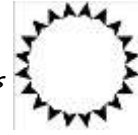




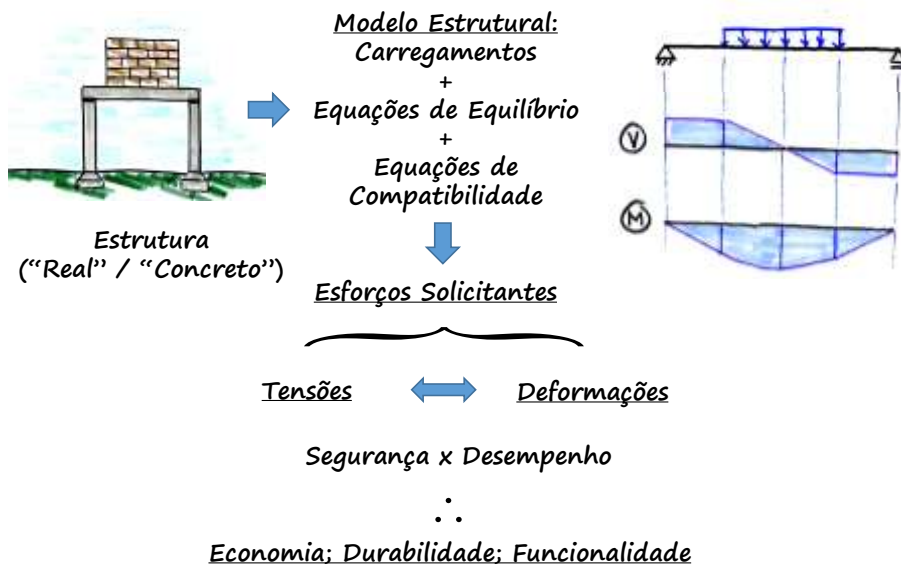
PEF2602  
Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



## *Resistência, Estabilidade, Segurança, Verificação, Dimensionamento*

*Professores*  
*Ruy Marcelo O. Pauletti & Leila Meneghetti Valverdes*  
*2º Semestre 2016*

### *O Processo de Análise Estrutural*



## Problemas Básicos do Projeto e da Análise das Estruturas

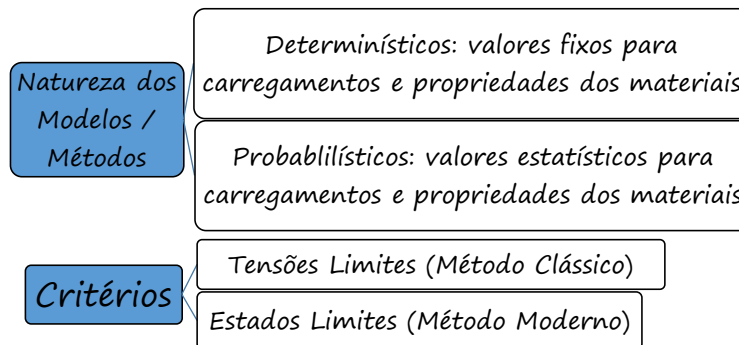
### 1) DIMENSIONAMENTO (Problema Direto):

Determinar os materiais e as dimensões para atender a critérios de projeto;

### 2) VERIFICAÇÃO (Problema Inverso):

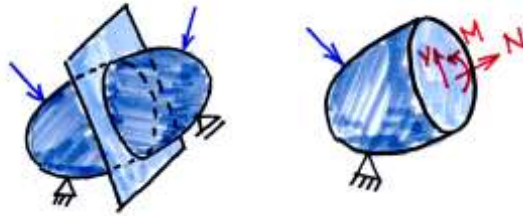
Verificar se uma dada estrutura atende aos critérios de projeto.

## Métodos de Cálculo



- Atualmente, as normas foverecem a combinação de critérios baseados em estados limites e métodos probabilísticos;
- Para uma primeira exposição simplificada do assunto, em PEF2602 adotam-se critérios clássicos e métodos determinísticos;
- PEF2604 aprofunda o assunto!

## Esforços Solicitantes (vistos em PEF2601):

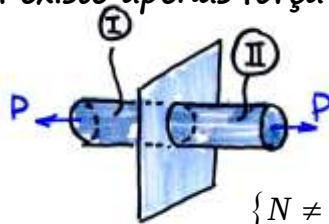


### Problema:

Conhecidos os Esforços Solicitantes  $\{N, V, M\}$ , ao longo da estrutura, como determinar sua segurança?

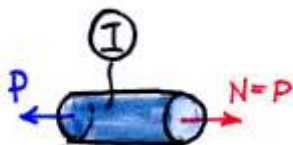
## Tração / Compressão

Consideramos inicialmente o caso da barra tracionada, para o qual existe apenas força normal  $N$



$$\{N \neq 0 ; V = 0 ; M = 0\}$$

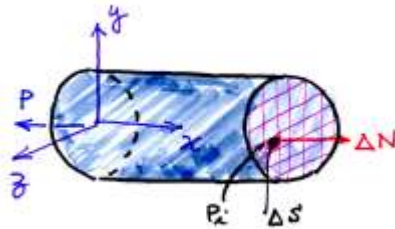
O equilíbrio da parte I da barra fornece:



$$N = P$$

$$\begin{cases} N > 0 & \therefore \text{Tração} \\ N < 0 & \therefore \text{Compressão} \end{cases}$$

## Tensão Normal



Área da Seção Transversal:

$$A = \int_S ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta S_i$$

Força Normal:

$$N = \int_S dN = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta N_i$$

Define-se a Tensão Normal no ponto  $P_i$ :  $\sigma_x = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\Delta N_i}{\Delta S_i} = \frac{dN}{dS}$

$$\therefore dN = \sigma_x dS \quad \therefore N = \int_S \sigma_x dS$$

## Tensão Normal

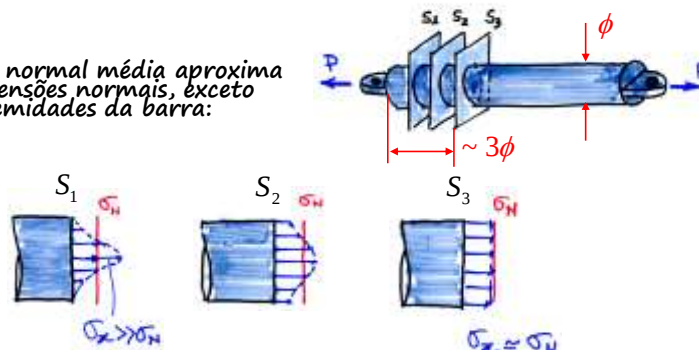
Admitindo uma distribuição uniforme de tensões:  $\sigma_x = \sigma_N$

$$N = \int_S \sigma_x dS = \int_S \sigma_N dS = \sigma_N \int_S dS = \sigma_N A$$

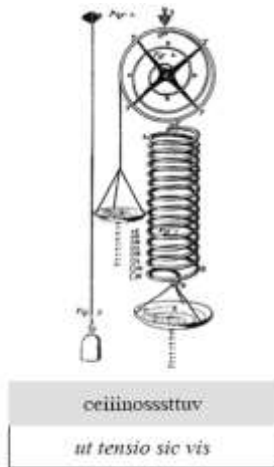
Onde se define a tensão normal média

$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

A tensão normal média aproxima bem as tensões normais, exceto nas extremidades da barra:



'Ut tensio, sic vis' ('como a deformação, assim a força')



To fill the vacancy of the ensuing page, I have here added a dedication of the contents of the Inventions I intend to publish, though possibly not in the same order; but as I can get opportunity and leisure; most of which, I hope, will be as useful to Mankind, as they are yet unknown and new.

1. A way of Regulating all sorts of Watches or Time-keepers, so as to make any way to equalize, if not exacted the Pendulum-Clocks more just.

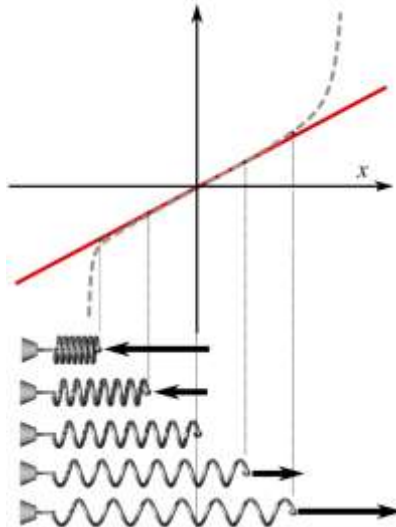
2. The true Mathematical and Mechanical form of all manner of Arches for Building, with the true buttment necessary to each of them. A Problem which no Architectonick Writer hath ever yet attempted, much less performed. abccc  
deeeeee fgg iiiiilllmmmmnnnnnoopprr sssstttttuuuuuuuuuuuu.

3. The true Theory of Elasticity or Spring-locks, and a particular Explication thereof in several Subjects to which it is to be found: And the way of ascertaining the velocity of Bodies moved by them. ceiiinossttuv. ut vis, sic tensio.

4. A very plain and practical way of constructing Logarithms, of great use in Hydrostatics. Discovered.

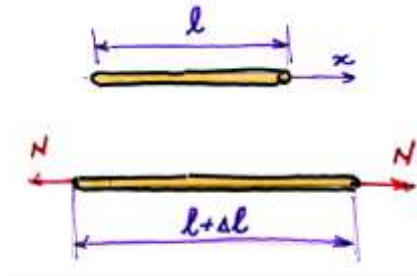
5. A new sort of Object-Glasses for Telescopes and Microscopes, much exceeding any yet used. Discovered.

Robert Hooke (1635–1703), *Lectiones Cutlerianæ, or A collection of lectures: physical, mechanical, geographical, & astronomical*. London: Printed for John Martyn, 1679.



By Svjo - Own work, CC BY-SA 3.0,  
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=25795521>

## Deformação:



Deformação Longitudinal  $\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}$  (adimensional!)

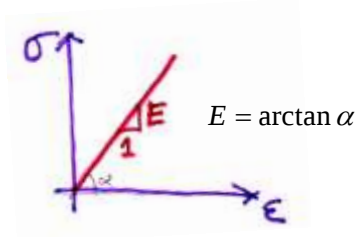
## Lei de Hooke

Para cada material, existe uma proporcionalidade entre a deformação longitudinal  $\varepsilon_x$  e a tensão normal  $\sigma_x$ :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

$E$  : Módulo de Elasticidade do Material

(Dimensão: N/m<sup>2</sup>)



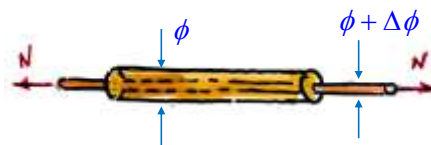
## Módulo de Elasticidade

| Material | E (GPa) | $\nu$ |
|----------|---------|-------|
| Aço      | 210     | 0,3   |
| Alumínio | 70      | 0,25  |
| Concreto | 25      | 0,15  |
| Madeira  | 10      | ?     |
| Nylon    | ~2      | 0,42  |

$\nu$  : coeficiente de Poisson

(relaciona a deformação longitudinal com a deformação transversal)

## Deformação Transversal



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_t = \frac{\Delta \phi}{\phi}}$$

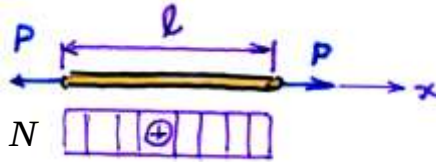
$$\Delta \phi < 0 \quad \therefore \quad \varepsilon_t < 0$$

Verifica-se experimentalmente que

$$\boxed{\varepsilon_t = -\nu \varepsilon_x}$$

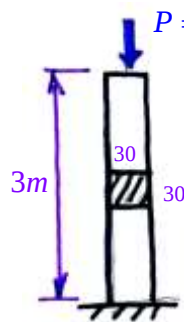
## Barra prismática sujeita à tração / compressão simples:

Conhecidos o material e as dimensões de uma barra prismática, é possível prever o seu alongamento (ou encurtamento) quando submetida a uma tração uniforme:



$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (\text{experimental}) \\ \varepsilon_x = \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad (\text{definição}) \\ \sigma_x = \frac{N}{A} \quad (\text{definição}) \end{array} \right\} \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\sigma_x}{E} \quad \left\{ \quad \Delta \ell = \frac{N \ell}{EA} \right.$$

Exemplo: calcular o encurtamento do pilar de concreto:



$$P = 90tf$$

$$N = -P = -90tf = -90 \times 10^4 N$$

$$A = 0,3 \times 0,3 = 9 \times 10^{-2} m^2$$

$$E = 25GPa = 25 \times 10^9 \frac{N}{m^2}$$

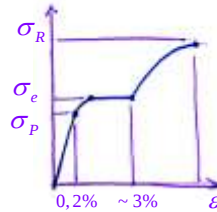
$$\Delta \ell = \frac{N \ell}{EA} = \frac{(-90 \times 10^4 N) \times 3m}{25 \times 10^9 \frac{N}{m^2} \times 9 \times 10^{-2} m^2} = -1,2 \times 10^{-3} m$$

$$\Delta \ell = -1,2 mm$$

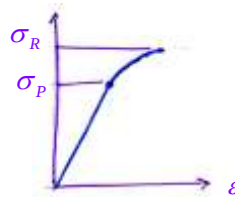
## Ensaio de tração

A Lei de Hooke tem validade restrita a deformações relativamente pequenas:

Material Dútil:  
(por exemplo, aço)

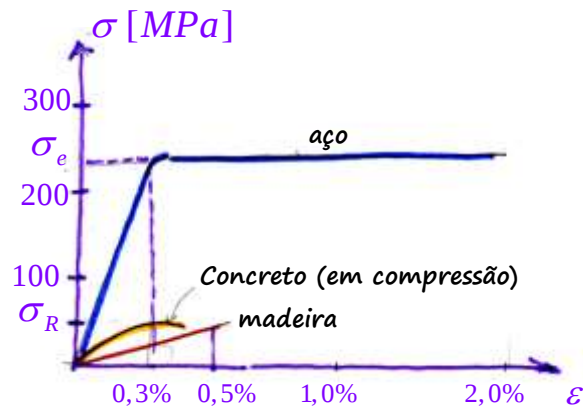


Material Frágil:  
(por exemplo, concreto)



## Ensaio de tração

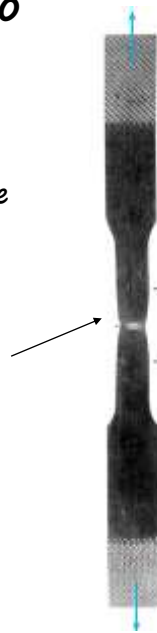
Comparação aço – concreto – madeira:



## Ensaio de tração

Exemplo de um ensaio de tração – aço estrutural.

Região de ruptura



Região de estrição  
C a E do diagrama

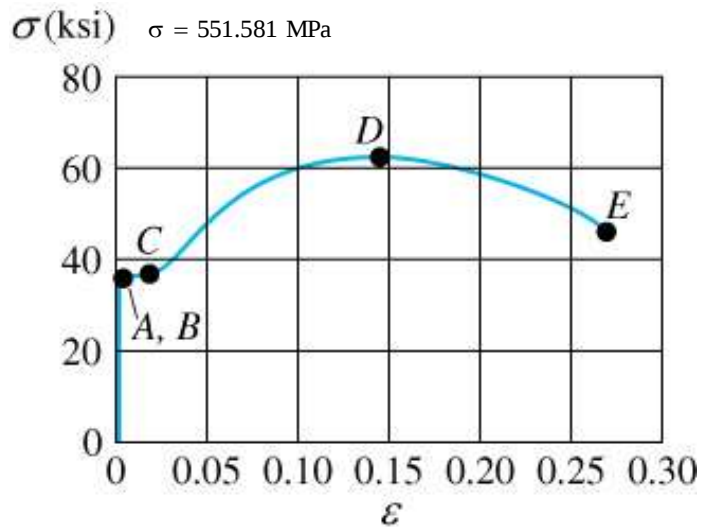


Diagrama tensão-deformação típico de aço estrutural em tração, desenhado em escala

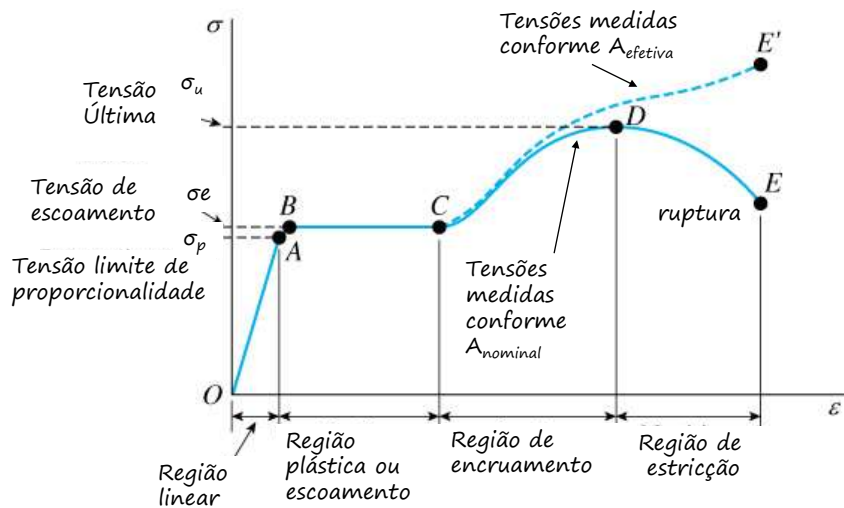


Diagrama tensão-deformação típico do aço estrutural de baixo carbono (ASTM 36) determinado a tração (fora de escala).

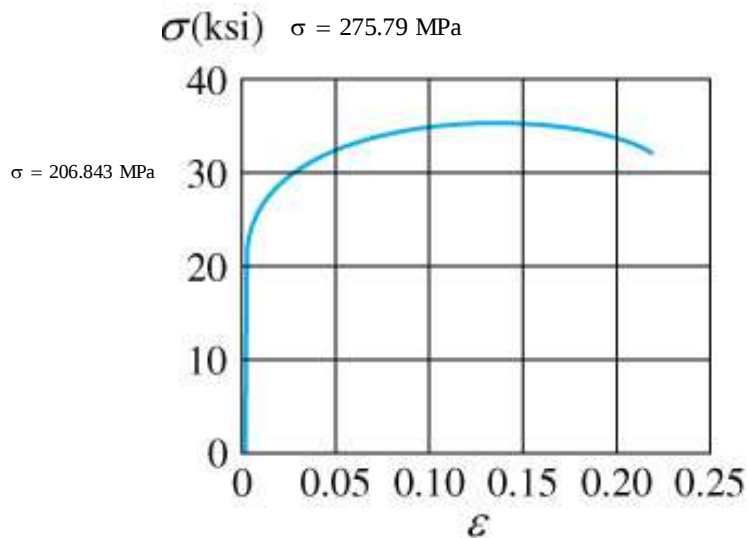
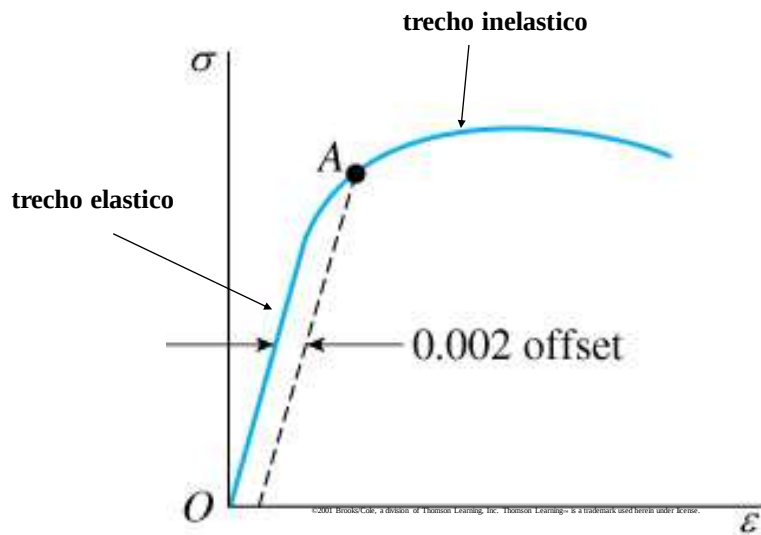
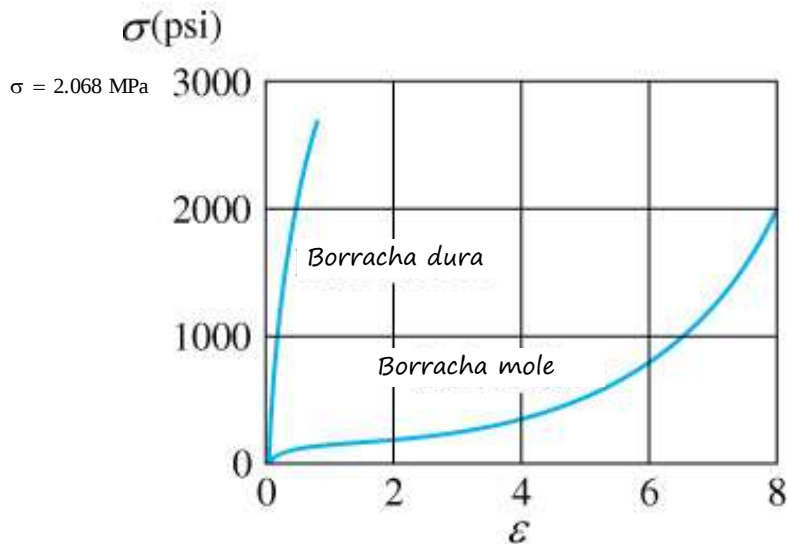


Diagrama tensão-deformação típico para uma liga de alumínio



Determinação da tensão de escoamento  $\sigma_y$  nominal



Diagramas tensão-deformação a tração para dois tipos de borracha

Diagrama tensão-deformação para material frágil, com limite de proporcionalidade elástica em A e ruptura em B (com baixa ductilidade)

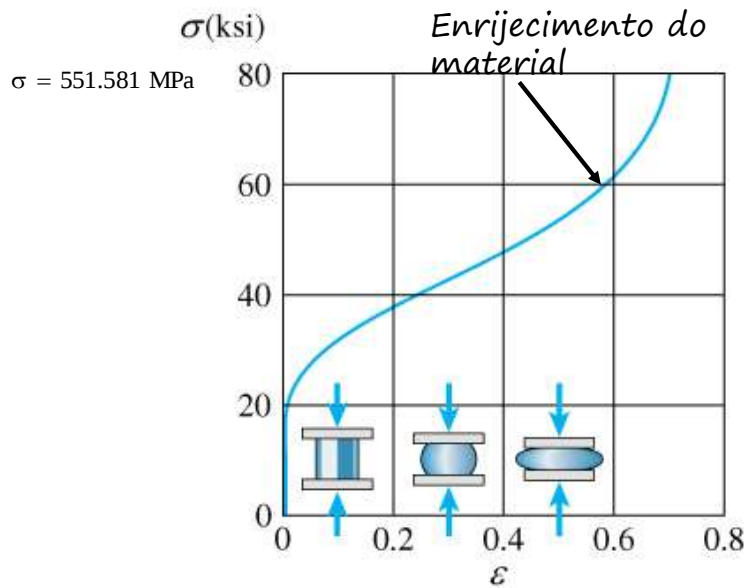
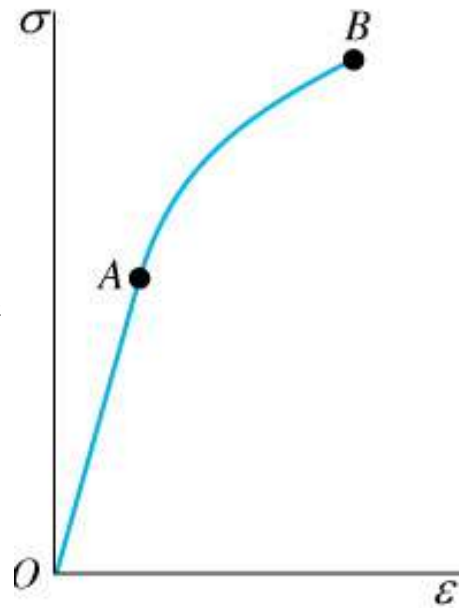
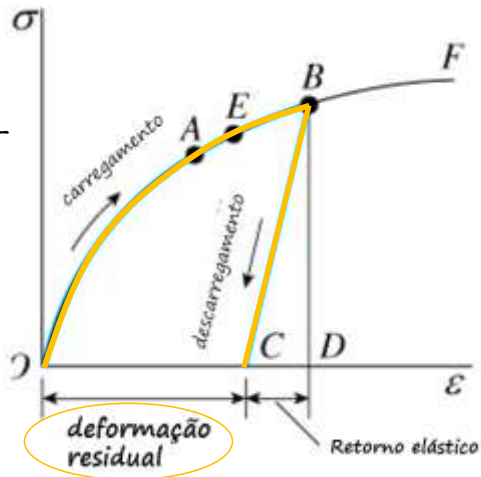


Diagrama tensão-deformação à compressão para o cobre.

## Encruamento

Diagrama tensão-deformação ilustrando um comportamento elastoplástico



## Encruamento

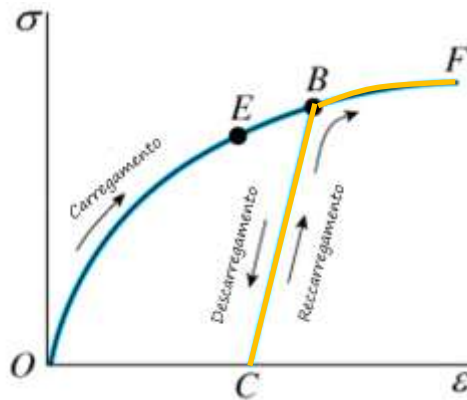


Diagrama tensão-deformação com recarregamento do material para elevação do limite elástico (tensão de escoamento)

## Tensão Limite

A máxima tensão suportada por um material frágil é  $\sigma_R$   
("tensão de ruptura")

Para materiais dúteis, admite-se que a resistência se esgote ao se atingir a tensão de escoamento  $\sigma_e$

Para considerar estes dois tipos de comportamento com um único critério, define-se a tensão limite

$$\sigma_{\text{lim}} = \begin{cases} \sigma_e & (\text{materiais dúteis}) \\ \sigma_R & (\text{materiais frágeis}) \end{cases}$$

## Segurança

Ao se projetar uma estrutura, deve-se prover uma reserva de segurança, isto é, as tensões sobre a estrutura devem ser minoradas, em relação à  $\sigma_{\text{lim}}$ , considerando um fator de segurança  $s > 1$

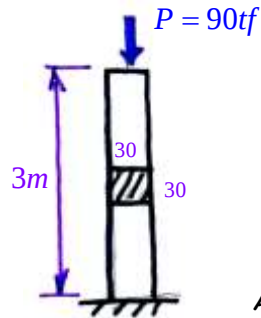
Define-se a tensão admissível  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{s}$

$$\text{Valores típicos} \quad \begin{cases} s = 1,5 & (\text{aço}) \\ s = 2,0 & (\text{concreto}) \end{cases}$$

Deve-se verificar que  $\sigma_{\text{max}} \leq \bar{\sigma}$ , em toda estrutura

Nota: na prática de projeto o assunto é mais elaborado, sendo os coeficientes de segurança divididos entre coeficientes de majoração das cargas e coeficientes de minoração das resistências, e recebem um tratamento probabilístico, como será visto em PEF2604.

Exemplo: Verificar o pilar para  $s=2$ , sendo  $\sigma_R = 15\text{MPa}$   
Redimensionar, se necessário!



$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_R}{s} = \frac{15}{2} = 7,5\text{MPa}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = -\frac{90 \times 10^4}{9 \times 10^{-2}} = -10 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = -10\text{MPa}$$

$$|\sigma_x| < \sigma_R \quad \therefore \text{ não rompe!}$$

$$|\sigma_x| > \bar{\sigma} \quad \therefore \text{ "não passa!"}$$

Área mínima:  $|\sigma_x| = \frac{|N|}{A} \leq \bar{\sigma} \quad \therefore \quad \frac{|N|}{A_{\min}} = \bar{\sigma}$

$$A_{\min} = \frac{|N|}{\bar{\sigma}} = \frac{90 \times 10^4}{7,5 \times 10^6} = 12 \times 10^{-2} \text{m}^2$$

Lado mínimo:  $a_{\min} = \sqrt{A_{\min}} = \sqrt{12 \times 10^{-2}} = 0,346\text{m}$

$a = 35 \text{ cm}$

## Estabilidade do Equilíbrio



Equilíbrio  
Estável



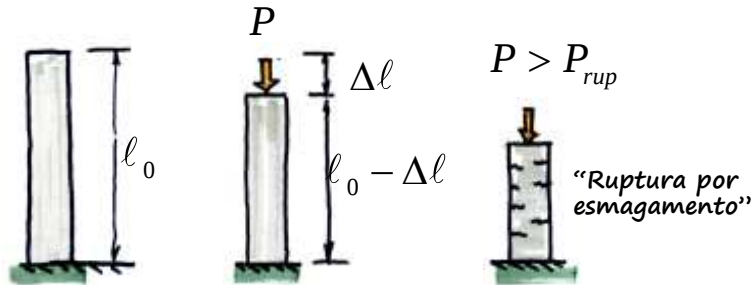
Equilíbrio  
Instável



Equilíbrio  
Indiferente

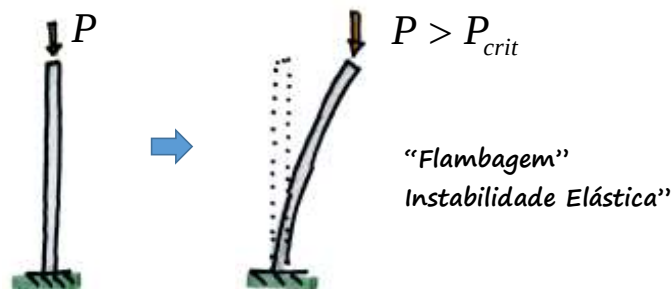
## Instabilidade Elástica (Flambagem)

Pilar Curto:



## Instabilidade Elástica (Flambagem)

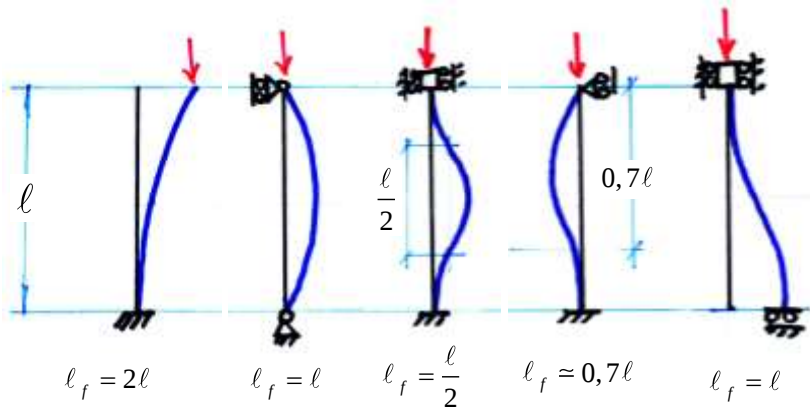
Pilar Esbelto



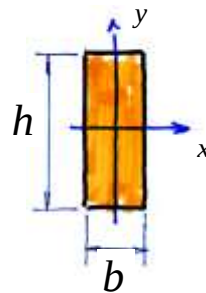
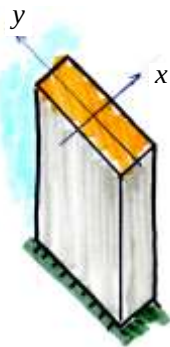
$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{\ell_f^2}$$

"Fórmula de Euler"  
 $\ell_f$ : comprimento de flambagem

$\ell_f$  depende da vinculação:

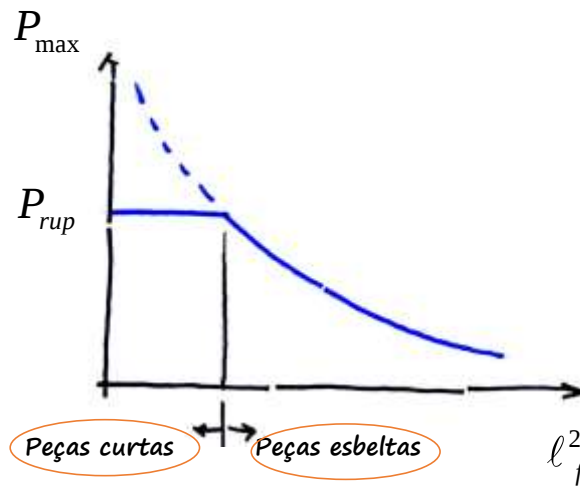


$P_{crit}$  depende do menor momento de inércia da seção transversal ( $I_{min}$ )



$$I_{max} = I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{min} = I_y = \frac{hb^3}{12}$$



Verificação da segurança de barras comprimidas

Duas situações devem ser verificadas:

(1) Ruptura à compressão (“esmagamento”):

$$\sigma_{\max} < \bar{\sigma} \quad \therefore \quad \sigma_{\max} = \frac{P}{A} \leq \frac{\sigma_{\lim}^c}{s}$$

(2) Instabilidade (“flambagem”):

$$P \leq \frac{P_{crit}}{s} = \frac{1}{s} \frac{\pi^2 EI_{\min}}{\ell_f^2}$$

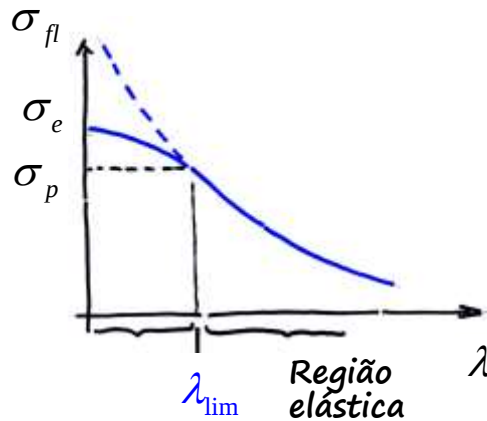
Tensão de Flambagem (ou de Euler):

$$\sigma_{fl} = \frac{P_{crit}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{A \ell_f^2}$$

Raio de giração  $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$

Índice de esbeltez da barra  $\lambda = \frac{\ell_f}{i_{min}}$

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi E}{\lambda^2}$$



$\lambda_{lim}$  separa a região em que a flambagem se dá no regime elástico da região onde a flambagem ocorre no regime elastoplástico

$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

Por exemplo, para um aço com :

$$\sigma_e = 240 \text{ MPa}; \quad E = 210 \text{ GPa}$$

$$\lambda_{\text{lim}} = \pi \sqrt{\frac{210 \times 10^9}{240 \times 10^6}} = 92,93$$

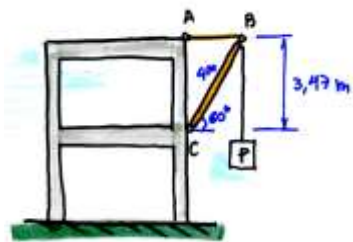
É importante garantir que a esbeltez das peças não seja excessiva, de modo que seja possível aproveitar toda a capacidade resistente dos materiais

Por esta razão, as normas de projeto estabelecem valores máximos de esbeltez.

Por exemplo, para as estruturas metálicas (NBR8800)

$$\lambda \leq 200$$

Exemplo: dimensionar o cabo AB e a barra BC, sendo  $P=12\text{kN}$ .



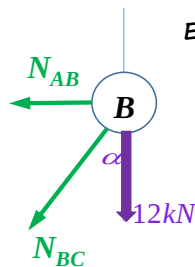
Cabo AB de Seção circular, diâmetro  $\phi$

Barra BC seção quadrada de lado  $a$

Material:  $\sigma_R^t = 40 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_R^c = 40 \text{ MPa}$

$E = 20 \text{ GPa}$

Coeficiente de segurança:  $s=2$



Equilíbrio do nó B:  $\sum_i F_X^i = -N_{AB} - N_{BC} \sin 30^\circ = 0$

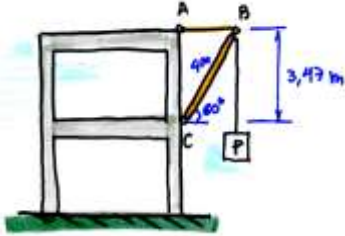
$$\sum_i F_Y^i = -N_{BC} \cos 30^\circ - 12 = 0$$

$$N_{BC} = -\frac{12}{0,866} = -13,8 \text{ kN (compressão!)}$$

$$N_{AB} = -(-13,8 \times 0,5) = +6,9 \text{ kN (tração!)}$$

Exemplo: dimensionar o cabo AB e a barra BC, sendo  $P=12\text{kN}$ .

Dimensionamento:



(1) Cabo AB

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{cabo}} \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_R^t}{s}$$

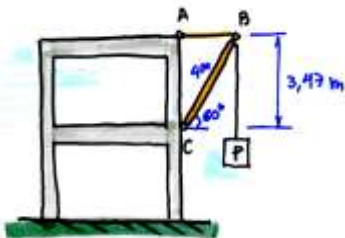
$$\frac{N_{AB}}{\left(\frac{\pi\phi^2}{4}\right)} \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_R^t}{s}$$

$$\phi \geq \sqrt{\frac{4sN_{AB}}{\pi\sigma_R^t}} = \sqrt{\frac{4 \times 2 \times 6,9 \times 10^3}{\pi \times 40 \times 10^6}} = 0,021\text{m}$$

$$\phi \geq 2,1\text{cm}$$

Exemplo: dimensionar o cabo AB e a barra BC, sendo  $P=12\text{kN}$ .

Dimensionamento:



(2) Barra BC  $A = a^2$  ;  $I = \frac{a^4}{12}$

(2.1) Esmagamento

$$\sigma = \frac{|N_{BC}|}{a^2} \leq \frac{\sigma_R^c}{s}$$

$$a \geq \sqrt{\frac{s|N_{BC}|}{\sigma_R^c}} = \sqrt{\frac{2 \times 13,8 \times 10^3}{40 \times 10^6}} = 0,026\text{m}$$

(2.2) Flambagem

$$|N_{AB}| \leq \frac{P_{crit}}{s} = \frac{1}{s} \frac{\pi^2 EI}{\ell_f^2} = \frac{1}{s} \frac{\pi^2 E a^4}{\ell^2 12}$$

$$a \geq \sqrt[4]{\frac{12s\ell^2 |N_{BC}|}{\pi^2 E}} = \sqrt[4]{\frac{12 \times 2 \times 4^2 \times 13,8 \times 10^3}{\pi^2 \times 20 \times 10^9}} = 0,071\text{m} \quad a \geq 7,1\text{cm}$$