P258d Parra, Cecilia
Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas / Cecilia Parra, Irma Saiz... [et. al.]; trad. Juan Acuña Llorens. Porto Alegre : Artes Médicas, 1996.

1. Psicopedagogia – Matemática – Didática. I. Saiz, Irma. II. Título

CDU 37.015.3:510.1

Catalogação na publicação: Mônica Ballejo Canto – CRB 10/1023

ISBN 85-7307-162-1

Cecilia Parra
Irma Saiz
organizadoras

Delia Lerner
Grecia Gálvez
Guy Brousseau
Luis A. Santaló
Patricia Sadovsky
Roland Charnay

DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Reflexões Psicopedagógicas

Hilda Weissmann
(Coordenação do projeto de Didáticas Especiais)

Tradução
Juan Acuña Llorens

Consultoria, supervisão e revisão técnica desta edição:
Maria Celeste Machado Koch
Professora na Faculdade de Educação da UFRGS
Pós-graduada em Aprendizagem pela UNIJUI e GEEMPA

2ª *reimpressão*

ARTMED EDITORA

2001

sa comparação, o professor converter-se-ia em um ator cujo "texto" seria a situação didática por conduzir (evidentemente, não o texto no sentido restrito).

BIBLIOGRAFIA

Artigue, M. (1984): *Contribution à l'étude de la reproductibité des situationes didactiques*, tese de graduação, Universidade de Paris VII.

Brousseau, G. (1986): *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Tese de graduacão, Bordeaux.

Brousseau, G.: "Le contrat didactique: Le milieu", em *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 1990, vol. 9/1, 308-336.

Conne, F. (1990): *Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique*, em preparação.

Chevallard, Y. (1985): "La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné", La *Pensée sauvage*, Grenoble.

Chevallard, Y. (1988): *Sur l' analyse didactique, Deux études sur les notions de contrat et de situation*, IREM d' Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1989): "Le concept de rapport au savoir: rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel", *Séminaire de Didactiques des Mathématiques et de l'Informatique*, Grenoble.

Douady, R. (1984): *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l' enseignement des mathématiques*, tese de graduação, Universidade de Paris VII.

Gras, R. (1979): *Contribution à l' étude expérimental et à l' analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques*, tese de graduação, Universidade de Rennes.

Laborde, C. (1982): *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l' enseignement mathématique*, tese de graduação, Universidade de Grenoble.

Margolinas, C. (1989): *Le point de vue de la validation: essai de synthèse et d' analyse en didactique des mathématiques*, tesis Universidade de Grenoble.

Perret-Clermont, A.N.; Brun, J.; Conne, F. y Schbauer-Leoni, M. L. (1982): *Décontextualization et recontextualization du savoir dans l' enseignement des mathématiques à des jeunes élèves*, Faculdade de psicologia e de Ciências d Educação, Genebra.

Ratsimba-Rajohn, H. (1981): *Etude de deux méthodes de mesures rationnelles: la commesuration et el fractionnement de l'unité, en vue d'élaboration de situations didactiques*, tese do Terceiro Curso, Universidade de Burdeaux.

Rouchier, A. (1991): *Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaire: proportionnalité, structures itérativo-récursives, institutionnalisation*, Universidade de Orléans, tese de graduação.

Schubauer-Leoni, M.L.(1988): "Le contrat didactique dans une approche psycho-sociale des situations d'enseignement", em *Interaction didactiques*, n. 8, Seminário de Psicilogía, Facultade de Letras, Universidade de Neuchâtel, Suiça, pp. 63-75.

5

O sistema de numeração: um problema didático

Delia Lerner e *Patricia Sadovsky*,
com a colaboração de *Susana Wolman*

Neste capítulo, desejamos expressar nosso reconhecimento por:

— Emilia Ferreiro, porque suas pesquisas pioneiras — ainda que já clássicas — sobre o sistema de escrita permitiram vislumbrar a reconstrução de outros sistemas de representações por parte das crianças.

— Guy Brousseau, já que suas pesquisas nutrem nosso trabalho e nos obrigam a repensar cada vez mais a didática da matemática.

— Todos aqueles que — como G. Sastre, M. Moreno, e sobretudo, Anne Sinclair — estudaram a representação numérica de uma perspectiva psicogenética.

— Os professores e crianças que, com suas afirmações e suas perguntas, fazem crescer dia a dia a proposta que levamos à prática.

— As escolas que abrigam nosso trabalho: Aequalis, Martin Buber, Numen, Jardin de Infantes Municipal de Wilde.

— Raquel Gutman, por sua colaboração na primeira etapa desta pesquisa.

projetada seja objeto de uma pesquisa didática rigorosa que permita elaborar afirmações válidas sobre o ensino e aprendizagem do sistema de numeração, no contexto escolar.

Ainda assim, os resultados já obtidos são suficientes para julgar o enfoque que até agora se tem dado ao ensino do sistema de numeração e para mostrar a eficácia de outra modalidade de ensino, que favoreça uma compreensão muito mais profunda e operacional da notação numérica.

II

História dos conhecimentos que as crianças elaboram a respeito da numeração escrita

Que conclusões poderiam tirar as crianças a partir de seu contato cotidiano com a numeração escrita? Que informações relevantes poderiam obter ao escutar seus pais queixar-se do aumento dos preços, ao tentar entender como é que sua mãe sabe qual das marcas de determinado produto é mais barata, ao ver que seu irmão recorre ao calendário para calcular os dias que ainda faltam para seu aniversário, ao alegrar-se porque na fila da padaria "já estão atendendo a ficha trinta e..." e seu pai tem a trinta e quatro, ao perguntar-se o que tem a ver o endereço que escreveu sua mãe (Rua Córdoba 4859) com a indicação que ela dá a sua irmã ("tens que descer na altura do quatro mil e oitocentos")...? Dito de outro modo: o que poderiam aprender as crianças ao presenciar situações nas quais os usuários do sistema de escrita que as rodeiam denominam, escrevem e comparam números? Perguntas como estas nos fazíamos antes de iniciar a pesquisa.

Acreditávamos que as crianças construíam desde cedo critérios para comparar números; pensávamos que — muito antes de suspeitar da existência de centenas, dezenas e unidades — alguma relação elas deveriam estabelecer entre a posição dos algarismos e o valor que eles representam; acreditávamos que as crianças detectavam regularidades ao interagir com a escrita de fragmentos da seqüência numérica. Algumas produções não-convencionais que tínhamos visto reiteradamente nas aulas nos levaram a formular duas suposições: que as crianças elaboram critérios próprios para produzir representações numéricas e que a construção da notação convencional não segue a ordem da seqüência (numérica), ainda que esta desempenhe um papel importante dessa construção.

Para verificar — e também para precisar — estas suposições, projetamos uma situação experimental centrada na comparação de números e outra centrada na produção destes.

A primeira era uma variante do jogo da guerra (ou batalha). Utilizamos um baralho de vinte cartas com números compreendidos entre o 5 e o 31 e com um único desenho em cada carta — o que identificava o naipe —, de maneira tal que a comparação se baseasse exclusivamente na escrita numérica. Ao finalizar cada mão, pedíamos as crianças que justificassem as decisões tomadas durante o jogo.

O enunciado que dava inicio à segunda situação era: "Pensem em um número muito alto e escrevam-no". Começava logo uma discussão em que as crianças opinavam sobre a escrita do colega e decidiam qual dos dois tinha escrito um número maior. O que acontecia depois dependia muito das respostas e argumentos proporcionados pelas crianças, e ainda que com a aparência de um "ditado de quantidades", tratava-se de um ditado cuja característica central era o debate das escritas produzidas.

Os dados que recolhemos mostraram uma alentadora coincidência com os obtidos no contexto da pesquisa que estão realizando Bressan, Rivas e Sheuer, e nos permitiram delinear o percurso das crianças em sua tentativa de conhecer o sistema de numeração. Tentaremos explicar os aspectos essenciais desse percurso.

Quantidade de algarismos e magnitude do número ou "Este é maior, você não está vendo que tem mais números?"

A afirmação das crianças entrevistadas mostram que elas elaboraram uma hipótese que poderia explicitar-se assim: "quanto maior a quantidade de algarismos de um número, maior é o número".

Vejamos alguns exemplos:

- Alina (6 anos, primeira série), ao justificar suas decisões no jogo da guerra, afirma que 23 é maior que 5 "porque este (23, porém ela não o nomeia porque desconhece sua denominação oral) tem dois números e tem mais, e este (5) tem um só número".
- Loli (6 anos, primeira série) afirma — na mesma situação — que 12 é maior que 6 "porque tem mais números".

— Alan (6 anos, primeira série) comprova que a hipótese referente à quantidade de algarismos que constitui um número é muito mais forte que qualquer outra consideração vinculada ao valor absoluto de cada algarismo:

(O pesquisador faz uma contra-argumentação que estava prevista no projeto da situação e que foi rejeitada por todas as crianças quando compararam números de um ou dois algarismos.)

Pesquisador	*Alan*
Outro dia uma criança me falou que o maior era este (9), porque aqui havia um dois e um um, e o nove era maior que o dois e o um.	(Ri) Quantos anos tinha essa criança?
Depois eu conto. Primeiro diga o que pensas do que falou a criança.	Nada a ver. A criança tinha um ano!
Por quê?	Porque o que tem que ver o dois e o um! *Se eles formam um número só.*
Formam um número só?	É sim, por exemplo, *cem são três números* e *formam um número só.*

— No caso de Jonathan e Sebastian (primeira série), a hipótese que vincula a quantidade de algarismos à magnitude do número não se refere só a números de um ou dois algarismos, mas já se generalizava à comparação de números maiores:

Pesquisador	*Jonathan*	*Sebastian*
Agora vou pedir a vocês que escrevam o mil e cinco.	(Ambos escrevem convencionalmente 1005)	
(A Sebastian.) Olha como escreveu Jonathan.		Nós dois escrevemos igual.
E por que se escreve assim o mil e cinco?	Não sei.	

Pesquisador	*Jonathan*	*Sebastian*
Se tivessem que explicá-lo a outra criança, o que diriam?	Diria que é com um um, um zero, outro zero e um cinco.	
Outro dia uma criança me disse que o mil e cinco se escrevia assim: 1000 (mil) 5 (cinco)		Porque este (1000) é mil e este é cinco.
Acha que está certo assim? Por quê?		Não. Porque o cinco tem que ir aqui (mostra o último zero do mil).
Por que tem que ir aqui?		Porque em vez do zero vai o cinco.
E este (10005) então?	É outro número.	Sim.
E é mais ou menos que 1005?		É mais.
Como é que você sabe?	Porque tem mais números, tem um zero a mais.	Porque tem mais.
Os que têm mais números são maiores?	Sim.	Sim.

Como se pode observar nas últimas linhas do exemplo anterior, o critério de comparação que as crianças construíram funciona ainda quando elas não conhecem a denominação oral dos números que estão comparando.[2] Trata-se, então, de um critério elaborado fundamentalmente a partir da interação com a numeração escrita e de maneira relativamente independente da manipulação da seqüência dos nomes dos números. Trata-se também de uma ferramenta poderosa no âmbito da notação numérica, já que permitirá comparar qualquer par de números cuja quantidade de algarismos seja diferente.

No entanto, esta ferramenta — que já era manipulada por todas as crianças entrevistadas, para estabelecer comparações entre números de um ou dois alga-

2 Quando as crianças conhecem o nome dos números que estão comparando, justificam suas afirmações apelando não só à quantidade de algarismos mas também ao lugar que ocupam na seqüência numérica oral: "12 é maior porque tem mais números atrás dele, porque 6 para baixo tem menos atrás dele" (Alan).

rismos e que muitas usavam também para comparar números compostos por mais algarismos —[3] não se generaliza de maneira imediata a todas as situações.

Foi um de nossos entrevistados que nos mostrou algumas das dificuldades pelas quais deve atravessar esta generalização: Pablo (6 anos, primeira série) depois de ter afirmado — como as crianças anteriormente citadas — que é maior "o que tem mais números" sempre que se referia a comparar um número de um algarismo com outro de dois e também em algumas situações onde comparavam-se números de dois e três algarismos (824 e 83, 138 e 39, etc.), faz afirmações contraditórias quando trata-se de comparar 112 e 89. De fato, ele diz no começo que 112 é maior que 89 (mostrando-os, não reconhece as denominações) "porque tem mais números", porém logo muda de opinião: "Não, é maior este (89), porque 8 mais 9 é 17, então é mais".

Já que nos outros casos Pablo não tinha recorrido à soma dos valores absolutos dos algarismos e tinha tomado a quantidade de algarismos como critério único para estabelecer a comparação, pensamos que tenha sido a grande diferença entre os valores absolutos dos algarismos o que o levou a colocar em dúvida o critério de comparação que tinha utilizado de maneira estável em todos os casos anteriores, a renunciar a ele e a elaborar outro critério específico para essa situação. É válido perguntar-se porque Pablo não apela explicitamente ao valor dos algarismos que compõem esses números, mas ao resultado que é obtido somando-os.[4]

Ainda que Pablo tenha sido o único dos entrevistados a colocar em jogo outro critério de comparação além daquele baseado na quantidade de algarismos, consideramos significativa a informação que ele aporta porque confirma que — como acontece com outros objetos do conhecimento — a generalização está longe de ser imediata. Ainda mais, o critério alternativo utilizado por Pablo mostra um problema que provavelmente todas as crianças formulam, em determinado momento da construção: como se pode explicar que um número cujos algarismos são todos "baixinhos" (1110, por exemplo) seja maior que outro formado por algarismos "muito altos" (999, por exemplo)?

Mesmo que seja necessário se aprofundar no estudo do processo através do qual se constrói este critério de comparação — como se concebe, como se

[3] A informação de que dispomos acerca do processo de generalização é ainda insuficiente: nem todos os nossos entrevistados tiveram a oportunidade de comparar números de três ou mais algarismos, porque esta questão foi formulada só em determinadas situações, em função das respostas que as crianças forneciam.

[4] Esta é uma das questões que será necessário continuar pesquisando.

generaliza, que conflitos deve enfrentar —, não existe dúvida que sua elaboração constitui um passo relevante para a compreensão da numeração escrita.

A posição dos algarismos como critério de comparação ou "o primeiro é quem manda"

Ao comparar números de igual quantidade de algarismos, as crianças exibem argumentos através dos quais evidencia-se que elas já descobriram que a posição dos algarismos cumpre uma função relevante em nosso sistema de numeração:

— Lucila (5 anos, jardim), depois de afirmar que 21 é maior que 12, o justifica assim: "Porque o um (no 12) é primeiro e o dois é depois; porque (no 21) o dois é primeiro e o um é depois".
— Nádia (6 anos, primeira série) não consegue explicar como se deu conta de que 31 é maior que 13. Pergunta-se-lhe então como poderia explicá-lo a outra criança e ela responde: "Que preste atenção onde está o 3 e onde está o 1, ou onde está o 1 e onde está o 3".
— Alina, e sobretudo Ariel (6 anos, primeira série), são mais explícitos:

Pesquisador	*Alina*	*Ariel*
Por que este? (21) (O pesquisador pede justificativa da decisão que as crianças tomaram quando números comparados eram 12 e 21).		Porque este (21) é mais alto que este (12).
Porém são os mesmos números.	Sim, porém ao contrário.	Invertidos.
Invertidos? E o que isso tem a ver?		Tem muito a ver. Este (o 2 de 21) é mais alto que este (o 1 de 12) e se diferencia pelo primeiro.
E por que será que se diferencia pelo primeiro?		Porque sim.
Não existe uma razão?		Eu não sei!

Pesquisador	*Alina*	*Ariel*
Vocês sabem que número é este?		Vinte e um.
E este?		Doze.
E, a partir daí, podem encontrar alguma coisa para descobrir qual é mais alto?	Sim, porque este (21) está depois e este (12) está primeiro.	
Onde está primeiro?		Fazemos a conta. Olha: um, dois, três... (continua contando até doze) aqui está o doze... treze, quatorze... (segue contando até vinte e um) Vinte e um. Viu? Fizemos a conta?
De acordo. Agora você me convenceu.	(Logo após, ao comparar 21 e 23, Ariel diz que este último é maior, porque três é mais que um e, diante de uma pergunta do pesquisador, esclarece que neste caso se fixa no segundo número "porque no primeiro há um dois e um um.")	

Outros alunos explicitam com maior clareza ainda como deve aplicar-se o critério de comparação baseado na posição dos algarismos. Vejamos Guillermo:

Guillermo	*Yael*
	(Já decidido que 21 é maior que 12.)
	Tem os mesmos números. Só que aqui o dois está antes e aqui está atrás.
O que tem mais valor é o que fica na frente. Os dois têm valor.	

Guillermo	*Yael*
Sim, os dois têm valor. Você pode olhar o de trás. *Porém em primeiro lugar olha o da frente.* [...] Se o primeiro número de uma carta é igual ao primeiro de outra carta e o segundo é um mais alto que o outro, aí sim tem importância o segundo.	

As crianças citadas já descobriram — além do vínculo entre a quantidade de algarismos e a magnitude do número — outra característica específica dos sistemas posicionais: o valor que um algarismo representa, apesar de ser sempre o mesmo, depende do lugar em que está localizado com respeito aos outros que constituem o número. Sabem também que, se compararem dois números de igual quantidade de algarismos, será necessariamente maior aquele cujo primeiro algarismo seja maior e por isso podem afirmar — como muitas das crianças entrevistadas o fizeram — que "o primeiro é quem manda". Além disso, sabem que, quando o primeiro algarismo das duas quantidades é o mesmo, é preciso se apelar ao segundo para decidir qual é maior.

Chama a atenção o fato de que para muitas crianças os argumentos estritamente relacionados à numeração escrita tenham prioridade sobre os vinculados à seqüência numérica oral. Alina e Ariel, por exemplo, justificam originalmente suas afirmações apelando à posição dos algarismos nos números escritos ("Estão ao contrário", "Diferencia-se pelo primeiro"), e só apontam argumentos referentes à seqüência oral ("sim, porque neste (21) está depois e neste (12) está primeiro") quando o pesquisador as estimula a fazê-lo.

No entanto, tal como o observamos em relação às hipóteses referentes à quantidade de algarismos, o critério de comparação baseado na posição dos algarismos está longe de construir-se de uma vez só e para sempre, já que sua generalização também requer a superação de alguns obstáculos. É o que nos mostra Alina, que — apesar de ter aplicado consistentemente este critério em quase todas as situações — tropeça com uma dificuldade quando se trata de comparar 25 e 16:

(A situação se produz durante o jogo. O naipe de Alina tem o número 25, o de Ariel o número 16.)

Experimentador	*Alina*	*Ariel*
Quem ganhou o jogo?	Ganhou Ariel.	Não, ganhou ela.
	Ele, porque este (25) tem um dois e um quatro (!), e este (16), um um e um seis[...]. Este (25) tem um número a menos, e este (mostrando o 6 do 16), um número a mais.	Não! Porque se conta com o primeiro.

Alina parece sustentar aqui que é maior o número que contém o algarismo mais alto, independentemente do lugar em que este esteja posicionado. Parece que, também nesta situação, o valor absoluto dos números pode fazer duvidar da validade de um critério que se considerava válido para muitas outras situações.

Por outro lado, como o mostram claramente algumas respostas de Ariel ("porque sim", "eu não sei!"), o conhecimento que as crianças têm a respeito da variação do valor dos algarismos em função do lugar que ocupam não se faz acompanhar — e muito menos preceder — pelo conhecimento das razões que originam esta variação. Estas crianças não suspeitam ainda que "o primeiro é quem manda" porque representa agrupamentos de 10, se o número tem dois algarismos, de 100, se tem três... enquanto que as seguintes representam potências menores da base 10.

Ainda não descobriram as regras do sistema (o agrupamento usando o recurso da base 10), porém isto não lhes impede, em absoluto, de elaborar hipóteses referentes às conseqüências dessa regra — a vinculação entre a quantidade de algarismos ou sua posição e o valor do número — e utilizá-las como critérios válidos de comparação de números. A partir destas hipóteses, as crianças poderão, sem dúvida, formular perguntas — e o professor poderá enunciá-las — questões que as conduzirão, através de aproximações sucessivas, a descobrir a regra do sistema.

De fato, enquanto que Ariel não tenta justificar sua afirmação — contesta com um lacônico "porque sim" quando lhe é perguntado porque "se diferencia pelo primeiro número" —, outras crianças já encontraram uma explicação desse critério que elas mesmas elaboraram. É o que nos mostra, por exemplo, Guillermo (seis anos, primeira série), que se vê obrigado a explicitar sua argumentação para convencer a sua colega:

Pesquisador	*Guillermo*	*Yael*
Qual é o mais alto? (estão sendo comparados 25 e 31).	Este (31).	A mim me parece que é este (25), porque tem um dois e um cinco e este (31) tem um três e um um. Maiores são estes números (mostrando os algarismos de 25).
	Este (31) é maior. Porque? Porque olha: não tem nada a ver o segundo número com o primeiro, porque aqui três e lá (2 de 25) dois. Dois é menos que três. Isto é trinta e um e aquilo é vinte e cinco, não trinta e cinco.	
(A Yael) O que você acha do que ele disse? Você entendeu?		Não (rindo).
Explica melhor, Guillermo.	Olha, primeiro vem o dez e segundo pulas dez, dez, dez, assim, não? Então se conta, dez, vinte, trinta, tiramos cinco e fica vinte e cinco e ali (31) no trinta colocamos um, e fica trinta e um.	

Guillermo ainda não tinha ouvido falar de "dezenas" (acaba de ingressar na primeira série); nem sequer afirma que o primeiro algarismo de um número de dois algarismos se refere a "dezes". Porém, ele sabe muito bem que esse primeiro algarismo refere-se a alguma coisa da ordem dos "vinte", "trinta" ou "quarenta", no lugar de representar simplesmente "dois", "três" ou "quatro", e sabe também que esses números — vinte, trinta, etc. — se obtém contando de dez em dez na ordem da seqüência.

Sem dispor da extraordinária manipulação operatória que reflete este último argumento de Guillermo, outras crianças têm proporcionado argumentos semelhantes ao primeiro que ele deu. Seguramente, este tipo de justificação se torna possível quando as crianças conseguem coordenar o que descobriram na escrita numérica — que o valor de um algarismo varia em função da posição que ocupa — com a informação que lhes dá a seqüência numérica oral, a partir da qual eles podem estabelecer intervalos constituídos por "vintes", "trintas", etc.

No entanto, o que acontece quando as crianças tentam misturar os conhecimentos que elas construíram com os que lhes foram ensinados na escola? Para responder a esta pergunta, usaremos como exemplo as únicas crianças de primeira série que incluíram nas suas respostas a palavra "dezenas".

Pesquisador	*Loli*	*Alan*
(As crianças afirmaram que o vinte e um é maior que doze)		
Como é que vocês sabem que é maior, se os dois têm os mesmos números?	Aqui (21) o dois está na frente e lá (12) está atrás.	Sim.
Eu não entendo muito bem, já que são os mesmos números.	Sim, porém não estão na mesma ordem.	Isto (12) é uma dezena.
Qual?		Ah! Não! É uma dúzia.
E vinte e um?		Eu não sei... O que é vinte e um, uma dezena? Eu não sei! Acho... ou não?
Uma dezena?	Sim, tem uma, duas. Aqui (mostra o 2 do 21).	Não, não tem nenhuma dezena. O um não é nenhuma dezena e o dois também não.
	O vinte sim, no vinte sim há duas dezenas.	

Por que Alan introduz o termo "dezena"? Talvez porque suspeite da existência de alguma relação entre esse termo e o valor do algarismo que aparece colocado "na frente" nos números de dois algarismos. Porém, esta suspeita é suficientemente vaga, para que ele possa afirmar que 21 "não tem nenhuma dezena, o um não é nenhuma dezena e o dois também não".

No caso de Loli, ocorre algo diferente: ainda que ela não utilize esponta
amente o conceito de dezena — mas a posição dos algarismos — para expli
porque o 21 é maior que 12, parece compreender que o 2 do 21 representa d
dezenas. Sua resposta final mostra claramente como chegou a compreendê
pode entender que em 21 há duas dezenas porque esse 2 não significa para
"dois", mas sim "vinte".

É válido perguntar então: aprender o conceito de dezena ajuda realmen
conhecer os números? Ou é o conhecimento dos números — e de sua escrita
que ajuda a compreender o conceito de dezena?

Alguns números especiais: o papel dos "nós"

A apropriação da escrita convencional dos números não segue a orden
série numérica: as crianças manipulam em primeiro lugar a escrita dos "nós'
quer dizer, das dezenas, centenas, unidades de mil..., exatas — e só depois ela
ram a escrita dos números que se posicionam nos intervalos entre estes nós.

Vejamos primeiro a resposta das crianças:

Pesquisador	*Gisela*
Escreva um número, o que você tiver vontade, que pareça bastante alto.	(Escreve 1000)
Qual é esse número?	O mil.
E o dois mil como se escreve?	(Escreve 200)
Isso é dois mil?	(Agrega um zero a sua escrita anterior.)
E este (200) qual é?	Duzentos.
E este? (cobrindo um 0 do 1000)	O cem.
E o três mil?	(Escreve 3000)
E como você escreveria o dois mil e quinhentos?	(Grande desconcerto.) Não me lembro.
E o quinhentos?	(Escreve 005)
Aqui tem o dois mil (mostrando uma escrita anterior) e ali o quinhentos... Isso poderia servir para você escrever o dois mil e quinhentos?	Sim... (Porém não se anima)

O caso de Nádia (seis anos, primeira série) é ainda mais claro:

Pesquisador	*Nádia*
Agora vou pedir que você escreva um bem alto.	Muito alto?
Sim.	Vou escrever no máximo mil (Escreve 900).
Que número é esse?	Novecentos.
E o mil como é ?	(Escreve 1000)
Como você acha que seria o dois mil?	(Escreve 2000)
E quatro mil?	(Escreve 4000)
Nove mil?	(Escreve 9000)
Dez mil?	(Escreve 10.000)
Me diz... Mil e cem, como acha que é?	(Muito surpresa) Mil e cem? Para mim esse número não existe.
Não existe?	(Pensa um longo tempo e logo escreve 1000100)
E mil e quinhentos?	(Escreve 1000500)

Se bem que a maioria das crianças entrevistadas já escrevesse de forma convencional os "nós" das dezenas, das centenas e das unidades de mil, obtivemos algumas respostas que fornecem indícios sobre o caminho que as crianças percorrem para elaborar essas escritas. Observamos, por exemplo, as produções e reflexões de Christian (5 anos, pré-escolar) na seguinte situação:

Pesquisador	*Christian*	*Rubén*
[...] E como vocês escrevem o cem?	Ah! Não, eu posso escrever muitas vezes o cem.	
Como é?	Um um (escreve) e dois zeros (os escreve).	(Escreve 100)

Pesquisador	*Christian*	*Rubén*
E o duzentos?	Eu não sei escrevê-lo.	Aqui está o duzentos (escreve 200).
E o trezentos?	Eu vou escrever todos os números desde o cem até onde se termina o cem. 100 cem · 100 cento e um · 200 cento e dois	(Escreve 300).
Este (marcando o primeiro número escrito por Christian) é o cem ?	Sim.	
E qual é o cento e um?	Este (marca seu segundo número: 100).	
E é igual a este? (mostrando o primeiro)	Sim..., não, porque este (mostrando o primeiro 100) tem o zero mais pequeninho, e aquele (marcando o segundo) tem o zero maior.	
Ah! O que tem o zero maior é o cento e um? (É correto!!)	Sim, e o um também é maior.	
Ahah! E cento e cinco, como seria?	Espera que eu quero escrever desde o um até onde termina o cem.	(Escreve 10Ƨ).
Bom, quando terminar, nos avisa. (Enquanto isso se pede a Rubén que escreva cento e trinta, cento e trinta e oito, duzentos e vinte e três, quinhentos.)	(Christian escreveu: 100 100 200 3000 400)	(Escreve: 130 138 223 Ƨ00.)

Pesquisador	*Christian*	*Rubén*
E você, Christian, poderia escrever quinhentos?	Quem não vai saber escrever o quinhentos? Tomara que o cinco me saia bem. (Escreve 500.)	
Bom, explica-me o que você escreveu antes.	(Lê) 100 100 200 300 400 cem / cento e um / cento e dois / cento e três / cento e quatro	
Você falou antes que ia escrever até se acabar os cem. Quando se acaba o cem?	(Pensa um tempo) Ia escrever até cento e nove. (Agrega a sua série 500.) 100 100 200 300 400 500 É o cento e cinco (mostrando o quinhentos). É mesmo, olha! (mostrando na escrita anterior 500 que ele mesmo tinha produzido.)	
Qual era esse?	Quinhentos.	
E este? (Mostrando o que acaba de produzir).	Cento e cinco.	
E você acha que se pode escrever quinhentos e cento e cinco igual?	Não.	
E como nos damos conta de qual é qual?	Faço um grande e o outro pequeninho.	
Com os mesmos números?	Neste (o que tinha interpretado anteriormente como quinhentos) faço um traço: $\underline{500}$ e o outro deixo sem risco.	

Pesquisador	*Christian*	*Rubén*
Com o traço qual é?	Quinhentos.	
E sem o traço?	Cento e cinco.	(Tinha escrito por enquanto, a pedido do pesquisador sempre em forma convencional: 110, 900, 932, 907.)
E o mil?	Eu sei escrevê-lo.	
Vejamos, como escreveriam?	(Escreve 1000.) Como não vou saber escrever o mil se antes escrevi o cem mil! (Efetivamente, o tinha escrito assim: 1001000.)	1000.

Christian já manipulava a escrita convencional da segunda e da terceira potência da base (100 e 1000). Como utiliza o conhecimento da escrita de cem para produzir os números seguintes? Parece que não a utiliza como base para produzir os outros "nós" das centenas — ele diz que não sabe escrever duzentos, e quinhentos parece sempre uma forma fixa, provavelmente conhecida através das notas de 500 australes[5] —, mas para fazer hipóteses acerca da escrita dos números compreendidos entre cem e cento e dez. Ele supõe que estes números terão dois zeros — como cem — e que se diferenciam de cem pelo algarismo inicial. O problema é que esta hipótese não lhe permite diferenciar — utilizando números diferentes — cem de cento e um, e seguramente é por isso que apela ao tamanho para diferenciá-los. Também nos parece surpreendente constatar que o fato de que conhecer a escrita convencional de quinhentos não o leva a duvidar de sua hipótese — entretanto, continua afirmando que quinhentos representa cento e cinco —, mas a empregar um recurso não-numérico para diferenciar as duas escritas.[6]

Por outro lado, várias crianças nos forneceram — trabalhando em aula — escritas aparentemente inversas às de Christian, porém cujo significado nos parece semelhante: elas escrevem quatrocentos como 104, trezentos como 103, seiscentos como 106. Estas crianças pensam que a escrita dos outros "nós" das centenas

5 Quando Christian foi entrevistado, os australes ainda estavam em circulação.

6 Ainda que o recurso que utiliza Christian possa parecer exótico, talvez seja mais pertinente ao lembrarmos que outros sistemas de numeração — como por exemplo o romano — tem apelado a grafias do mesmo tipo para diferenciar números (V e $\overline{V}$).

conserva características da escrita de 100: também tem três algarismos, porém, neste caso, são mantidos os dois primeiros — o um e o zero iniciais de cem — e a diferença é expressa variando o último número.

Todos estes dados sugerem que as crianças apropriam-se em primeiro lugar da escrita convencional da potência da base (100, que quer dizer 10 ao quadrado, neste caso), e que a escrita dos outros "nós" correspondentes a essa potência é elaborada a partir desse modelo, conservando a quantidade de algarismos, mantendo dois dos que compõem cem e variando o outro. O caso de Christian indica que um procedimento semelhante poderia ser utilizado — para reconstruir a escrita dos números posicionados entre 100 e 110. O problema que se apresentará então será o de encontrar uma maneira de diferenciar numericamente a escrita de duzentos e a de cento e dois, a de quinhentos e cento e cinco, etc. A busca de diferenciação seguramente conduzirá a descobrir que nos casos de nós (200, 300, etc.) o que varia — em relação com a escrita do cem — é o primeiro número, enquanto que no caso de 101...109, o que varia é o último número.

O papel da numeração falada

As crianças elaboram conceitualizações a respeito da escrita dos números, baseando-se nas informações que extraem da numeração falada e em seu conhecimento da escrita convencional dos "nós".

Para produzir os números cuja escritura convencional ainda não adquiriram, elas misturam os símbolos que conhecem, colocando-os de maneira tal que se correspondam como a ordenação dos termos na numeração falada.

Vejamos algumas escritas e justificações das crianças entrevistadas que ilustram claramente o que tentamos dizer:

— Lucila e Santiago (os dois têm cinco anos e estão no jardim de infância) escrevem:

108 109

As duas interpretam suas escritas como "dez e oito" e "dez e nove" respectivamente.

— Yael faz algo semelhante, porém nos explica:
Enquanto está anotando sua pontuação no jogo da guerra, anota, "dez e oito" como 108 e justifica dizendo que dez e oito se escreve assim "porque tem um dez, que é um um e um zero, então se colocam os dois com o oito".

Guillermo — seu colega, que escreve convencionalmente os números de dois algarismos — intervém: "Não! Porque é como acontece com o vinte ou com o trinta... Porque o zero é usado para o trinta, porém não se usa para o trinta e um, nem para o trinta e dois, nem para o trinta e três. [...] De três números não se pode, não se pode [...] porque o cem se escreve assim [100]". Yael o escuta atentamente, porém depois de um tempo escreve trinta e quatro como 304 e — ao olhar a escrita convencional de Guillermo,(34) — afirma: "para mim, se pode fazer das duas maneiras".

— Martín (6 anos, primeira série) escreve:

700 sete- centos	25 vinte e cinco	1000 mil	800 oito- centos	32 trinta e dois
8000 oito mil	200 duzen- tos	6000 seis mil	300 trezen- tos	45 quarenta e cinco

No último caso corrige sua escrita depois de interpretá-la e faz assim: 630045

— Dan (6 anos, primeira série) escreve 600030045; igual a Martín, considera incorreta sua escrita, porém a corrige de outra forma: 63045.

— Daniela (5 anos, pré-escolar), que escreve convencionalmente os números de dois e três algarismos que lhe são propostos, e também um número de quatro algarismos (1036), faz algo diferente quando pedimos a ela que escreva mil quinhentos e trinta e seis. Sua produção original é: 1000 500 36

que ela lê assim: mil quinhen-tos trinta e seis

A seguir escreve oito mil quinhentos e trinta e quatro: 8 1000 50034, depois faz a retificação: 8 1000534. Para quatro mil cento e quarenta e cinco produz: 41000145.

— Christian — que, como vimos anteriormente, escreve de maneira convencional cem e mil, porém produz os números intermediários entre 100 e 110 baseado em uma hipótese que lhe é própria — escreve em forma convencional, também, um milhão (1.000.000). Porém, quando lhe pedimos que escreva quatro números, suas produções são as seguintes:

mil cento e cinco	1000	100	5
dois mil	2	1000	
dez mil	10	1000	
cem mil	100	1000	

Ao fazer a comparação de sua escrita de cem mil com a de Rúbem (100.000), Christian considera possível as duas escritas: "se eu tirasse este (o 1 de 1000) e colocasse um ponto, igual diz cem mil". Mas em seguida afirma: "também sei escrever um milhão e dez" e escreve: 100000010. "Quando você escreve um milhão e dez — acrescenta — não pode tirar o um (do dez), porque não sabes se é esse. E, então, como adivinha que número é? Não sabe que é 10?". (Em outras palavras, este um não pode ser trocado por um ponto, como acontece com o 1 de 1000 em cem mil.)

A hipótese segundo a qual a escrita numérica é o resultado de uma correspondência com a numeração falada, conduz as crianças a resolver notações não-convencionais. Por que isto ocorre? Porque a diferença da numeração escrita da numeração falada está em que está última não é posicional.

Assim, se a organização da numeração falada fosse posicional, a denominação oral correspondente a 4705, por exemplo, seria "quatro, sete, zero, cinco", no entanto, a denominação realmente utilizada para este número explicita, além dos algarismos quatro, sete e cinco, as potências de dez correspondentes a tais algarismos (quatro *mil setecentos* e cinco).

Outra questão que deve ser levada em consideração é a das operações racionais envolvidas na numeração escrita.

Na numeração falada, justaposição de palavras supõe sempre uma operação aritmética, operação que em alguns casos é uma soma (mil e quatro significa 1000 + 4, por exemplo) e em outras situações uma multiplicação (oitocentos significa 8 × 100, por exemplo). Na denominação de um número, estas duas operações em geral aparecem combinadas (por exemplo, cinco mil e quatrocentos significa 5 × 1000 + 4 × 100) e — como que para complicar a vida de quem tente compreender o sistema — uma simples mudança na ordem de enunciação das palavras indica que foi mudada a operação aritmética envolvida: cinco mil (5 × 1000) e mil e cinco (1000 + 5), seiscentos (6 × 100) e cento e seis (100 + 6). Para piorar a situação, a conjunção "e" — que lingüisticamente representa adição — só aparece quando se trata de reunir dezenas e unidades.

Sendo assim, podemos afirmar que as escritas não-convencionais produzidas pelas crianças são efetivamente aditivas e/ou multiplicativas? Quando elas escrevem duzentos e cinqüenta e quatro como 200504, pensam que o valor total desse número se obtém somando 200 + 50 + 4?; quando escrevem 41000 para quatro mil, estão representando a idéia de que o valor total desse número se obtém multiplicando 4 × 1000? Compreendem as crianças as operações que parecem estar envolvidas em sua escrita? Ou então, estas resultam simplesmente do estabelecimento de uma correspondência com a comunicação falada?

Interessa-nos encontrar respostas para as perguntas formuladas, porque a soma e a multiplicação pelas potências da base também estão envolvidas na numeração escrita convencional. Portanto, se as crianças descobrissem as operações envolvidas na numeração falada, este conhecimento seria importante para entender como funciona a numeração escrita.

A numeração escrita é ao mesmo tempo mais regular, mas mais hermética que a numeração falada. É mais regular porque a soma e a multiplicação são utilizadas sempre da mesma maneira: se multiplica cada algarismo pela potência da base que corresponde, se somam os produtos que resultaram dessas multiplicações.[7] É hermética porque nela não existe nenhum vestígio das operações aritméticas racionais envolvidas e porque — de modo diferente do que acontece com a numeração falada — as potências da base não são representadas através de símbolos particulares, mas só podem ser deduzidas a partir da posição que ocupam os algarismos.

Temos iniciado pesquisas destinadas a responder às perguntas anteriormente citadas. Os dados recolhidos até agora mostram que as crianças que produzem notações que se vinculam com a numeração falada podem ter descoberto ou não as relações aritméticas subjacentes a tal notação: enquanto que algumas delas vinculam — por exemplo — a escrita 200504 à soma de 200, 50 e 4, outras a justificam apelando exclusivamente às palavras que constituem a denominação

[7] $4815 = 4 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 5 \times 10^0$.

oral do número representado. Estes resultados — ainda muito insuficientes — levam a supor uma possível progressão desde uma simples correspondência entre o nome e a notação do número, até a compreensão das relações aditivas e multiplicativas envolvidas na numeração falada.

As escritas numéricas não-convencionais produzidas pelas crianças são feitas, então, à imagem e semelhança da numeração falada. Neste caso, quem adere à escrita não-convencional o faz de maneira definitiva ou é simultaneamente partidário da notação convencional?

Nas escritas numéricas realizadas por cada criança no transcurso das entrevistas, coexistem modalidades de produção diferentes para números posicionados em diferentes intervalos da seqüência. De fato, crianças que escrevem convencionalmente qualquer número de dois algarismos (35, 44, 83, etc.) produzem escritas correspondentes com a numeração falada quando trata-se de centena (10035 para cento e trinta e cinco, 20028 para duzentos e vinte e oito, etc.). Da mesma maneira, crianças que escrevem convencionalmente qualquer número de dois e três algarismos apelam à correspondência que existe com a forma oral quando trata-se de escrever milhares: escrevem — por exemplo — 135, 483 ou 942 em forma convencional, porém representam mil e vinte e cinco como 100025 e mil trezentos e trinta e dois como 100030032 ou 1000332.

No entanto, a coexistência de escritas convencionais e não-convencionais pode também estar presente em números da mesma quantidade de algarismos: algumas crianças escrevem convencionalmente números compreendidos entre cem e duzentos (187, 174, etc.), porém não generalizam esta modalidade às outras centenas (e registrando então 80094 para representar oitocentos e noventa e quatro ou 90025 para novecentos e vinte e cinco). Por outro lado, muitas crianças produzem algumas escritas convencionais e outras que não o são, dentro da mesma centena ou de uma mesma unidade de mil: 804 (convencional), porém 80045 para oitocentos e quarenta e cinco; 1006 para mil e seis, porém 1000324 para mil trezentos e vinte e quatro.

Indiquemos, finalmente, que a relação numeração falada/numeração escrita não é unidirecional: assim como a numeração extraída da numeração falada intervém na conceitualização da escrita numérica, reciprocamente os conhecimentos elaborados a respeito da escrita dos números incidem nos juízos comparativos referentes à numeração falada. Vejamos, por exemplo, o que ocorre com Christian (5 anos) ao comparar cem mil e cem:

Pesquisador	*Christian*
Como você escreveria mil e cem?	Não, cem mil.
Cem mil é um número. Mil e cem é outro número?	Não, é igual. Ao inverso.
Porém é o mesmo número? Por exemplo, se eu disser que eu tenho cem mil australes, é a mesma coisa?	Não, porque está ao contrário.
E quando tenho mais? Quando tenho cem mil ou quando tenho mil e cem australes?	Quando tenho mil e cem.
E como é que você sabe se mil e cem é mais?	Porque em mil e cem o mil está primeiro e o mil é maior que o cem.
	(Respostas semelhantes se produzem depois ao comparar dez mil e mil e dez.)

Christian aplica à numeração falada um critério que, como sabemos, elaborou para a numeração escrita: "O que manda é o primeiro". O raciocínio subjacente ao seu argumento parece ser o seguinte: cem mil e mil e cem estão compostos os dois pelos mesmos símbolos — mil e cem (ou 1000 e 100) —; para saber qual é maior, tem que prestar atenção no que fica na frente. Christian supõe que esta regra — válida para a numeração escrita — também é válida para a numeração falada e é esta suposição, de uma coerência maior que a existente, que o induz ao erro.

Evidentemente, não é tarefa fácil descobrir o que está oculto na numeração falada e o que está oculto na numeração escrita, aceitar que uma coisa não coincide sempre com a outra, determinar quais são as informações fornecidas pela numeração falada que resulta pertinente aplicar à numeração escrita e quais não, descobrir que os princípios que regem a numeração escrita não são diretamente transferíveis à numeração falada...

E, no entanto, apesar de todas estas dificuldades inerentes ao objeto de conhecimento, as crianças apropriam-se progressivamente da escrita convencional dos números que antes realizavam a partir da vinculação com a numeração falada. Como o fazem? É o que tentaremos demonstrar no próximo ponto.

Do conflito à notação convencional

Duas das conceitualizações que descrevemos nos pontos anteriores levaram as crianças a conclusões potencialmente contraditórias:

— por um lado, elas supõem que a numeração escrita se vincula estritamente à numeração falada;

— por outro lado, sabem que em nosso sistema de numeração a quantidade de algarismos está relacionada à magnitude do número representado.

A primeira destas conceitualizações aplica-se fundamentalmente à escrita de números posicionados nos intervalos entre "nós", enquanto que os últimos são representados de maneira convencional. Em conseqüência, as escritas produzidas pelas crianças para os números que se posicionam entre dois "nós" determinados terão mais algarismos que os números que representam os mesmos "nós": elas escreveram convencionalmente, por exemplo, 2000 e 3000, porém dois mil setecentos e oitenta e dois será representado como 200070082 (ou eventualmente 2000782).

A criança poderia aceitar que dois mil setecentos e oitenta e dois se escreva com mais algarismos que dois mil, já que o primeiro é maior que o segundo. Porém, se ela pensa simultaneamente que um número é maior quanto mais algarismos tenha, como é que pode aceitar que dois mil setecentos e oitenta e dois se escreva com mais algarismos que três mil? Deste modo, a escrita produzida a partir de uma de suas conceitualizações — a vinculação com a numeração falada — resulta inaceitável se avaliada a partir de outra de suas conceitualizações — a vinculação entre quantidade de algarismos e magnitude do número.

Como a criança manipula esta contradição entre suas conceitualizações? Toma consciência dela de imediato? Em que é que se apóia para resolvê-las?

Os dados recolhidos até agora sugerem que, no princípio, a contradição detectada pelo observador não se constitui em um conflito para as crianças. Vejamos alguns exemplos:

Pesquisador	*Christian*	*Rubén*
Agora vou pedir-lhes que escrevam quatro mil cento e três.	410001003	41000103

Pesquisador	*Christian*	*Rubén*
Qual é maior, quatro mil ou quatro mil cento e três?	Sempre é maior o de quatro mil.	
Qual é maior?	Porque quatro mil é quatro e três zeros, porém quatro mil cento e três tem mais de três zeros; porque olha, conta: um, dois, três, quatro, cinco (enquanto conta os zeros de sua escrita).	
E o cinco mil, como é?	51000.	5000.
Vamos discutir qual é a diferença que há entre o que vocês dois anotaram.	(Para Christian é o mesmo.)	(Segundo Rubén não é preciso pôr o um).
	Não lembra que antes dissemos que podíamos colocar o mil com o um ou sem o um? Não lembra?	
Parece que Rúbem não está de acordo. Então, entre quatro mil cento e três e cinco mil, qual é maior?	Sempre vai ser maior este. (410001003)	Quatro mil cento e três.
Quatro mil cento e três é maior que cinco mil?	Não..., hum..., sim. Sim, este é maior, porque olha que diferença: Três zeros ali, e aqui... Quantos zeros?	
Ou seja...	(Interrompe) Ah!, porém uma coisa, mais que um milhão NÃO é, não pense que é o último número infinito.	

Pesquisador	*Christian*	*Rubén*
Não, não acredito. Podem me explicar um pouco mais por que o quatro mil cento e três é maior que o cinco mil?	Sim, porque este (5100) tem menos zeros.	
E você, Rubén, o que pensa disso?		Este é maior (4000103).
Por quê?		Porque é maior.
Por quê tem mais números?		Sim.

Chistian e Rubén centram-se exclusivamente na quantidade de algarismos das escritas que eles mesmos produziram e parecem ignorar qualquer outra consideração a respeito do valor dos números representados. Pensam realmente que quatro mil cento e três é maior que cinco mil? Ou sabem que cinco mil é maior que quatro mil cento e três, porém não podem fazer uso aqui deste conhecimento? A dúvida momentânea de Christian (Não..., Hum..., Sim [...]), neste caso, é o único indício que ele poderia ter algum motivo para questionar o juízo que emite baseando-se nas quantidades de algarismos.

As respostas de Gisela (5 anos, pré-escolar) mostram mais claramente que não é suficiente conhecer o valor dos números para tomar consciência do conflito, e — menos ainda — para harmonizar as conclusões fundamentadas na quantidade de algarismos:

Pesquisador	*Gisela*
(Se está trabalhando com dinheiro, Gisela contou notas de dez e de cem.)	
E como é que você junta mil e quinhentos?	Com esta e com esta (pega uma nota de mil e outra de quinhentos).
Muito bem. E mil e quinhentos como se escreve?	Não sei.
Tente, como você achar que se faz.	(Pensa um longo tempo.)
Que números você acha que tem mil e quinhentos?	[...]

Pesquisador	*Gisela*
Terá um?	Sim.
E cinco?	Sim.
E zero?	Sim.
Então, escreva como lhe parecer conveniente.	(Escreve 1000500) É muito comprido.
Parece muito comprido para ser mil e quinhentos?	Sim.
É ou não é mil e quinhentos?	Sim, é.
Tá bom. Como você escreveria dois mil e quinhentos?	(Escreve 2000500.)
Escute uma coisa. Qual é maior, dois mil e quinhentos ou três mil (mostrando 3000, que Gisela tinha escrito convencionalmente anteriormente).	Dois mil e quinhentos.
Faz três mil com o dinheiro.	(Pega três notas de mil.)
E dois mil e quinhentos?	(Pega duas notas de mil e uma de quinhentos.)
E qual é maior: duas notas e uma assim (duas de mil e uma de quinhentos) ou três assim (três de mil)?	Três assim (mostrando as notas de mil).
Agora olha bem como estão escritos. Você disse que este (3000) é três mil e este (2000500) é dois mil e quinhentos, não é?	Sim.
E qual é maior?	Este (mostra 2000500).
E com o dinheiro (mostrando as pilhas de notas), qual é maior?	Três mil.
E aqui (mostrando as escritas) qual é maior?	Este (2000500).
E não tem importância que com o dinheiro seja maior este (monte de três mil)?	Não, não importa.

Sem dúvida, Gisele sabe — ao menos com referência ao dinheiro — que três mil representa uma quantidade maior que dois mil e quinhentos. No entanto, quando lhe pedimos que compare os números levando em conta a representação escrita que fez deles, parece "esquecer" o significado e centrar-se unicamente na quantidade de algarismos que produziu. Além disso — e apesar de ela mesma ter indicado que sua escrita "1000500" era muito comprida para representar esse número —, parece não dar-se conta da contradição entre suas afirmações sucessivas. É como se ela pensasse: "se presto atenção nas notas, três mil é maior; se me fixo nos números escritos, 2000500 é maior".

Deste modo, ao centrar-se alternativamente nos números referidos e nos significantes — sem relacionar em momento algum estes dois parâmetros —, Gisela evita tomar consciência do conflito que seria formulado se pudesse levar em conta simultaneamente ambas as questões.

As respostas de outros alunos nos mostram que, cedo ou tarde, terão que enfrentar este conflito:

Pesquisador	*Dany* (6 anos, primeira série)
(Estão se comparando oralmente pares de números, sem referir as comparações a nenhum material específico.)	
Qual será maior, oitocentos ou setecentos e cinqüenta?	Oitocentos é maior.
Como você escreveria oitocentos?	(Escreve 800.)
E setecentos e cinqüenta?	(Escreve 70050.)
	(Fica perplexo, contemplando os números que escreveu.)

— Outras crianças depois de terem produzidos escritas em concordância com a numeração falada, indicam de imediato que "são demasiados números" e — longe de limitar-se a indicá-lo como fez Gisela — fazem reiteradas tentativas de modificar sua produção para conseguir produzir a quantidade de algarismos. É o que fazem, por exemplo, Martín e Dan (citados no ponto anterior) quando transformam sua escrita original para o caso do seis mil trezentos e quarenta e cinco (600030045) em 630045 e 63045 respectivamente. Frente a cada pedido do pesquisador, estas crianças voltam a produzir uma escrita vinculada à numeração falada, porém se mostram insatisfeitos com o resultado e o corrigem, eliminando um ou mais zeros da escrita original. No entanto, o resultado destas correções coincide só em alguns casos com a escrita convencional, porque as crianças sempre deixam "pelo menos" um zero: mil e trinta e seis, por exemplo, chega a ser escrito como 1036 (a partir de 100036), enquanto que a versão final de mil quinhentos e trinta e seis é 10536.

— Luciana também se dá conta do conflito, porém tenta resolvê-lo modificando a leitura do número, em vez de corrigir sua escrita:

Pesquisador	*Luciana*	*Leandro*
Como vocês escreveriam oito mil novecentos e vinte e quatro?	(Escreve 800090024.)	(Escreve 8924.)
Comparem o que vocês escreveram.		(Mostrando a escrita de Luciana) Não! Esse é muito grande.
	Bom... (ri). Então agora eu o leio de outra maneira: oito "milhões" novecentos e vinte e quatro.	

Luciana compreende muito bem — e compartilha — a objeção formulada por Leandro. Seguramente, é por isto que propõe uma nova interpretação de sua escrita, fazendo-a corresponder a um número maior, tão alto que pudesse ser representado por uma escrita de nove algarismos. No entanto, quando lhe é pedido — minutos depois — que escreva sete mil e vinte e cinco e mil quinhentos, ela escreve: 7100025 e 1000500.

A primeira manifestação de que as crianças começam a tomar conta do conflito é, portanto, a perplexidade, a insatisfação diante da escrita por elas mesmas produzida. Esta insatisfação leva logo a efetuar correções dirigidas a "diminuir" a escrita — ou a interpretá-la atribuindo-lhe um valor maior —, porém, estas correções somente são possíveis depois de terem produzido a escrita. Deste modo, os ajustes efetuados pelos alunos antes citados representam uma compreensão local: eles conseguem encontrar uma solução mais ou menos satisfatória reduzindo a quantidade de algarismos, porém, esta solução não funciona ainda de forma antecipatória, e por isso voltam a enfrentar-se com o conflito diante de cada novo número que tentam escrever.

Como chegam as crianças a encontrar uma solução que lhes permita superar o conflito formulado?

O processo evidenciado por Nádia ao longo das duas entrevistas que tivemos com ela, com um intervalo de quinze dias, nos ajudará a responder a esta pergunta. Durante o primeiro encontro, suas respostas são semelhantes às de alguns alunos que já citamos:

Pesquisador	*Nádia*
(Antes, ela escreveu convencionalmente 2000–4000–9000–10000, e produziu outras escritas — 1000100 para mil e cem e 1000500 para mil e quinhentos — estabelecendo correspondência com a numeração falada).	
E novecentos e cinqüenta, como você escreveria?	(Fica pensando, escreve 90050, olha longo tempo sua escrita.) Me enganei!
Como é?	Não sei.
E novecentos e cinco, como o escreves?	Assim (9005) ou assim (905).
Das duas maneiras?	Para mim é assim (indica o 905).
Por que em novecentos e cinco colocas um zero e em novecentos e cinqüenta colocas dois?	Porque aqui (90050), me enganei... Tem que ser assim: 9050.
E novecentos e quarenta e oito?	(Escreve 9048.)
Entre novecentos e quarenta e oito e mil, qual é mais?	Mil.
(Brincando com dinheiro, o experimentador pede a Nádia que lhe entregue três mil australes. Nadia lhe dá três bilhetes de mil; então lhe pede dois mil trezentos e cinqüenta australes. Nadia entrega-os corretamente.)	
Que é mais, dois mil trezentos e cinqüenta australes ou três mil?	Três mil!
Como você escreveria três mil?	(Escreve 3000.)
E dois mil trezentos e cinqüenta?	(Escreve 200030050.)

Pesquisador	*Nádia*
Por que este que é menor tem tantos números?	Como é menor?
Você me disse antes que dois mil trezentos e cinqüenta é menor que três mil.	Não, não sei. (Fica muito preocupada, pensa um longo tempo.)
Tens algum problema?	Sim.
Qual é o problema?	Que não entendo nada.
Para mim parece que entendes um monte.	(Ri)... Mas isto é muito esquisito... porque olha: (mostrando sua escrita anterior) 2000 300 50 dois mil trezentos cinqüenta
Se escreve assim? outra	Eu acho que não (ri). Porque não tenho maneira de escrevê-lo... Por agora o escrevo assim.
Então te parece que não é assim, porém como não tens outra maneira, o escreves assim.	Isso mesmo.
E como tu achas que se deveria escrever? Com mais números ou com menos?	Com menos.
Com quantos números te parece que deve ser escrito?	Três... Quatro... Algo assim.
Mais ou menos como qual?	Como este (mostra 9000, depois de ter revisado suas escritas anteriores).

Pode observar-se que Nádia começa a "diminuir" suas escritas: no caso de novecentos e cinco, ela propõe desde o começo duas possibilidades, uma das quais está em correspondência com a numeração falada, enquanto a outra — a que finalmente escolhe e que coincide com a convencional — tem um zero a menos. Depois de corrigir neste mesmo sentido sua escrita original de novecentos e cinqüenta, ela produz diretamente 9048 para novecentos e quarenta e oito, omitindo desta vez "de modo antecipatório" o outro zero (de novecentos) que provavelmente teria incluído se não estivesse tentando controlar suas escritas para que incluíssem menos algarismos do que os que resultam ao estabelecer correspondência com a numeração falada. No entanto, a antecipação com respeito à eliminação de zeros deixa de funcionar quando se trata de escrever dois mil trezentos e cinqüenta. E mais: apesar de ter acabado de afirmar (em relação aos australes) que três mil é maior que dois mil trezentos e cinqüenta, ela parece "esquecer" esta afirmação quando o pesquisador a vincula à quantidade de algarismos de suas escritas e pergunta surpresa: "como que é menor?".

Apesar desse "esquecimento", Nádia está em condições de reconhecer que está se defrontando com um sério problema que, cedo ou tarde, terá que resolver e que a levará a modificar sua conceitualização da escrita numérica. A consciência que ela tem da provisoriedade do conhecimento *"por enquanto* escrevo assim" é francamente notável.

Ainda que desta vez ela não corrija sua escrita (200030050), suas respostas finais indicam que sabe em que direção iria corrigí-la: trata-se de conseguir que esta escrita tenha só quatro algarismos. Como fazer?

Este é o problema que fica formulado ao final da primeira entrevista e Nádia seguirá refletindo acerca dele em nossa ausência. De fato, ao iniciar o segundo encontro, ela indica:

Pesquisador	*Nádia*
	Da outra vez fiz tudo errado, me enganei muito.
Por que você acha que errou muito?	Porque nos números grandes, por exemplo o duzentos... o duzentos e cinco, eu o fiz assim: 2005, e tinha que fazer assim: 205.
Como você descobriu que duzentos e cinco é assim? (205)	Depois fiquei pensando que tinha me enganado... Não sei como explicar.
E duzentos e trinta e cinco como é?	235 (Escreve o zero em cima do três)
Não leva nenhum zero no duzentos e trinta e cinco?	Não.
E no outro dia você tinha escrito 2035?	Sim.
E naquela vez, por que parecia que levava zero?	Não sei.
E como você escreve novecentos e cinqüenta e oito?	958.

Não leva zeros? Nenhum zero?	Não.
Pesquisador	*Nádia*
E novecentos e cinco?	(Escreve 9050, o risca, logo escreve 900 e coloca um cinco sobre o último zero.) 905
Por que aqui (905) leva zero e ali (958) não leva zero?	Porque aqui (905) é cinco e ali (958) cinqüenta e oito... Porque cinqüenta e oit são dois números e cinco é um só.
E o que acontece se a este (905) não coloco nenhum zero?	Se não colocar nenhum zero, é noventa e cinco. Precisa colocar para que se saiba qu novecentos e cinco.
[...] E o dois mil e quinhentos, como será?	5 2500. (Escreve primeiro 2000, com o 5 sobre o primeiro zero.)
Você pode contar o que pensou?	Não sei.
E o dois mil quinhentos e cinqüenta e oito?	558 2558 (Escreve primeiro 2000 e logo, sobre zeros, 5, 5 e 8).
Que fantástico! Me explique como fez, assim eu conto a outras crianças: esse método que você utilizou pode servir a outras crianças.	Primeiro coloco dois mil, e depois vou colocando... coloco quinhentos e cinqüent oito, porque se me engano e coloco um zero fica "solto".

Nádia elaborou uma estratégia que lhe permite superar o conflito formu
do: ela pode agora — ao contrário do que acontecia na entrevista anterior
antecipar com exatidão a quantidade de algarismos que terá o número solici
do. Esta antecipação parece ser possível graças a uma ressignificação da relaç
entre a escrita dos "nós" e a dos números posicionados nos intervalos entre el

De fato, as últimas produções de Nádia apóiam-se — como as anteriores
na escrita convencional dos "nós" (900 ou 2000 neste caso), porém, a maneira
que se utiliza este apoio variou radicalmente: enquanto que antes
justaposicionavam os símbolos correspondentes às partes da denominação o
do número (2000 300 50, por exemplo) — e logo faziam-se correções para "di
nuir" o número resultante —, agora a escrita do número se usa como modelo

para fixar a quantidade de algarismos que deve ter o número a ser representado que então é "recheado", substituindo os zeros pelos números correspondentes.

Notemos que Nádia descobriu a possibilidade de usar de outra maneira uma informação que já possuía. Por que a descobriu neste momento e não antes? Porque esta possibilidade adquire sentido — acreditamos — quando se constitui no instrumento que permite resolver um conflito do qual tomou consciência. A utilização da escrita do "nó" como modelo para a de outros números aparece precisamente quando Nádia está se perguntando como fazer para diminuir a quantidade de algarismos de sua escrita e, mais precisamente ainda, como fazer para reduzí-la à mesma quantidade de algarismos que corresponde aos "nós" entre os quais estão compreendidos os números que tenta representar.

Portanto, quando Nádia antecipa que a escrita de dois mil trezentos e cinqüenta terá quatro algarismos, seguramente não baseia-se só no conhecimento específico de que dois mil se escreve com essa quantidade de algarismos, mas também em uma outra conclusão mais geral que ela — como muitos outros alunos — elaborou a partir da informação fornecida pela escrita convencional: os centos têm três algarismos, os milhares quatro.

Em síntese, as escritas que correspondem à numeração falada entram em contradição com as hipóteses vinculadas à quantidade de algarismos das notações numéricas. Tomar consciência deste conflito e elaborar ferramentas para superá-lo parecem ser passos necessários para progredir até a notação convencional.

Temos tentado descrever os aspectos essenciais do processo através do qual as crianças se aproximam da compreensão sobre a natureza de nosso sistema de numeração; mostramos que as crianças produzem e interpretam escritas convencionais muito antes de poder justificá-las apelando à lei do agrupamento recursivo; colocamos em evidência conceitualizações e estratégias que as crianças elaboram em relação à notação numérica.

É uma opção didática levar em conta ou não o que as crianças sabem, as perguntas que se fazem, os problemas que se formulam e os conflitos que devem superar. É também uma decisão didática levar em consideração a natureza do objeto de conhecimento e valorizar as conceitualizações das crianças à luz das propriedades desse objeto. A posição que em tal sentido temos assumido inspira tanto a análise da relação existente entre as conceitualizações infantis e o sistema de numeração como a crítica ao ensino usual e o trabalho didático que propomos. De todas estas questões falaremos nos pontos seguintes.

III

Relações entre o que as crianças sabem e a organização posicional do sistema de numeração

Segundo afirmam as crianças, um número é maior que outro "porque tem mais algarismos" ou "porque o primeiro é quem manda". O saber que assim se expressa se refere a propriedades dos números ou a propriedades da notação numérica?

A pergunta que antecede pode resultar estranha: estamos tão acostumados a conviver com a linguagem numérica que em geral não distingüimos o que é próprio dos números como tais — quer dizer, do significado — das propriedades do sistema que usamos para representá-los. No entanto, esta distinção é necessária.

Com efeito, enquanto as propriedades dos números são universais, as leis que regem os diferentes sistemas de numeração produzidos pela humanidade não o são.

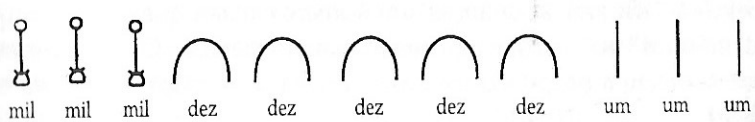
"Oito é menor que dez" é uma afirmação válida em qualquer cultura, independentemente do sistema de numeração que ela utiliza. Porém, se esta afirmação se justifica afirmando que "oito tem um só algarismo e dez tem dois", se está utilizando uma argumentação que é específica dos sistemas posicionais, já que nos sistemas não-posicionais a quantidade de algarismos não está relacionada com o valor do número.

Então, o que tem o sistema posicional que os outros não têm? Justamente, a posicionalidade. Ela é a responsável pela relação quantidade de algarismos-valor do número; dela depende também a validade do "o primeiro é quem manda".

Em nosso sistema de numeração — como é sabido —, o valor que representa cada algarismo se obtém multiplicando esse algarismo por uma determinada potência de base. Se um número tem mais algarismos que outro, necessariamente intervieram em sua decomposição potências de dez de *maior grau* que as envolvidas no outro, e em conseqüência será maior.

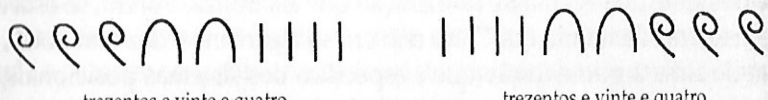
Por outro lado, quando se trata de dois números da mesma quantidade de algarismos — com exceção dos que comecem com o mesmo algarismo — é o primeiro quem determina qual é o maior, porque esse algarismo indica por quanto deve ser multiplicada a potência de grau maior que "intervém" no número. Por razões semelhantes, se os primeiros algarismos fossem iguais, a responsabilidade de determinar o número maior seria transferida ao algarismo imediatamente posterior, e assim sucessivamente.

O contraste com sistemas não-posicionais contribui para esclarecer a questão. Vejamos, por exemplo, o que acontece no sistema de numeração egípcio (5000 a.C.), que era aditivo e dispunha de símbolos só para representar as potências de 10. O número 3053 se anotava assim:



No sistema egípcio, a quantidade de símbolos de um número não informa a respeito de sua magnitude: para representar, por exemplo, 9999 utilizam-se 36 símbolos, enquanto que 10000 representava-se com um símbolo só.

Além disso, cada símbolo representava sempre o mesmo valor, não importando a posição que ocupasse e mesmo que uma convenção estabelecesse determinada ordem de notação, esta notação podia ser alterada sem que por isso mudasse a interpretação do número representado.



É indubitável que, se nossos entrevistados houvessem sido crianças egípcias do ano de 5000 a.C., teríamos obtido resultados muito diferentes. Como se trata de crianças nascidas nos umbrais do século XXI, imersas numa cultura digitalizada, suas conceitualizações apontam à organização posicional de nosso sistema de numeração.

No entanto, como já vimos, nem tudo é posicional na vida das crianças. A numeração falada se interpõe no caminho da posicionalidade e dá origem a produções "aditivas". Estas produções são facilmente interpretadas não só pelos adultos, como também pelos colegas que já escrevem convencionalmente os números em questão, o que coloca em evidência uma indubitável vantagem dos sistemas aditivos: sua transparência.

De fato, para interpretar um número representado de maneira aditiva — seja em um sistema como o egípcio ou nas aproximações de nossas crianças, baseadas na numeração falada — é suficiente somar os valores dos símbolos utilizados.[8]

Um sistema posicional é ao mesmo tempo muito menos transparente e muito mais econômico que um sistema aditivo.

É menos transparente porque o valor de cada símbolo depende da posição que ocupa, e porque essa posição é o único vestígio da presença de uma potência da base. Ao contrário do que acontece ao interagir com outros sistemas que utilizam símbolos específicos para indicar a potência da base, para interpretar um número representado em um sistema posicional é necessário inferir qual é a potência da base pela qual deve-se multiplicar cada algarismo.

É mais econômico porque, justamente como conseqüência do valor posicional, uma quantidade finita de símbolos dez — em nosso caso — é suficiente para registrar qualquer número.[9] Em um sistema como o egípcio, no entanto, a quantidade de símbolos necessários para que seja possível escrever qualquer número não é finita: se dispõe de símbolos para um, dez, cem, mil, dez mil, cem mil e um milhão — são os que provavelmente existiram na cultura egípcia — e se pode escrever qualquer número até nove milhões, novecentos e noventa e nove mil, novecentos e noventa e nove, porém será necessário criar um novo símbolo para representar dez milhões. A criação deste novo símbolo permite estender a escrita a todos os números menores que cem milhões, porém a representação deste último exigirá um novo símbolo e esta exigência voltará a apresentar-se cada vez que apareça uma nova potência de base.

Economia e transparência não são variáveis independentes: quanto mais econômico é um sistema de numeração, menos transparente se apresenta. Um sistema como o egípcio é quase uma tradução das ações de contar, agrupar e reagrupar; foi necessário ocultar essas ações por trás da posicionalidade para conseguir um sistema cuja economia seja indiscutível.

Quem, como as crianças, tenta apropriar-se de nosso sistema de numeração, deverá descobrir o que ele oculta. Elas começam — como vimos — por detectar aquilo que lhes resulta observável no contexto da interação social. A partir destes conhecimentos, multiplicam suas perguntas a respeito do sistema e com elas chegam à escola. As respostas oferecidas no âmbito escolar correspondem verdadeiramente às perguntas que as crianças formulam?, deveriam sê-lo? É válido o esforço da escola por explicitar tudo aquilo que o sistema de numeração

8 Entendemos que quando as crianças produzem uma escrita como 1000500 (1500), estão usando 1000 e 500 como "símbolos originais".

9 Atualmente estamos tentando estabelecer como e quando as crianças descobrem esta característica de nosso sistema.

oculta? Tem sentido a tentativa de evitar que as crianças enfrentem a complexidade da notação numérica? Por que reduzir a reflexão sobre o sistema ao ritual associado às unidades, dezenas, centenas...?

IV

Questionamento do enfoque usualmente adotado para ensinar o sistema de numeração

A modalidade que o ensino da notação numérica em geral assume pode caracterizar-se assim:

- Estabelecem-se metas definidas por série: na primeira trabalha-se com números menores que cem, na segunda com números menores que 1000 e assim sucessivamente. Só a partir da quinta série manipula-se a numeração sem restrições.
- Uma vez ensinados os dígitos, se introduz a noção de dezena como conjunto resultante do agrupamento de dez unidades, e só depois apresenta-se formalmente para as crianças a escrita do número dez, que deve ser interpretada como representação do agrupamento (uma dezena, zero unidades). Utiliza-se o mesmo procedimento cada vez que se apresenta uma nova ordem.
- A explicação do valor posicional de cada algarismo em termos de "unidades", "dezenas", etc., para os números de determinado intervalo da série considera-se requisito prévio para a resolução de operações nesse intervalo.
- Tenta-se "concretizar" a numeração escrita materializando o agrupamento em dezenas ou centenas.

Dito de outro modo, precisa-se: trabalhar passo a passo e com perfeição, administrar o conhecimento ministrando-o em cômodas quotas anuais, transmitir de uma vez só e para sempre o saber socialmente estabelecido.

É como os números que apresentam-se um a um e o fazem com método; além de dar seu nome, esforçam-se por exibir seu patrimônio em matéria de dezenas e unidades. Fornecem informação exaustiva acerca de seus dados pessoais, porém o âmbito de suas relações é tão limitado que se reduz aos vizinhos mais chegados.

Pretende-se simultaneamente graduar o conhecimento e chegar desde o começo ao saber oficial. São compatíveis estas duas intenções? Se recortamos drasticamente o universo dos números possíveis, se — ao introduzir os números de um em um e predeterminar uma meta para cada série escolar — se obstaculiza a comparação entre diferentes intervalos da seqüência e dificulta-se a descoberta das regularidades, estaremos propiciando realmente o acesso às regras que organizam o sistema de numeração? E se isto não acontece assim, qual é o "saber oficial" que efetivamente se está ministrando?

Saber aprimorado e *graduação do saber* parecem incompatíveis. Teremos que renunciar à esperança de comunicar de imediato o saber definitivo, ou deveremos renunciar à "dosificação" do conhecimento. Ou talvez seja necessário renunciar a ambas.

"Passo a passo e aperfeiçoadamente" é — por outro lado — uma afirmação que as crianças não estão dispostas a aceitar: elas pensam ao mesmo tempo sobre os "dezes", os milhões e os milhares, elaboram critérios de comparação fundamentados no contraste entre categorias de números mais ou menos afastados; podem conhecer a notação convencional de números muito "grandes" e ainda assim não manipular os números menores. As crianças não precisam — lembremos — apelar a "dezenas" e "unidades" para produzir e interpretar escritas numéricas; saber "tudo" acerca dos números não é portanto requisito para usá-los em contextos significativos.

Antecipamos uma possível objeção: ainda que seja possível prescindir de unidades e dezenas quando só se trata de ler e escrever números, não será possível deixá-las de lado no momento de resolver operações. Esta objeção é parcialmente válida, como quando pensamos nos algarismos convencionais — nos famosos "vai um" e "peço emprestado" — como único procedimento possível; deixa de sê-lo quando se admitem algarismos alternativos.

Por que pensar em algarismos alternativos? Porque os procedimentos que as crianças elaboram para resolver as operações têm vantagens que não podem ser depreciadas se comparadas com os procedimentos usuais na escola.

Uma desvantagem evidente dos algarismos convencionais é que — por exigirem que se some ou subtraia "em coluna", isolando cada vez os algarismos que correspondem a um mesmo valor posicional — pode-se perder de vista quais são os números com os quais se está operando. Algo muito diferente acontece com as propostas das crianças, já que — como veremos no próximo ponto — as formas de decomposição que elas colocam em prática permitem conservar o valor dos termos na operação.

Por outro lado, enquanto que a antecipação do resultado se torna difícil (ou impossível) quando se começa a somar ou a subtrair pela direita — isto é, pelo menor valor posicional —, a persistente decisão das crianças de começar pela esquerda explicitando o valor representado pelos algarismos[10] coloca em primeiro plano o cálculo aproximado, o qual permite controlar o resultado.

Desta maneira os procedimentos das crianças fazem desaparecer a diferença entre contas "com dificuldade" e "sem dificuldade".

Se a interpretação dos algarismos em termos de dezenas e unidades não é requisito para a leitura e escrita de números, se também não é condição necessária para resolver operações, por que tomá-la como ponto de partida? Valerá a pena investir tanta energia em uma tentativa cujo resultado quase inevitável é o recitado mecânico dos termos em questão?

O esforço para conseguir que as crianças compreendam algo tão complexo como nosso sistema de numeração — e para evitar o risco de uma simples memorização — tem levado a utilizar diferentes recursos para materializar o agrupamento.

Um destes recursos consiste em criar um código que introduz símbolos específicos — círculos, quadrados, triângulos — para representar aquilo que em nosso sistema só pode inferir-se a partir da posição: as potências de dez. Os símbolos em questão devem somar-se para determinar qual é o número representado.

A semelhança com o sistema egípcio é notável. E a esta semelhança se refere o núcleo de nossa objeção: paradoxalmente, para que as crianças compreendam a posicionalidade, se faz desaparecer a posicionalidade.

Uma crítica semelhante pode aplicar-se a outro dos recursos usuais na escola: colocar em correspondência o algarismo posicionado no lugar das unidades com elementos "soltos", o posicionado no lugar das dezenas com "agrupamentos" de dez, e o que está no lugar das centenas com "agrupamentos de cem". Esta maneira de proceder tem a vantagem de apelar ao agrupamento realizado pelas crianças em vez de partir de um código imposto; no entanto, ao considerar o resultado final da agrupação, apresenta o mesmo inconveniente que a materialização através de figuras geométricas: a posição deixa de ser importante para se entender de que número se trata, já que, seja qual for a ordem em que forem colocados os "agrupamentos" e os "palitinhos" soltos, o total de elementos será sempre o mesmo.

[10] Se se trata — por exemplo — de somar 83 e 35, um procedimento possível seria: 80 + 10 = 90; 90 + 10 = 100; 100 + 10 = 110; 110 + 8 = 118

O pressuposto subjacente aos dois recursos descritos parece ser o seguinte: para que o nosso sistema de numeração resulte compreensível, é necessário transformá-lo em outro sistema de numeração.

Finalmente, analisaremos a utilização do ábaco, um instrumento que — diferentemente dos materiais anteriores — reflete claramente a posicionalidade do sistema.

Duas idéias subjazem ao emprego didático do ábaco: agrupar e reagrupar são ações imprescindíveis para compreender a posicionalidade; a representação de uma quantidade no ábaco pode traduzir-se diretamente à notação numérica convencional, e essa tradução traz luz sobre a organização do sistema.

Os dois pressupostos são objetáveis segundo nossa perspectiva. Por um lado, como vimos, a noção de agrupamento não é a origem da posicionalidade: as crianças descobrem esse princípio de maneira totalmente independente das ações de agrupar e reagrupar objetos, o elaboram a partir de sua ação intelectual sobre as escritas numéricas que as rodeiam. Por outro lado, para que apelar a uma tradução se a versão original está ao alcance da mão?

De qualquer forma, se o ábaco fosse hoje — como o foi na antigüidade — um instrumento de cálculo socialmente vigente, sua utilização na escola estaria com certeza justificada. Dadas as condições atuais, não deveríamos decidir-nos a substituir o ábaco pela calculadora?

Todos os recursos concretizadores que analisamos têm em comum a esperança de reconstruir uma relação entre a notação numérica e as ações de agrupar e reagrupar. Esta relação, que efetivamente possibilitou a invenção dos diversos sistemas de numeração produzidos no transcurso da história, já não está presente no uso social que se faz do sistema. Talvez por isso as crianças não necessitem pensar que alguém formou oito grupos de dez e depois reagrupou formando oito grupos de cem para entender que, em 880, o primeiro oito representa oito centos, e o segundo oito "dezes".

A notação numérica aparece diante das crianças como um dado da realidade: é necessário entender o mais cedo possível como funciona, para que serve, em que contextos se usa; averiguar por que chegou a ser como é não é tão urgente para elas, talvez porque compreendê-lo não seja de maneira nenhuma um ponto de partida e sim possa constituir-se no ponto de chegada que se faz possível depois de um longo e complexo percurso.

Alguma coisa está falhando no jogo de perguntas e respostas que — segundo este enfoque — tem lugar na aula: oferecem-se respostas para aquilo que as crianças não perguntam, se ignora que eles já encontraram algumas respostas e que ainda se fazem muitas perguntas, evita-se formular perguntas que poderiam orientar a busca de novas respostas.

Se não é restringir a numeração, se não é explicitar o valor dos algarismos m termos de dezenas e unidades, se não é apelar exclusivamente aos algoritmos onvencionais, se não é apoiar-se em concretizações externas ao sistema, se não é pontar de início para o saber acabado..., qual será então o caminho que pode elinear-se no contexto escolar para andar entre os números?

V

Iostrando a vida numérica da aula

> [...] O ensino direto do saber é impossível. [...] o uso e a destruição dos conhecimentos precedentes fazem parte do ato de aprender. Conseqüentemente, temos que admitir uma determinada reorganização didática do saber, que troca seu sentido, e temos que admitir também — ao menos de modo transitório — uma determinada dose de erros e contradições, não só por parte dos alunos, mas também por parte do ensino."
>
> G. Brousseau

> "Como por enquanto não tenho outra maneira de escrever isso, escrevo assim"
>
> Nádia

Trabalhar com a numeração escrita e só com ela; abordá-la em toda sua omplexidade; assumir que o sistema de numeração — enquanto objeto de enno — passará por sucessivas definições e redefinições antes de chegar a sua tima versão. São estas as idéias que desde o princípio orientaram nosso trabao didático.

Do uso à reflexão e da reflexão à busca de regularidade, esse é o percurso ie proporemos reiteradamente.

Usar a numeração escrita é produzir e interpretar escritas numéricas, é esbelecer comparações entre tais escritas, é apoiar-se nelas para resolver ou reesentar operações.

Usar a numeração escrita — quando alguém está tentando apropriar-se de— torna possível que apareçam, em um contexto pleno de significado, probleis que poderão atuar como motor para desvendar a organização do sistema.

A busca de soluções levará a estabelecer novas relações, a refletir sobre as spostas possíveis e os procedimentos que conduziram a elas, a argumentar a vor ou contra as diferentes propostas, a validar determinados conhecimentos e

a rejeitar outros. No decorrer deste processo, começam a surgir as regularidades do sistema.

As regularidades aparecem ou como justificação das respostas e dos procedimentos utilizados pelas crianças — ao menos para algumas delas — ou como descobertas que é necessário propiciar para tornar possível a generalização de determinados procedimentos ou a elaboração de outros mais econômicos.

A análise das regularidades da numeração escrita é — como todos sabemos — uma fonte insubstituível de progresso na compreensão das leis do sistema por parte das crianças.

Então, se pretendemos que o uso da numeração seja realmente o ponto de partida da reflexão, se esperamos que seja efetivamente possível estabelecer regularidades, torna-se necessário adotar outra decisão: trabalhar desde o começo e simultaneamente com diferentes intervalos da seqüência numérica. Deste modo, será possível favorecer comparações entre números da mesma e de diferentes quantidades de algarismos, promover a elaboração de conclusões — tais como "os cens precisam de três, os mils de quatro" — que funcionaram como instrumentos de autocontrole de outras escritas numéricas, propiciar o conhecimento da escrita convencional dos "nós" e sua utilização como base da produção de outras escritas, conseguir — em suma — que cada escrita se construa em função das relações significativas que mantêm com as outras.

Introduzir na sala de aula a numeração escrita tal como ela é, e trabalhar a partir dos problemas inerentes à sua utilização, são duas regras a que nos submetemos inelutavelmente na complexidade do sistema de numeração.

O desafio que este enfoque produz é evidente: supõe correr o risco de desafiar as crianças com problemas cuja resolução ainda não lhes foi ensinada, obriga a trabalhar simultaneamente com respostas corretas — ainda que às vezes parcialmente — e com respostas erradas, assim como também a encontrar maneiras de articular procedimentos ou argumentos diferentes para tornar possível a socialização do conhecimento. Trata-se, então, de aceitar a coexistência de diferentes conceitualizações a respeito do sistema, de investir todo o esforço necessário para conseguir que a diversidade — no lugar de constituir-se em um obstáculo — opere a favor do processo do grupo e de cada um de seus membros.

O trabalho em aula está assim envolvido pela provisoriedade: não só são provisórias as conceitualizações das crianças como também o são os aspectos do "objeto" que é colocado em primeiro plano, os acordos grupais que são fomentados, as conclusões que vão sendo formuladas, os conhecimentos que se consideram exigíveis.