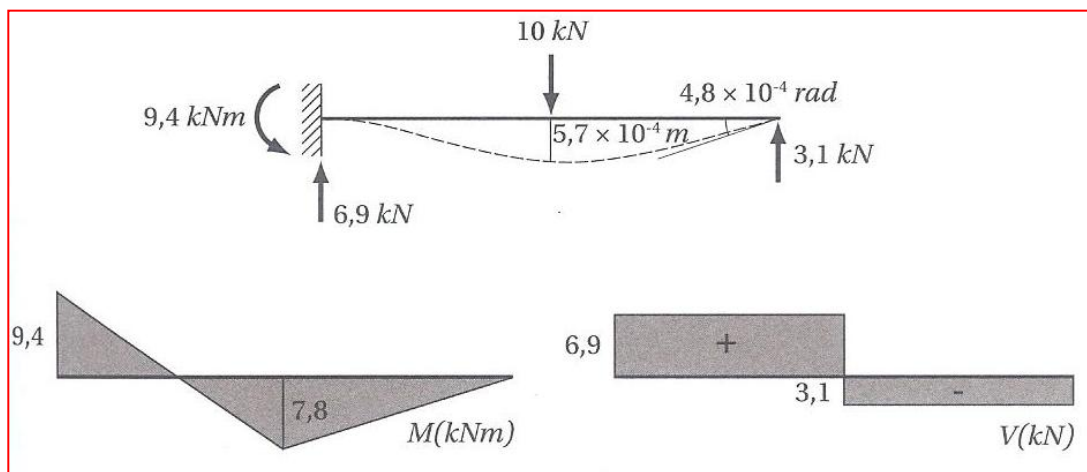


$$E = 20 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

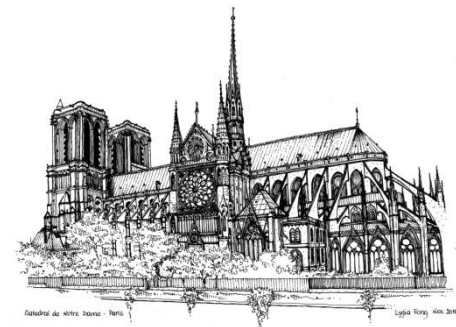
$$\ell = 5 \text{ m}$$

$$b \times h = (0,15 \times 0,40) \text{ m}^2$$

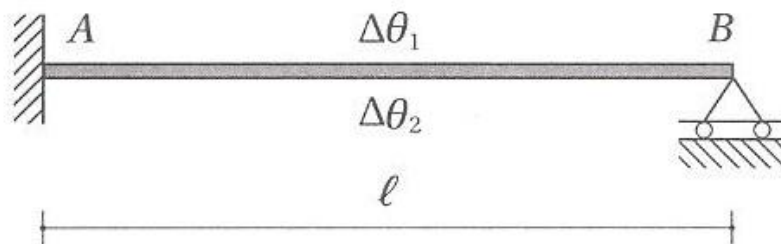
$$P = 10 \text{ kN}$$



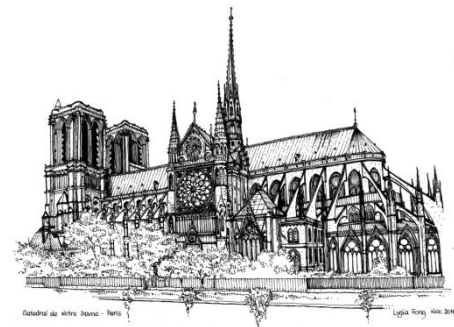
Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços



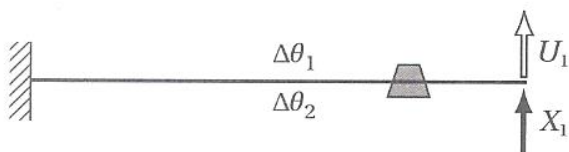
Exemplo 4.2 Resolver a viga engastada-articulada submetida à variação de temperatura indicada na figura 4.7. A viga é prismática com seção transversal de altura h e momento de inércia I e de material com módulo de elasticidade E e coeficiente de dilatação térmica α .



Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços



1) Soluções equilibradas



A cada valor de X_1 está associado um valor de U_1 de uma solução equilibrada.

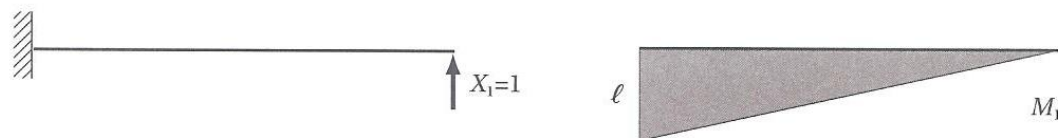
Entre essas soluções equilibrada, será a solução real da viga engastada-apoiada aquela que satisfizer a equação reduzida de compatibilidade $U_1 = 0$.

$$u' = u'_{\Delta\theta_0} + u'_N = \alpha\Delta\theta_0 + \frac{N}{EA}$$

$$w'' = w''_{\Delta\theta} + w''_M = -\frac{\alpha(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1)}{h} - \frac{M}{EI}$$

$$N = 0$$

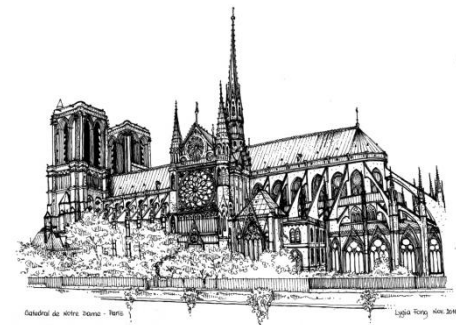
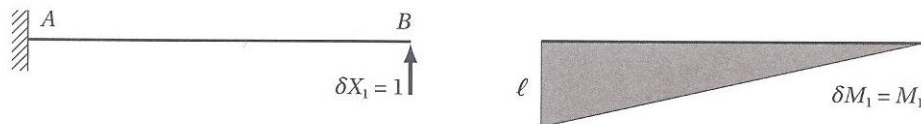
$$M = X_1 M_1$$



Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços

2) Equação reduzida de compatibilidade

- Cálculo de U_1



$$U_1 = \int_0^{\ell} \delta N_1(u')dx + \int_0^{\ell} \delta M_1(-w'')dx = \int_0^{\ell} \delta M_1(-w'')dx$$

$$U_1 = \int_0^{\ell} \delta M_1 \left(\frac{\alpha(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1)}{h} + \frac{M}{EI} \right) dx = \int_0^{\ell} M_1 \frac{\alpha(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1)}{h} dx + X_1 \int_0^{\ell} M_1 \frac{M_1}{EI} dx$$

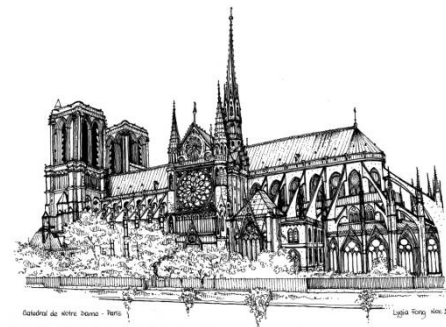
$$U_1 = U_{10} + F_{11}X_1 \quad \text{com} \quad U_{10} = \int_0^{\ell} M_1 \frac{\alpha(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1)}{h} dx \quad F_{11} = \int_0^{\ell} \frac{M_1 M_1}{EI} dx$$

- Equação reduzida de compatibilidade

$$U_{10} + F_{11}X_1 = \hat{U}_1 \quad \text{com} \quad \hat{U}_1 = 0$$

Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços

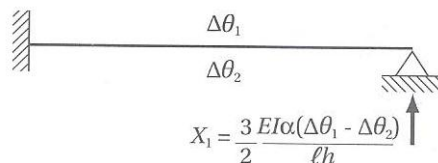
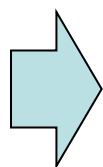
3) Solução real da viga engastada-apoiada



$$U_{10} + F_{11}X_1 = \hat{U}_1$$

$$\underbrace{\frac{\alpha(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1)}{h} \frac{\ell^2}{2}}_{U_{10}} + \underbrace{\left(\frac{\ell^3}{3EI}\right)}_{F_{11}} X_1 = \underbrace{0}_{\hat{U}_1}$$

$$X_1 = \frac{3}{2} \frac{\alpha(\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2)EI}{\ell h}$$



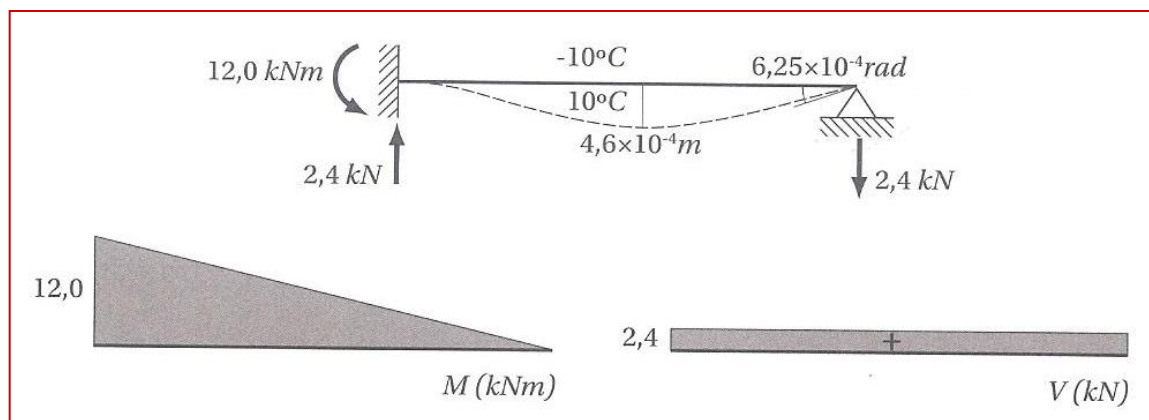
$$E = 20 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\ell = 5 \text{ m}$$

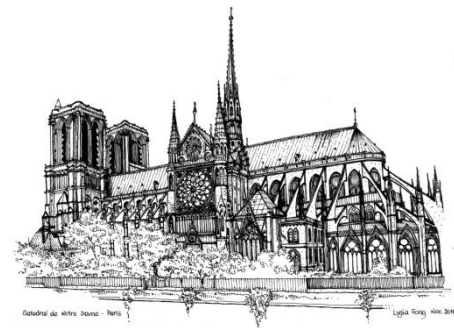
$$(b \times h) = (0,15 \times 0,40) \text{ m}^2$$

$$\Delta\theta_1 = -10^\circ \text{ C}$$

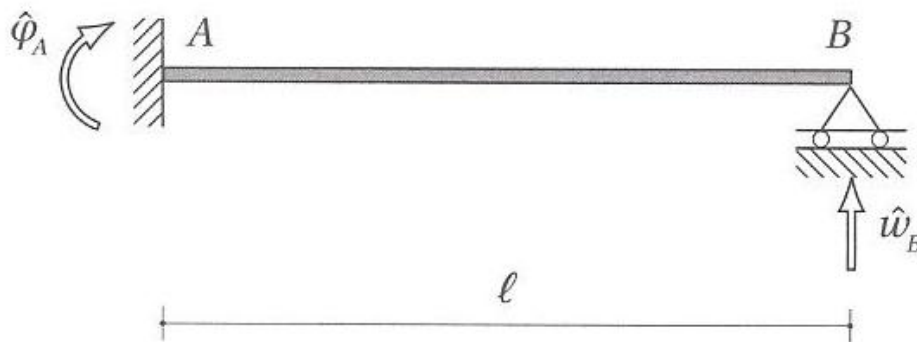
$$\Delta\theta_2 = +10^\circ \text{ C}$$



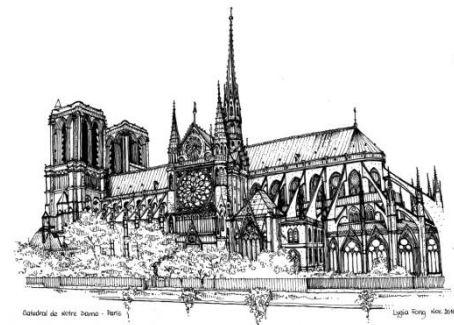
Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços



Exemplo 4.3 Resolver a viga engastada-articulada submetida a recalques de apoio conforme se indica na figura 4.13. A viga é prismática com momento de inércia I e de material com módulo de elasticidade E .



Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços



1) Soluções equilibradas

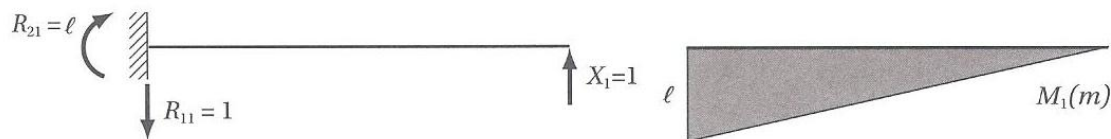


$$u' = u'_R + u'_N = 0 + \frac{N}{EA}$$

$$w'' = w''_R + w''_M = 0 - \frac{M}{EI}$$

$$N = 0$$

$$M = X_1 M_1$$



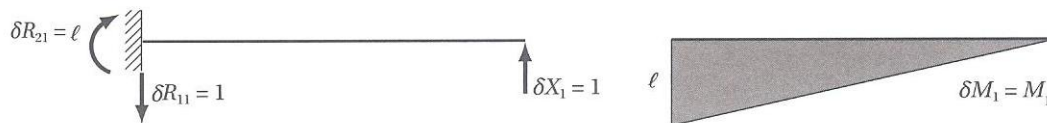
A cada valor de X_1 está associado um valor de U_1 de uma solução equilibrada.

Entre essas soluções equilibradas, será a solução real da viga engastada-apoiada aquela que satisfizer a equação reduzida de compatibilidade $U_1 = \hat{w}_B$.

Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços

2) Equação reduzida de compatibilidade

- Cálculo de U_1



$$\delta X_1 U_1 + \sum_{i=1}^3 \delta R_{i1} \hat{D}_i = \int_0^l \delta M_1 \frac{M}{EI} dx = \int_0^l M_1 \frac{X_1 M_1}{EI} dx$$

$$U_1 + \sum_{i=1}^3 R_{i1} \hat{D}_i = X_1 \int_0^l M_1 \frac{M_1}{EI} dx$$

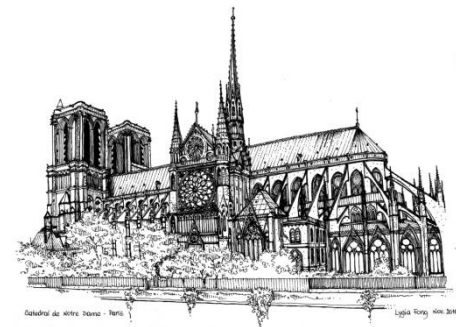
$$U_1 = U_{1R} + F_{11} X_1 \quad \text{com}$$

$$U_{1R} = - \sum_{i=1}^3 R_{i1} \hat{D}_i$$

$$F_{11} = \int_0^l \frac{M_1 M_1}{EI} dx$$

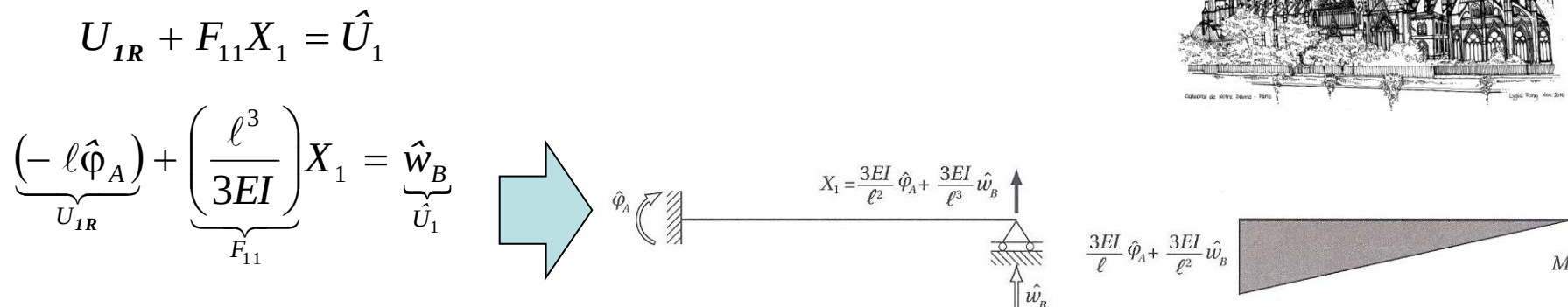
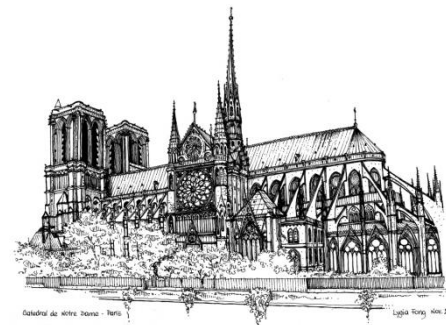
- Equação reduzida de compatibilidade

$$U_{1R} + F_{11} X_1 = \hat{U}_1 \quad \text{com} \quad \hat{U}_1 = \hat{w}_B$$



Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços

3) Solução real da viga engastada-apoiada



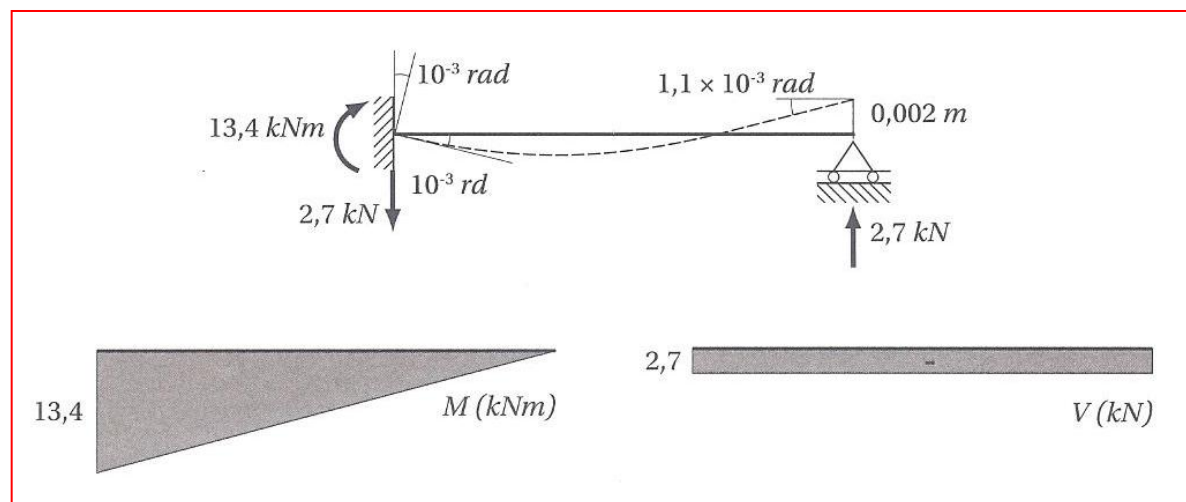
$$E = 20 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

$$\ell = 5 \text{ m}$$

$$(b \times h) = (0,15 \times 0,40) \text{ m}^2$$

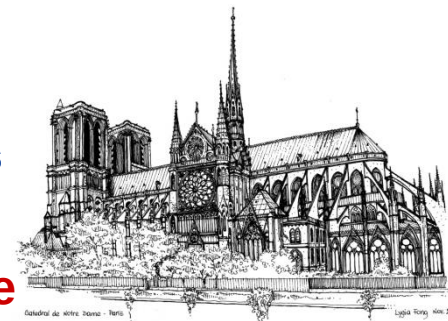
$$\hat{\phi}_A = 0,001 \text{ rd}$$

$$\hat{w}_B = 0,002 \text{ m}$$



Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços

Análise de estruturas reticuladas hiperestáticas pelo método dos esforços

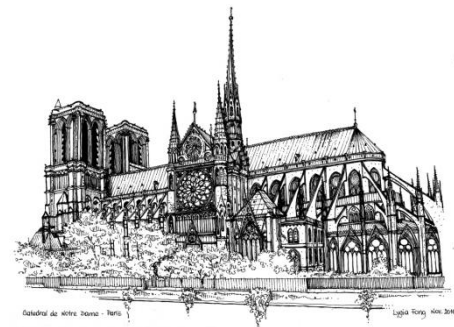


- Considere-se uma estrutura hiperestática com grau de hiperestaticidade e submetida a carregamento externo, variações de temperatura e recalques de apoio.
- define-se a isostática fundamental pela supressão de n de vínculos (arbitrária e convenientemente escolhidos) na estrutura hiperestática de grau n , que é objeto de análise;
- considera-se a isostática fundamental submetida às ações externas (carregamentos externos, variações de temperatura e recalques de apoio) e às incógnitas hiperestáticas (esforços correspondentes aos vínculos retirados);
- determinam-se as incógnitas hiperestáticas pela resolução do sistema de equações reduzidas de compatibilidade

$$\underbrace{U_{i0} + U_{i\theta} + U_{iR} + \sum_j F_{ij} X_j}_{U_i} = \hat{U}_i \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

Resolução estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços

Análise de estruturas reticuladas hiperestáticas pelo método dos esforços



$$\underbrace{U_{i0} + U_{i\theta} + U_{iR}}_{U_i} + \sum_j F_{ij} X_j = \hat{U}_i \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

$$U_{i0} = \int_{estr} \frac{M_i M_0}{EI} ds + \int_{estr} \frac{N_i N_0}{EA} ds + \int_{estr} \frac{T_i T_0}{GI_T} ds + \sum_{\ell} \frac{S_{\ell} S_{\ell 0}}{k_{\ell}}$$

$$U_{i\theta} = \int_{estr} M_i \frac{\alpha \Delta \theta}{h} ds + \int_{estr} N_i \alpha \Delta \theta_0 ds$$

$$U_{iR} = - \sum_k R_{ki} \hat{D}_k$$

$$F_{ij} = \int_{estr} \frac{M_i M_j}{EI} ds + \int_{estr} \frac{N_i N_j}{EA} ds + \int_{estr} \frac{T_i T_j}{GI_T} ds + \sum_{\ell} \frac{S_{\ell i} S_{\ell j}}{k_{\ell}}$$

$$\int_{estr} \frac{M_i M_0}{EI} ds = \int_{estr} \frac{M_{y_i} M_{y_0}}{EI_y} ds + \int_{estr} \frac{M_{z_i} M_{z_0}}{EI_z} ds$$