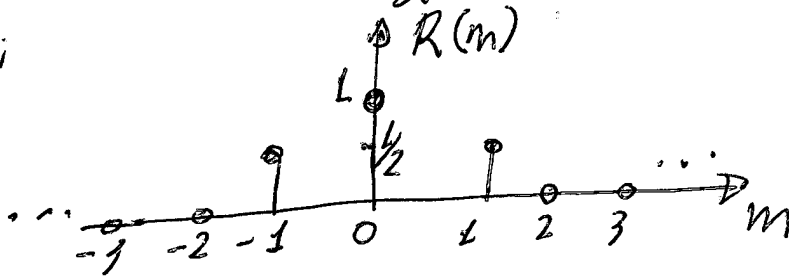


Verificação das propriedades de ruído
função de autocorrelação de sinal que
assume valores reais no tempo

Seja a ruído função

$$R(m) = \frac{1}{2} f(m+1) + f(m) + \frac{1}{2} f(m-1)$$

Solução:



i) Simetria ou paridade par

$$R(-m) = R(m), \forall m \in \mathbb{Z}?$$

$$R(-1) = R(1) = \frac{1}{2}$$

$$R(-2) = R(2) = 0$$

$\vdots$

ii) Não-negatividade $\rightarrow$ Verdadeira

ii.1) Pico em $m=0$

$$R(0) > |R(m)|, \forall m \in \mathbb{Z}?$$

$$R(0) \geq R(1)$$

pois

$$1 > \frac{1}{2}$$

$$R(0) > R(2)$$

$$1 > 0$$

Já verificamos que a função é par em i) $\rightarrow$ dispensa
verificar $m < 0$.

ex. 2) Definitividade não-negativa
ou semidefinitividade positiva
(Não-negatividade completa)

A dep da função suportada de autocorrelação é
não-negativa?

Isto é,

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m) e^{-j\omega m} \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}?$$

Calculamos

$$\begin{aligned} S(e^{j\omega}) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R(m) e^{-j\omega m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \delta(m+1) + \delta(m) + \frac{1}{2} \delta(m-1) \right) e^{-j\omega m} \\ &= \frac{1}{2} e^{j\omega} + 1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega} \end{aligned}$$

$$S(e^{j\omega}) = 1 + \cos \omega \leftarrow \text{é real, i.e., } S(e^{j\omega}) \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

$$1 + \cos \omega \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}?$$

$$\cos \omega \geq -1, \forall \omega \in \mathbb{R} \text{? Sim.}$$

Portanto

$$S(e^{j\omega}) \geq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$$

A função dada pode ser função de autocorrelação (fac)
de sinal que assume valores reais no domínio do
tempo.

Agora vamos resolver o sistema de equações normais
de ordem $p=2$ com a fac dada. O sistema é

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} R(0) & R(1) \\ R(1) & R(0) \end{bmatrix}}_R \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}_a &= - \underbrace{\begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \end{bmatrix}}_r \\ \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvemos

$$\det(R) = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \det(R) = \frac{3}{4}$$

$$a_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det(R)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \rightarrow a_1 = -\frac{2}{3}$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}}{\det(R)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \rightarrow a_2 = \frac{1}{3}$$

O filtro inverso ou filtro de análise de ordem $p=2$ é

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \\ &= 1 + \left(-\frac{2}{3}\right) z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2} \end{aligned}$$

e o filtro de síntese é

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3} z^{-1} + \frac{1}{3} z^{-2}}$$

cujos polos são as raízes de $A(z)$: p_1 e p_2

$$p_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} j \rightarrow |p_{1,2}|^2 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3} < 1$$

Portanto, o sistema causal $H(z)$ é estável. (Verdadeira)

Ainda podemos verificar que o erro quadrático $\mathcal{E}$ é não-negativo:

$$\mathcal{E} = R(0) + a_1 R(1) + a_2 R(2)$$

$$= 1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0$$

$$= 1 - \frac{1}{3}$$

$$\mathcal{E} = \frac{2}{3} \geq 0 \quad (\text{Verdadeira})$$