Física Experimental IV

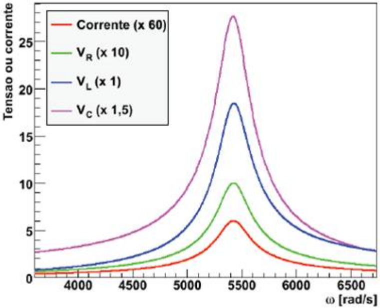
Segundo semestre de 2016

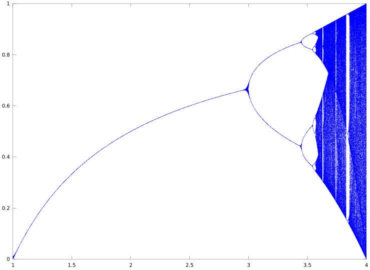
Aula 3 - Experimento I - semana 3

Página da disciplina:
http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=23399

23 de agosto de 2016

Experimento I - Circuitos elétricos de corrente alternada





Sumário

1. Experimento
   - Experimento I
   - Efeitos não lineares em um circuito RLD
   - Atividades da semana III
2. Covariância - episódio 2 - Mapa de χ^2

Sumário

1. Experimento
   - Experimento I
   - Efeitos não lineares em um circuito RLD
   - Atividades da semana III

2. Covariância - episódio 2 - Mapa de χ^2

Sumário

1. Experimento
   - Experimento I
   - Efeitos não lineares em um circuito RLD
   - Atividades da semana III
2. Covariância - episódio 2 - Mapa de χ^2

Objetivos do experimento

- Estudar circuitos elétricos de corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
  - Estudar ressonância em um circuito RLC
  - Introdução ao caos e sistemas caóticos - mapa logístico
  - Estudar caos em um circuito RLD

Cronograma

- 4 semanas
  - Semana 1
    - Ressonância em um circuito RLC
  - Semana 2
    - Caos - mapa logístico
  - Semana 3
    - Caos em um circuito RLD
  - Semana 4
    - Implementação

IMPORTANTE!

- Síntese da semana (até 1 ponto)
  - Arquivo em PDF com os gráficos das curvas obtidas, ajustes realizados e eventuais comentários
  - A data máxima para upload é 18h00 da segunda-feira
    - Upload no site de reservas como "síntese"
- Muitas atividades são feitas através da comparação dos resultados de toda a turma
- Banco de dados no site da disciplina (até 1 ponto)
  - Grupos DEVEM fazer upload de resultados no site
  - A data máxima para upload é 18h00 da última segunda-feira do experimento

Sumário

1 Experimento

- Experimento I
- Efeitos não lineares em um circuito RLD
- Atividades da semana III

2 Covariância - episódio 2 - Mapa de χ^2

Efeitos não lineares

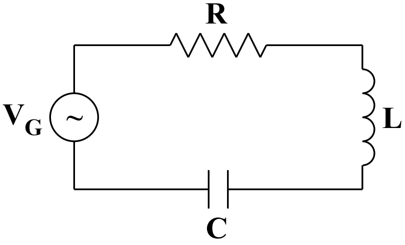
- Será que a introdução de efeitos não lineares no circuito RLC mudará o comportamento observado?
- Existe algum fenômeno físico interessante e novo que pode ser explorado?

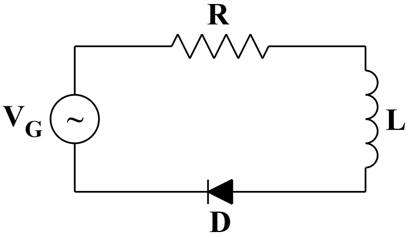
Efeitos não lineares

- Será que a introdução de efeitos não lineares no circuito RLC mudará o comportamento observado?
- Existe algum fenômeno físico interessante e novo que pode ser explorado?
- Resposta: SIM!
  - Nas próximas semanas estudaremos o que acontece ao trocarmos o capacitor do circuito por um diodo
    - Diodo $\rightarrow$ capacitor não linear
  - A dinâmica muda totalmente $\rightarrow$ Caos

Circuito RLD

- Estudar efeitos não lineares em um circuito RLD





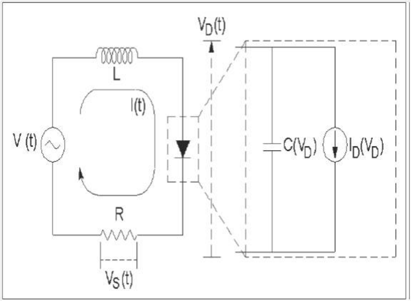
Caos: circuito RLD

- A dinâmica desse sistema passa a ser caótica:
  - Isso não quer dizer que o comportamento do sistema seja aleatório
  - O sistema tem equações que o descrevem e elas são bem determinadas
  - Dependendo de certos parâmetros, os chamados parâmetros de controle
    - o sistema pode apresentar um comportamento previsível
    - essa previsibilidade é limitada e depende dos parâmetros de controle
    - o sistema pode chegar a uma condição em que seu comportamento é, de fato, caótico
- Sistemas caóticos seguem um caminho partindo de um comportamento próximo do linear para um comportamento completamente aleatório, ou caos
- No caso de um circuito RLD forçado, tanto a **frequência** quanto a **amplitude da tensão** aplicada são parâmetros de controle

- O diodo pode ser modelado como um capacitor não linear de capacitância

$$C(V_D) = C_0\, e^{\frac{eV_D}{kT}} \quad \text{para} \quad V_D > 0$$

$$C(V_D) = \frac{C_0}{\sqrt{1 - e^{\frac{eV_D}{kT}}}} \quad \text{para} \quad V_D \leq 0$$

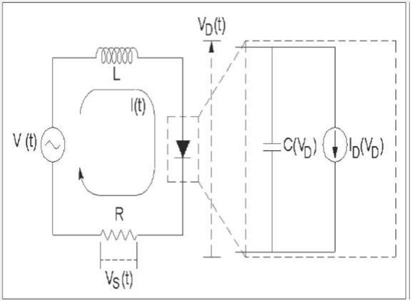


Modelagem do circuito RLD

- Capacitância do diodo depende da tensão sobre ele

$$C(V_D) = C_0\, e^{\frac{eV_D}{kT}} \quad \text{para} \quad V_D > 0$$

$$C(V_D) = \frac{C_0}{\sqrt{1 - e^{\frac{eV_D}{kT}}}} \quad \text{para} \quad V_D \leq 0$$



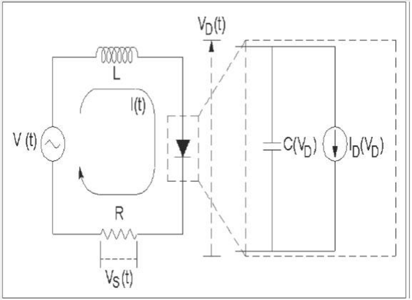
- Para baixas tensões $e^{\frac{eV_D}{kT}} \ll 1$, a capacitância vale $C(V_D) \sim C_0$, ou seja, o diodo se comporta como um capacitor ideal

Modelagem do circuito RLD

- Capacitância do diodo depende da tensão sobre ele

$$C(V_D) = C_0\, e^{\frac{eV_D}{kT}} \quad \text{para} \quad V_D > 0$$

$$C(V_D) = \frac{C_0}{\sqrt{1 - e^{\frac{eV_D}{kT}}}} \quad \text{para} \quad V_D \leq 0$$



- Para tensões mais elevadas, a capacitância depende fortemente da tensão sobre o diodo e a capacitância deixa de ser constante

Caos: circuito RLD

- Resumindo
  - Para baixas tensões o circuito **RLD** se comporta como um circuito **RLC** linear como o estudado anteriormente
  - Para tensões suficientemente elevadas o circuito apresenta comportamento não linear podendo chegar ao caos
- Vamos estudar os dois casos
  - Baixas tensões $V_G \sim 50 - 70$ mV
  - Altas tensões $V_G \sim 3 - 4$ V

Sumário

1. Experimento
   - Experimento I
   - Efeitos não lineares em um circuito RLD
   - Atividades da semana III
2. Covariância - episódio 2 - Mapa de χ^2

Objetivos da semana

- Investigar o circuito RLD no limite de baixas tensões
  - Determinar o valor da capacitância do diodo
- Investigar o circuito RLD no limite de altas tensões
  - Obter o diagrama de bifurcações e o número de Feigenbaum

Atividades pré-lab

- Verificar no roteiro do experimento no site
- OS GRUPOS somente poderão usar o laboratório após apresentar esta atividade resolvida

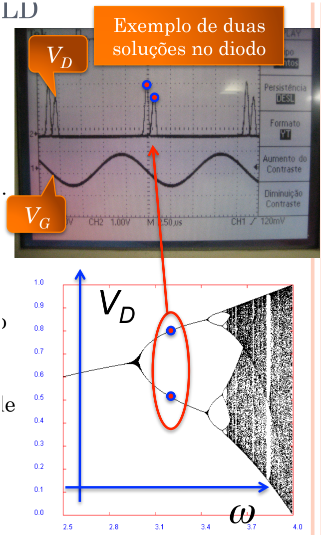
Atividades da semana

- Estudar o circuito RLD no limite de baixas tensões (50 - 70 mV)
  - O circuito deve se comportar como um circuito RLC
  - Determinar a frequência de ressonância do circuito
    - Comparar o valor obtido com a frequência de ressonância do circuito RLC na primeira semana do experimento e com o valor obtido no pré-lab
  - Determinar o valor da capacitância do diodo

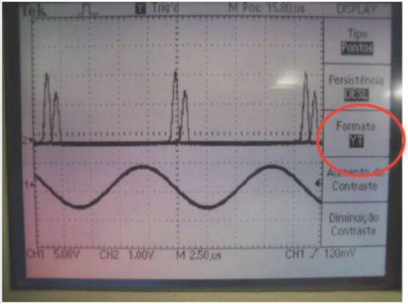
Atividades da semana

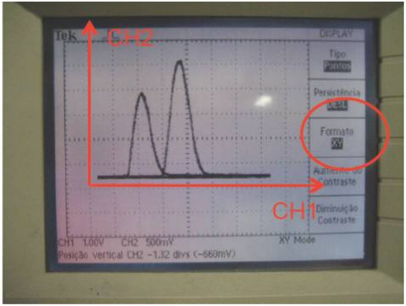
- Estudar o circuito RLD no limite de altas tensões
  - Ajuste a frequência de alimentação para ~ 100 kHz (a frequência mais adequada está indicada no gerador).
  - Obter o diagrama de bifurcação para o circuito.
    - Fazer o gráfico de V_D em função de V_G (tensão de alimentação do circuito)
    - Medir com cuidado, e vários pontos, principalmente quando estiver próximo de uma bifurcação.
    - Com cuidado, em alguns casos, é possível de se observar até 16 bifurcações.
  - Determine o número de Feigenbaum.

Algumas dicas



Algumas dicas - Modos $x - t$ e $y - x$





Sumário

1 Experimento
- Experimento I
- Efeitos não lineares em um circuito RLD
- Atividades da semana III

2 Covariância - episódio 2 - Mapa de χ^2

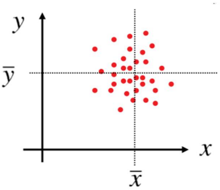
Matriz de covariância

- Fórmula geral de propagação de incertezas pode ser escrita em uma forma matricial do tipo

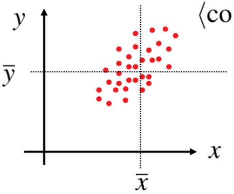
$$\sigma_y^2 = \Gamma^T \Sigma \Gamma$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \dots \\ \partial_{x_n} \end{pmatrix} \text{ com } \partial_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \mathrm{cov}_{12} & \cdots & \mathrm{cov}_{1n} \\ \mathrm{cov}_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \mathrm{cov}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}_{n1} & \mathrm{cov}_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

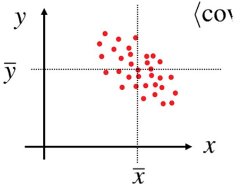
Σ é chamada de matriz de covariância



$$\mathrm{cov}_{xy} = 0$$



$$\mathrm{cov}_{xy} > 0$$

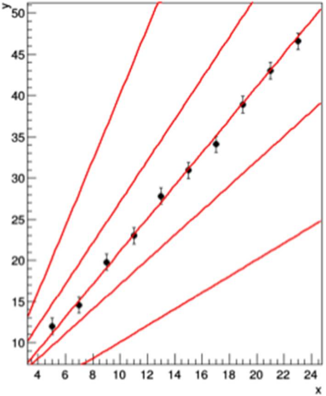


$$\mathrm{cov}_{xy} < 0$$

$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{cov}_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad -1 \leqslant \rho_{xy} \leqslant 1$$

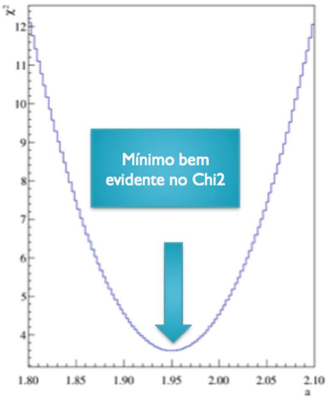
Mapa de χ^2

- Método dos mínimos quadrados
- Maximizar a probabilidade da função descrever os dados = minimizar o χ^2

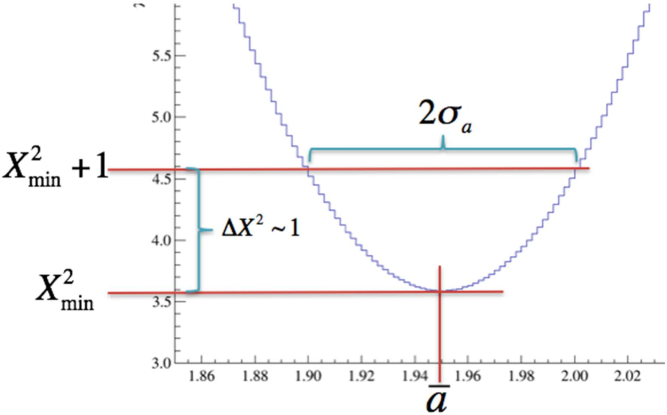


Mapa de χ^2

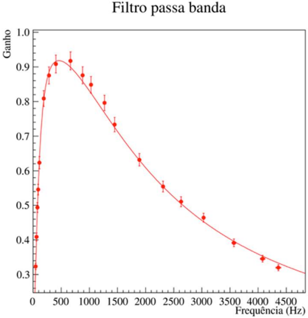
- Método dos mínimos quadrados
- Maximizar a probabilidade da função descrever os dados = minimizar o χ^2



Incerteza no parâmetro ajustado



Mapa de χ^2 2D



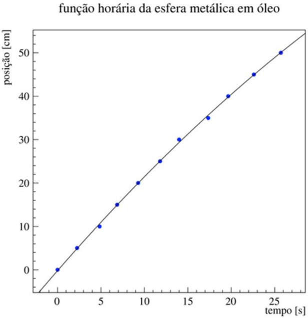
Resultados do ajuste

Número de parâmetros	2
Chi^2	8.48087
Número de graus de liberdade	18

parâmetro	Valor	Incerteza
0	137.519	2.29791
1	1541	20.2911

Matriz de covariância

$$\begin{bmatrix} 5.28038 & 0.814965 \\ 0.814965 & 411.73 \end{bmatrix}$$



Resultados do ajuste

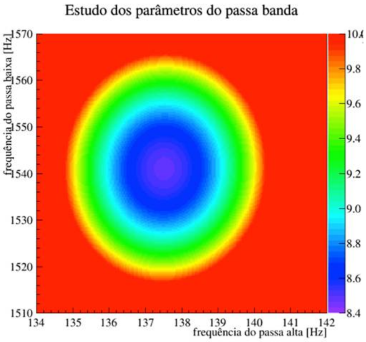
Número de parâmetros	3
Chi^2	6.77906
Número de graus de liberdade	8

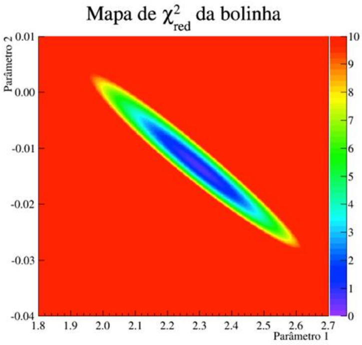
parâmetro	Valor	Incerteza
0	-0.216646	0.362052
1	2.29752	0.062854
2	-0.0133085	0.00228345

Matriz de covariância

$$\begin{bmatrix} 0.131082 & -0.0190145 & 0.000579051 \\ -0.0190145 & 0.00395063 & -0.000138616 \\ 0.000579051 & -0.000138616 & 5.21416E-06 \end{bmatrix}$$

Mapa de χ^2





$$\rho_{01} = \frac{\mathrm{cov}_{01}}{\sigma_0 \sigma_1} = 0.02 \qquad \rho_{12} = \frac{\mathrm{cov}_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = -0.96$$

- Como extrair a covariância ou correlação entre dois parâmetros do mapa de χ^2?

Estudando o mapa de χ^2

- Vamos começar com duas grandezas gaussianas, independentes entre si, cada uma com uma variância conhecida. A probabilidade de obtermos, simultaneamente, um determinado valor de a e b é:

$$P(a,b) = P(a)P(b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{a-\mu_a}{\sigma_a}\right)^2\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{b-\mu_b}{\sigma_b}\right)^2\right]$$

$$P(a,b) = P(a)P(b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a-\mu_a}{\sigma_a}\right)^2+\left(\frac{b-\mu_b}{\sigma_b}\right)^2\right]\right\}$$

Estudando o mapa de χ^2

$$P(a,b) = P(a)P(b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a-\mu_a}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{b-\mu_b}{\sigma_b}\right)^2\right]\right\}$$

$$P(a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b} \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2\right)$$

- A probabilidade é máxima quando o χ^2 é mínimo

Os contornos do mapa de χ^2

- Limites no mapa de χ^2

$$1\sigma \rightarrow \chi^2 = \chi^2_{min} + 1$$

$$2\sigma \rightarrow \chi^2 = \chi^2_{min} + 4$$

- Podemos desenhar estas linhas

Mapa para duas grandezas independentes

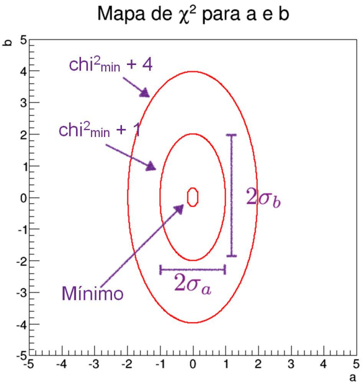
- Assumindo valor médio zero para ambas e

$$\sigma_a = 1$$

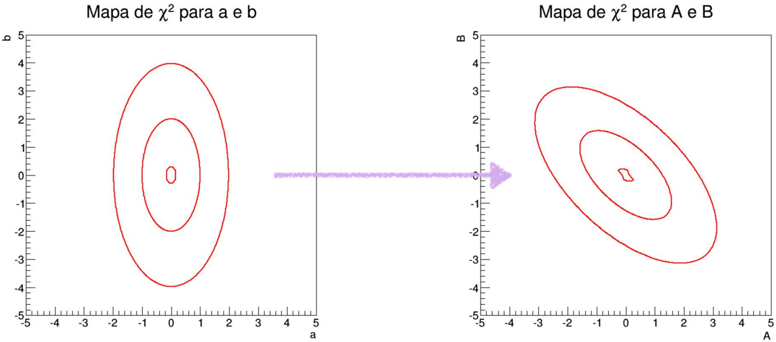
$$\sigma_b = 2$$

- Contornos em 1 e 2 sigmas

$$P(a, b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b} \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2\right)$$

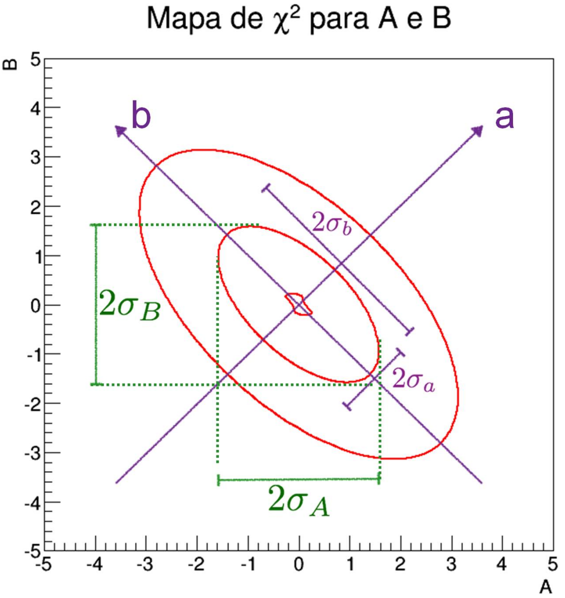


Introduzir covariância significa girar estas elipses



$$a, b \rightarrow A, B$$

Relação de A, B com a, b



Muito bem...

- Como eu matematizo esta rotação?
- Como eu extraio as relações entre as incertezas e as covariâncias?

Girando uma elipse

- Rotação de um ângulo teta

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta \\ -\mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Simplificando a notação

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$A = ca + sb$$

$$B = -sa + cb$$

Calculando a covariância entre A e B

- Calculando a covariância

$$\mathrm{cov}_{AB} = \langle (A - \mu_A)(B - \mu_B) \rangle = \langle AB \rangle$$

$$\mathrm{cov}_{AB} = \langle (ca + sb)(-sa + cb) \rangle$$

$$\mathrm{cov}_{AB} = \left\langle scb^2 - sca^2 + (c^2 - s^2)ab \right\rangle$$

- Como a e b são independentes

$$\mathrm{cov}_{AB} = sc\left(\sigma_b^2 - \sigma_a^2\right)$$

Calculando a covariância entre A e B

- Escrevendo a covariância em termos do coeficiente de correlação

$$\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = sc\left(\sigma_b^2 - \sigma_a^2\right)$$

- Como eliminar a dependência com o ângulo?
  - Podemos calcular as variâncias de A e B

Calculando variâncias

- Da definição

$$\sigma_A^2 = \left\langle (A - \mu_A)^2 \right\rangle = \left\langle A^2 \right\rangle$$

$$\sigma_A^2 = \left\langle (ca + sb)^2 \right\rangle$$

$$\sigma_A^2 = \left\langle c^2 a^2 + s^2 b^2 + 2csab \right\rangle$$

- Como a e b não possuem covariância

$$\sigma_A^2 = c^2 \sigma_a^2 + s^2 \sigma_b^2$$

- Similarmente para B

$$\sigma_B^2 = s^2 \sigma_a^2 + c^2 \sigma_b^2$$

Sendo assim

- Calculando o produto das variâncias

$$\sigma_A^2\sigma_B^2 = s^2c^2(\sigma_a^4 + \sigma_b^4) + (c^4 + s^4)\sigma_a^2\sigma_b^2$$

- Comparando ao quadrado de

$$\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = sc\left(\sigma_b^2 - \sigma_a^2\right)$$

- Com pouca álgebra, chega-se a

$$\rho_{AB}^2 = 1 - \left(\frac{\sigma_a\sigma_b}{\sigma_A\sigma_B}\right)^2$$

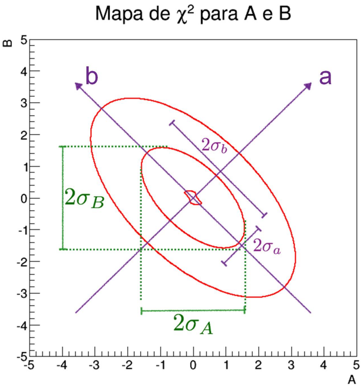
Em resumo...

$$A = ca + sb \quad \text{e} \quad B = -sa + cb$$

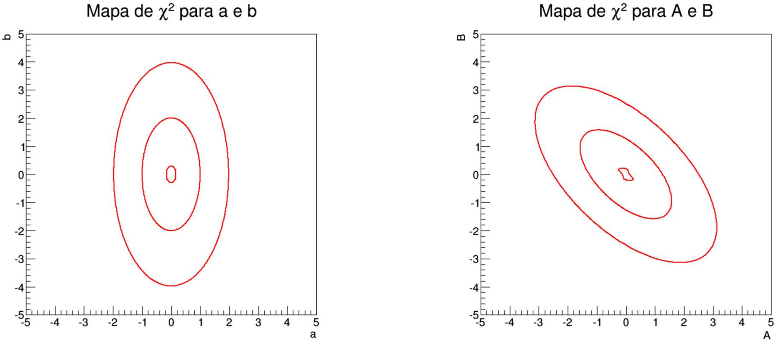
$$\sigma_A^2 = c^2\sigma_a^2 + s^2\sigma_b^2$$

$$\sigma_B^2 = s^2\sigma_a^2 + c^2\sigma_b^2$$

$$\rho_{AB}^2 = 1 - \left(\frac{\sigma_a\sigma_b}{\sigma_A\sigma_B}\right)^2$$



Como descrever as curvas de chi2 com covariância?



$$P(a,b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sigma_b}\right)^2\right]\right\} \qquad P(A,B) = ?$$

Descrevendo $P(A, B)$

- Começamos escrevendo a e b em função de A e B

$$a = cA - sB \quad \text{e} \quad b = sA + cB$$

- Substituímos em

$$P(a, b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sigma_b}\right)^2\right]\right\}$$

- É necessário que (MOSTRE ISTO)

$$P(a, b)\, da\, db = P(A, B)\, dA\, dB$$

Descrevendo $P(A, B)$

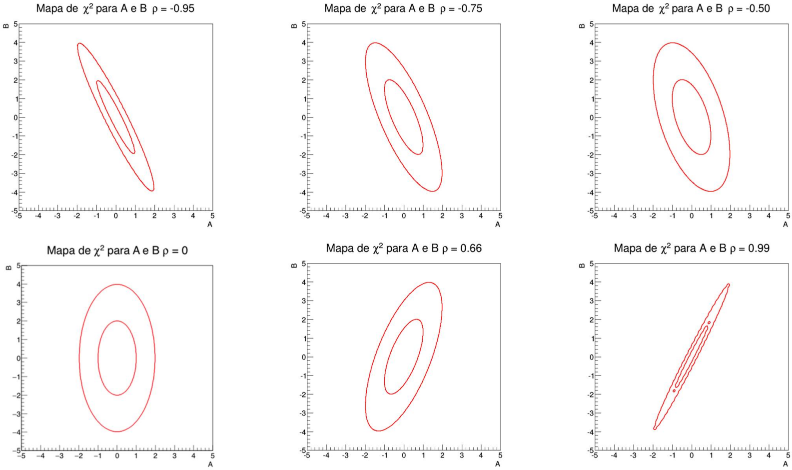
- Com um pouco de álgebra e substituindo as relações necessárias entre as variâncias de a, b e A, B

$$P(A,B) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_A\sigma_B} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\rho^2}\right)\left[\left(\frac{A}{\sigma_A}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sigma_B}\right)^2 - \frac{2\rho AB}{\sigma_A\sigma_B}\right]\right\}$$

- Note que, se a correlação for nula ($\rho = 0$), voltamos à expressão para duas grandezas independentes

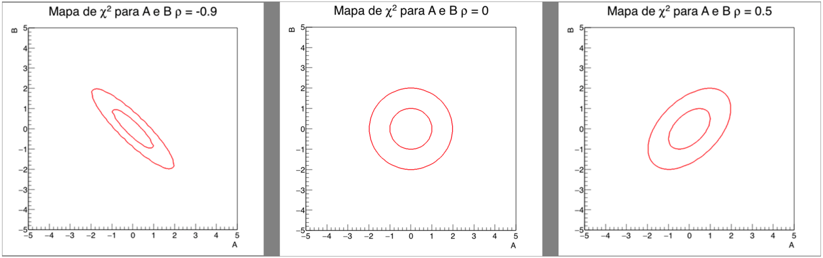
Algumas curvas

$$\sigma_A = 1 \text{ e } \sigma_B = 2$$



Algumas curvas

$$\sigma_A = \sigma_B = 1$$



- Incertezas iguais não significa falta de correlação $\Rightarrow$ preste atenção nisto

Alguns comentários

- Introduzir correlações entre duas grandezas significa "girar" uma curva de χ^2
  - Sempre podemos redefinir variáveis de modo a eliminar correlações entre elas
- Do mapa de χ^2 é possível extrair a correlação entre duas grandezas "geometricamente"