

1. Física despretada:

2/3/09

Vimos estados ligados (estacionários) que descrevem ^{ou vários} átomos, etc

Para interagir com ~~estes~~ outros sistemas devemos interagir com eles de "espalhamento":



O espalhamento é dito ser elástico se $p_i = p_f$ e o sistema opaco está ligado

Espalhamento é a base da nossa investigação da estrutura. Apesar de ser um processo essencialmente dependente do tempo pode ser descrito por métodos independentes do tempo.

Obs: $v \rightarrow 0$
 $q \rightarrow \infty$

0.) Separação do movimento do centro de massa

$$H_{cm} = \frac{p_1^2}{2\mu_1} + \frac{p_2^2}{2\mu_2} + V(x_1 - x_2) \Rightarrow H = H_{cm} + H_{rel}$$

onde $H_{cm} = \frac{P^2}{2M}$ e $H_{rel} = \frac{p^2}{2\mu} + V(x)$ onde $M = \mu_1 + \mu_2$ e $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$

$H|E\rangle = E|E\rangle$
 $H_{rel}|E\rangle = E|E\rangle$
 $H_{cm}|E\rangle = E_{cm}|E\rangle$
 $E = E_{cm} + E_{rel} = E_{cm} + E_{rel}$

três 10' o mov. relativo

2. Fatos básicos: (em sistemas tri-dimensionais)

a.) Estados ligados: são auto-estados de H
 $H|E\rangle = E|E\rangle \quad (1)$

tais que suas funções de onda $\psi_E(x) = \langle x|E\rangle$ são

normalizadas, $\int dx |\psi_E(x)|^2 < \infty$

Uma das condições de contorno usadas na solução de (1)

é que $|\psi_E| \rightarrow 0$ suficientemente rápido para $|x| \rightarrow \infty$.
Lembre-se que o espectro de E é discreto!

Estes estados (em muitos casos) são formados por ~~uma~~ conjunto de

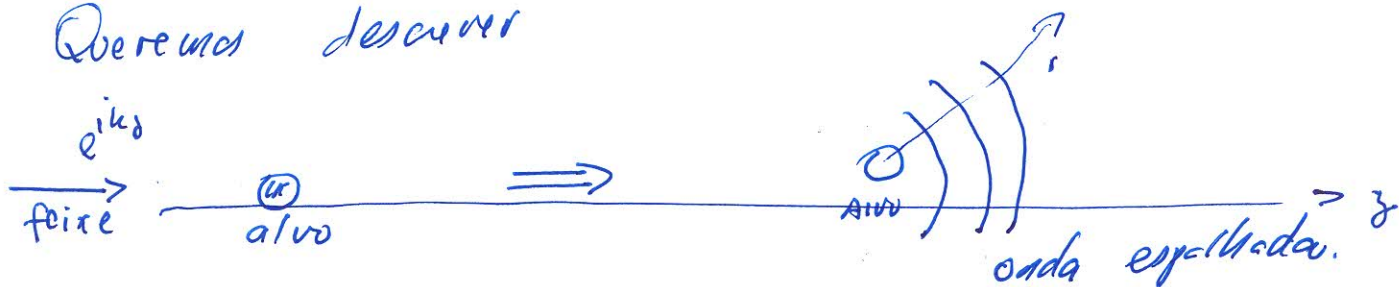
Completa pois não descrevem espalhamento!

b). Estados de espalhamento: são auto-estados de H

$$H|E\rangle = E|E\rangle \quad (1)$$

porém são não normalizáveis. A condição de normalização neste caso deve ser dada pela FÍSICA DESEJADA!

Queremos descrever



Suponhamos que o potencial de interação seja de curto alcance (ou seja, o que isto significa) e $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$ a solução de (1) deve descrever uma partícula com momento k , $\frac{e^{ikr}}{r}$ onde $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$

com isto impomos que

$$\Psi_E(r) \approx e^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2) \quad \text{para } r \rightarrow \infty$$

Note que: 1) Ψ_E é ~~normalizável~~ normalizável. Poderíamos obter uma

prescrição t.f. ~~física~~ $\Psi_E \approx N \left(e^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \right)$ estando normalizado,
(3)

fixando N .

2) Este processo fornece a resposta desejada graças de

ser fisicamente uma partícula com $e^{ikz} = \frac{e^{ikr}}{r}$ (3 f-códex) ao
fim o que processo de produção do decaimento! Voltamos a esse ponto mais tarde!

c) Seção de choque diferencial:

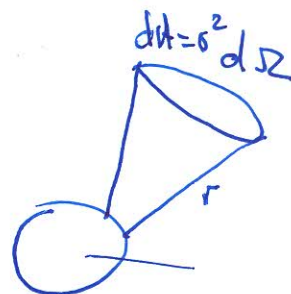
SCI-3

Para feixes ^{de partículas} não interagentes entre si (e.g. feixes para chamas) decaus
(evitamos problemas de muitos corpos)

$$\dot{N}_{sc} = \frac{\# \text{ part. esp. } r/dR}{dt}$$

$$d' \text{ prop. to } dR r^2 = dA$$

$$e' \text{ prod do fluxo incidente} \Rightarrow$$



$$\dot{N}_{sc} = \left(\frac{d\sigma}{dR} \right) (r^2 dR) F_{inc} \quad (1)$$

↳ coef. de proporcionalidade

$$\text{Mas o fluxo incidente } d: \quad J_g = F_{inc} = \frac{\hbar}{2\pi i} \left(\psi_{inc}^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right) \Big|_g$$

$$= |N|^2 \frac{\hbar k}{\mu} \quad (2)$$

$$\text{Por outro lado } \dot{N}_{sc} \approx r^2 dR \int_r^{r+dr} = r^2 dR \frac{\hbar}{2\pi i} \left(\psi_{sc}^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right)$$

$$\approx |N|^2 \frac{\hbar k}{\mu} \frac{|f|^2}{r^2} \quad (3)$$

$$\text{Logo } (1) + (2) + (3) \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{dR} = |f|^2} \quad (4)$$

Obs.: (1) Desprezamos o termo de interferência entre o campo espalhado e a incidência. Isso pode ser feito? NAO, essa é a origem do termo ótico!

(2) ~~Para~~ Essa validade é de fato válida e usamos aproximação de onda e ~~precisamos~~ a consideramos o termo de interferência, obtendo o termo ótico!

3) Método das ondas parciais: ^{e é invariante} ~~Ve~~ ~~estacionária~~ ~~par~~ SCI-4
 notações $V(x) = V(|x|)$

a) Relembrando as soluções de partículas livres em coord. esféricas.

Diagonalizando $H = \frac{p^2}{2\mu}$, L_x , e L_z temos que

$$\langle x|x|E\rangle = R_{Elm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

onde R_{El} satisfaz: $\frac{d^2 R_{Elm}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{Elm}}{dr} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{Elm} = 0 \quad (1)$

$\rightarrow \frac{2\mu E}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow R_{Elm} = A j_l(kr) + B y_l(kr) = D h_l^{(1)}(kr) + C h_l^{(2)}(kr)$$

esféricas wave functions

onde $j_l(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}$
 $y_l(x) = (-1)^{l+1} x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x}$

$Pl \rightarrow 0$
 $j_l \rightarrow \frac{P^l}{(2l+1)!!}$

$y_l \rightarrow -\frac{(2l-1)!!}{P^{l+1}}$

$$h_l^{(1)}(x) = j_l + i y_l$$

$$h_l^{(2)}(x) = j_l - i y_l = h_l^{(1)*}$$

○ comportamento assintótico para $r \rightarrow \infty$ e'

$$j_l(x) \rightarrow \frac{\sin(x - \frac{l\pi}{2})}{x}$$

$$y_l \rightarrow -\frac{\cos(x - \frac{l\pi}{2})}{x}$$

$$h_l^{(1)} \rightarrow -\frac{i}{x} e^{ix} e^{-i\frac{l\pi}{2}}$$

$$h_l^{(2)} \rightarrow \frac{i}{x} e^{-ix} e^{i\frac{l\pi}{2}}$$

Lembre-se que para $H = \frac{p^2}{2\mu}$ hermitiano

SCI-5

a solução da eq. radial (SCI-4.1) deve satisfazer

$$u_{\ell}(0) = 0 \quad \text{onde} \quad u_{\ell} = R_{\ell}(r) \cdot r$$

Exercício: Mostre que (lista)

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta) \quad (1)$$

$\nearrow$ ~~base~~ diagonalizável $H, \vec{p}$ $\nearrow$ diagonalizáveis H, L^2, L_z

b) Argumento geral: Chamemos de direção z a do feixe incidente. Se Ψ é invariante por rotações em torno o sistema z é invariante por rotações ao longo do eixo z consequências:

(a) Apenas as (soluções) (ondas) com $m=0$ são aceitáveis! ($\Psi_{\text{em}} e^{im\phi}$)

(b) Como $[H, L] = 0 \Rightarrow$ o momento angular total L^2 é conservado $\Rightarrow$ A cada incidente tem momento angular total L e esta a sua espalhada também o terá!

Escrevemos (diagonalizáveis em (1)) que

$$\Psi_{\ell} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l R_{\ell}(r) P_l(\cos\theta) \quad \begin{matrix} C_d \\ \uparrow \\ C_H \end{matrix}$$

onde determinamos $R_{\ell}(r)$.

~~Redução~~

No caso de potenciais de curto alcance R_l é um ~~caso~~ limite
assintoticamente ($r \rightarrow \infty$)

$$R_l \sim \frac{1}{2ikr} \left[\underset{\sim h_l^{(1)}}{\eta_l(k)} e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - \underset{\sim h_l^{(2)}}{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}} \right]$$

Como o espalhamento é reversível ~~no caso~~ l deve ser ($F \equiv \text{fluxo}$)
 $|F_{\text{inc}}| = |F_{\text{refl}}| \Rightarrow |\eta|^2 = 1$

Em geral, o fluxo ~~de~~ ^{de} ~~emissão~~ pode ser ~~um~~ ^{ou}
espalhado de ~~uma~~ ^{uma} ~~maneira~~ ^{maneira} ~~para~~ ^{para} o ~~alvo~~ ^{alvo} ~~que~~ ^{que} ~~entra~~ ^{entra}
A ~~vez~~ ^{vez} ~~que~~ ^{que} ~~entra~~ ^{entra} ~~o~~ ^o ~~alvo~~ ^{alvo} ~~o~~ ^o ~~que~~ ^{que} ~~deve~~ ^{deve}
conservar probabilidade. Neste caso $|\eta_l| < 1$

No caso elástico $\eta_l = e^{i\varphi_l}$

$$\Rightarrow R_l \sim \frac{e^{i\varphi_l}}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \frac{\varphi_l}{2}\right)$$

c) Ondas parciais: Temos que resolver a eq de ond radial

SCI-7

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} (r R_{el}) + \left(V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right) R_{el} = E R_{el}$$

we buscando para $R_{el} = \frac{u_{el}}{r}$ temos

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} u_{el} + \left(V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right) u_{el} = \underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}}_E u_{el} \quad (1)$$

e/ a cond. de contorno $u_{el}(0) = 0$

Para $V(r)$ de certo alcance e $r \rightarrow \infty$

$$\frac{d^2}{dr^2} u_{el} \approx k^2 u_{el} \Rightarrow u_{el} = A \sin \left(\underbrace{k r}_{\substack{\uparrow \\ \text{cte}}} - \frac{l\pi}{2} + \delta_l \right)$$

Note: a) (1) é um problema de auto-valor $\Rightarrow A$ livre
exemplo $A=1$

b) $u_{el}(0) = 0$ fixa outra constante, i.e., δ_l !

c) k é contínuo (7 2a cond. contorno e fixa a energia)

d) Isso não resolve a cond. de contorno

Agora, se não for $\Psi \rightarrow e^{ikr} + \frac{e^{-ikr}}{r} f(k)$ e/ $r \rightarrow \infty$

escrevemos

A|3|09

$$\Psi = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l B_l \frac{u_{el}}{kr} P_l(\cos\theta)$$

Agora usando que $e^{i\frac{1}{2}k} = \sum (i)^l P_l(r)$

SCI-8

$$\psi = e^{ik\delta} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{ikr}}{i2kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (B_l e^{i\delta_l} - 1) P_l$$

$$+ \frac{e^{-ikr}}{i2kr} \sum_l (2l+1) \underbrace{(-B_l e^{-i\delta_l} + 1)}_{\substack{|| \\ 0}} P_l \quad (-1)^l$$

$\Rightarrow B_l = e^{i\delta_l}$

$$\therefore \psi \rightarrow \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1) (e^{i\delta_l} - 1) P_l$$

logo f é dado por

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta)$$

É fácil mostrar que

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

ou encontrar que $\int d\Omega P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'}$

Comentários: 1) Para $v \rightarrow 0 \Rightarrow u_l = r f_l \Rightarrow \delta_l = 0 \Rightarrow \sigma = 0$
como deveria ser

2) Em geral não conseguimos somar a

série. Quando ela pode ser útil?

Classicamente:

Se o potencial tem alcance a ,

SCI-9

O máximo momento angular é $\hbar ka$. Logo, esperamos (no caso quântico) que o espalhamento seja pequeno para ondas c/ $l \gg (\hbar ka)$!

Quanticamente: Partícula livre $\Rightarrow R_e = b_l \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!}$

Logo se l é grande a função de onda ψ muda pouco o potencial para l grande. De fato,

$$\frac{(2l+1)!!}{2^l l!} \sim \frac{\Gamma(2l+1)}{2^l \Gamma(l+1)} \sim 2^{l+\frac{3}{2}} \left(\frac{l}{e}\right)^{l+1} \left(1+\frac{1}{e}\right)^{l+1}$$

$$\therefore f_l(kr) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-\frac{r}{l}} \left(1+\frac{r}{e}\right)^{-l-1} \left(\frac{kr}{2l}\right)^l$$

$$\therefore \text{para } l \gg l_0 = \hbar ka \quad f_l(kr) \rightarrow 0 \quad \text{para } r \rightarrow \infty!$$

3) Note que isso também vale a baixas energias

Se $ka \ll 1$ (pequeno), em geral, bastam os 1^o termos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{4k^2} \left| e^{i\delta_0} \sin \delta_0 + 3 e^{i\delta_1} \sin \delta_1 \cos \theta \right|^2 \approx \frac{1}{4k^2} \left(\sin^2 \delta_0 + 6 \cos \delta_0 \sin \delta_1 \cos \theta + \dots \right)$$

$$\text{onde } \epsilon = 6 \operatorname{Re}(e^{i(\delta_0 + \delta_1)}) = 6 \cos(\delta_0 + \delta_1)$$

Exemplo: Seja uma esfera dura, i.e

SCI-10

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r > a \\ \infty & r < a \end{cases}$$

~~Para r > a~~ Em geral $R_l = A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr)$

$$\text{Para } r \rightarrow \infty \Rightarrow R_l \approx \frac{1}{kr} \left[A_l \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) + B_l \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \right]$$

$$\text{iii} \\ C_l \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)$$

$$\text{ii} \\ C_l \left[\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \cos\delta_l + \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \sin\delta_l \right]$$

$$\therefore \begin{cases} C_l \cos\delta_l = A_l \\ C_l \sin\delta_l = B_l \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\delta_l = -\frac{B_l}{A_l}}$$

$$\Rightarrow \tan\delta_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}$$

$$\text{Para } r=a \Rightarrow R_l(a) = A_l j_l(ka) + B_l n_l(ka) = 0$$

Analisemos o limite $ka \rightarrow 0$, usando a série assintótica

$$j_l \approx \frac{(ka)^{l+1}}{(2l+1)!!(2l-1)!!}$$

$\uparrow$
 primeiro
 termo

$\uparrow$
 $\delta_l \approx \delta_l$

Logo a maior contribuição vem de $l=0$, como esperado!

MAIS ainda,

SCI-11

$$S_0 = ka$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = 4\pi a^2 \Rightarrow 4x \text{ a secção de choque clássica.}$$

Explique! Não se pode dizer
ou de probabilidade!

Exercício: mostre que p/ " $k \rightarrow \infty$ " $\Rightarrow \sigma = 2\pi a^2$! ✓ (escrito)
11/10/01

————— " ————— " —————

4) Equação integral para o espalhamento:

$$H\psi = E\psi \quad \begin{array}{l} H = \frac{p^2}{2\mu} + V \\ E = \frac{k^2 \hbar^2}{2\mu} \end{array} \rightarrow (\nabla^2 + k^2)\psi = V\psi \frac{2\mu}{\hbar^2}$$

Seja $G(x, x')$ a função de Green para este problema.

$$(\nabla^2 + k^2) G(x, x') = \delta(x - x')$$

com o qual podemos escrever

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \int d^3x' G(x-x') \psi(x') V(x') \frac{2\mu}{\hbar^2} \quad (1)$$

↑
solução de $(\nabla^2 + k^2)\psi_0 = 0$

Para que ψ satisficção $\psi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikz} + f \frac{e^{ikr}}{r}$

temos que $G \sim \frac{e^{ik|x|}}{|x|}$ para $|x| \rightarrow \infty$.
Usaremos isto como condição p/ determinar G

~~Seja $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$~~

SCI-12

$\Rightarrow$ Pela simetria de translação

$$G(x, x') = G(x - x'). \text{ Logo definimos } R = x - x' \text{ e}$$

$$(\nabla_R^2 + k^2) G(R) = \delta(R)$$

Usamos agora a transf. de Fourier de G e de δ :

$$(\nabla_R^2 + k^2) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \tilde{G}(p) e^{ip \cdot R} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot R}$$

$$\Rightarrow (-p^2 + k^2) \tilde{G} = 1 \Rightarrow \tilde{G} = -\frac{1}{p^2 - k^2}$$

$$\text{Logo } G(R) = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - k^2} e^{ip \cdot R}$$

tomando R como sendo a direção de $\underline{p}$:

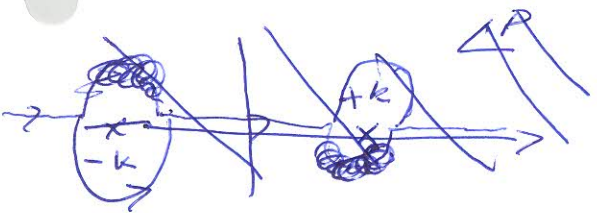
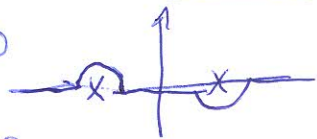
$$G(R) = - \int \frac{d\varphi dp^z p^2 d\cos\theta}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 - k^2} e^{ipR\cos\theta}$$

$$= - \frac{1}{4\pi^2} \int dp \frac{p^2}{p^2 - k^2} \underbrace{\int_{-1}^1 d\cos\theta e^{ipR\cos\theta}}_{\frac{e^{ipR} - e^{-ipR}}{ipR}}$$

$$= - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_0^\infty dp \underbrace{\frac{p}{p^2 - k^2} (e^{ipR} - e^{-ipR})}_{\text{par}} = - \frac{1}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{p}{p^2 - k^2} \frac{(e^{ipR} - e^{-ipR})}{i}$$

A integral tem pólos em $p = \pm k$. Mas podemos mudar o caminho de integração, por exemplo

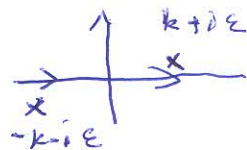
SCI-13



Essa escolha equivale a $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{p^2 - k^2 \pm i\epsilon}$

$$\frac{1}{p^2 - k^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 - k^2 \pm i\epsilon}$$

cujos pólos estão em $p^2 = k^2 \pm i\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \begin{cases} p = k + i\epsilon \\ p = -k - i\epsilon \end{cases}$



Essa escolha é a correta:

$$-\frac{1}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{p}{p^2 - k^2 \pm i\epsilon} \frac{e^{i p R}}{i}$$

$$= \left(-\frac{1}{8\pi^2 k} \right) (2\pi i) \frac{\pm k}{\pm 2k} \frac{e^{\pm i k R}}{i}$$

✓
✓
✓
fechando por cima + noções

fechando por baixo

$$+ \frac{1}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{p}{p^2 - k^2 \pm i\epsilon} \frac{e^{-i p R}}{i} = \left(\frac{1}{8\pi^2 k} \right) (-2\pi i) \left(\frac{-k}{-2k} \right) \frac{e^{\pm i k R}}{i}$$

logo $G(R) = - \frac{e^{i k R}}{4\pi R}$

Note que pelo raciocínio acima
notamos $G(R) = G(R)!$

Juntando tudo em (SCI-11.1) temos que

$$\psi(x) = e^{i k z} - \frac{\mu}{2\pi k^2} \int d^3 x' \frac{e^{i k |x - x'|}}{|x - x'|} \psi(x')$$

para $|x| \rightarrow \infty$

$$|x - x'| \rightarrow |x| - \frac{x \cdot x'}{|x|} \Rightarrow$$

$$\Psi(x) \rightarrow e^{ikx} + \frac{e^{i k |x|}}{|x|} \underbrace{\left(-\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' e^{-i k |x-x'|} V(x') \Psi(x') \right)}_{f(0)!} \quad \text{SCI-14}$$

Está é uma expressão formal pois ~~é~~ não como antes $\Psi(x)$.

SCI 14. $\Rightarrow$ Equação integral para a função de onda radial.

5) Aspectos formais: Eq. de Lippmann-Schwinger

Consideremos $H = H_0 + V$

queremos $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ p/ o espectro contínuo

$$\Rightarrow (E - H_0)|\psi\rangle = V|\psi\rangle$$

Agora podemos inverter $(E - H_0)$:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{E - H_0} V|\psi\rangle. \text{ Todavia, não se pode fazer isso}$$

noção de e.g. $(H_0 - E)|\phi\rangle = 0$. Logo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{E - H_0} V|\psi\rangle + |\phi\rangle.$$

Todavia o espectro é contínuo e com isso essa expressão NÃO está bem definida.

Eg. integral para função de Green radial

5/3/09

SCI-13

$$G(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{x}')}}{k^2 - p^2 + i\epsilon}$$

$$R = |\mathbf{x}|$$

$$r' = |\mathbf{x}'|$$

usando SCIS-11)

$$\downarrow$$

$$= \int \frac{d\Omega_p}{(2\pi)^3} \int dp p^2 \frac{1}{k^2 - p^2 + i\epsilon} \times \sum_{l=0}^{\infty} i^l j_l(kR) (2l+1) P_l(\cos \theta_{\mathbf{x}\mathbf{p}})$$

$$\times \sum_{l'=0}^{\infty} i^{l'} j_{l'}(kr') (2l'+1) P_{l'}(\cos \theta_{\mathbf{x}'\mathbf{p}})$$

Mas

$$P_l(\cos \theta_{\mathbf{p}\mathbf{x}}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^* (\theta_{\mathbf{p}}, \phi_{\mathbf{p}}) Y_{lm} (\theta_{\mathbf{x}}, \phi_{\mathbf{x}})$$

$\Rightarrow$ usando $P_l^* = P_l$)

$$G(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \frac{2}{\pi} \int d\Omega_p \int dp p^2 \frac{1}{k^2 - p^2 + i\epsilon} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kR) Y_{lm}^*(\mathbf{x}_p) Y_{lm}(\mathbf{x})$$

$$\times \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{+l'} (i^{l'})^* j_{l'}(kr') Y_{l'm'}^*(\mathbf{x}_{p'}) Y_{l'm'}(\mathbf{x}')$$

$\nearrow$
trocar

$d\Omega_p$

$$\downarrow$$

$$= \sum_{lm} Y_{lm}(\mathbf{x}) Y_{lm}^*(\mathbf{x}') G_k^{(l)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (2)$$

with

$$G_k^{(l)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dq q^2 \frac{1}{k^2 - q^2 + i\epsilon} j_l(qR) j_l(qr') \quad (1)$$

Substituindo $(A_0)_2^1$ em ψ com $k = k \hat{e}_z$

SCI-106

~~$$\psi(x) = e^{i k \cdot x} + \int d^3 x' G_1(x, x') \frac{2\mu}{\hbar^2} V(x') \psi(x')$$~~

~~$$4\pi \sum_{lm} i^l R_l(kr) Y_{lm}(\Omega_x)$$~~

~~$$= 4\pi \sum_{lm} f_l(kr) Y_{lm}^*(\Omega_k) Y_{lm}(\Omega_x) i^l$$~~

~~$$+ \int d\Omega_{x'} r'^2 dr' \left(\sum_{l'm'} Y_{l'm'}^*(\Omega_{x'}) Y_{l'm'}(\Omega_{x'}) G_l^1(r, r') \right) 4\pi \sum_{lm} R_l(kr) i^l Y_{lm}(x)$$~~

$$e^{i k \cdot x} = 4\pi \sum_{lm} i^l f_l(kr) Y_{lm}^*(\Omega_k) Y_{lm}(\Omega_x)$$

$$\psi(x) = 4\pi \sum_{lm} i^l R_l(kr) Y_{lm}^*(\Omega_k) Y_{lm}(\Omega_x)$$

$$\Rightarrow 4\pi \sum_{lm} (i^l) R_l Y_{lm}^*(\Omega_k) Y_{lm}(\Omega_x) = 4\pi \sum_{lm} i^l f_l(kr) Y_{lm}^*(\Omega_k) Y_{lm}(\Omega_x) +$$

$$4\pi \int d\Omega_{x'} r'^2 dr' \left(\sum_{l'm'} G_l^1 Y_{l'm'}^*(\Omega_{x'}) Y_{l'm'}(\Omega_{x'}) \right) \bar{Y}_{lm}^*(\Omega_k) Y_{lm}(\Omega_x) R_l(kr)$$

igualando os coeficientes de $\sum_l i^l Y_{lm}^*(\Omega_k) Y_{lm}(\Omega_x) \Rightarrow$

$$R_l(kr) = f_l(kr) + \int dr' r'^2 G_l^1(r, r') \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r') R_l(kr')$$

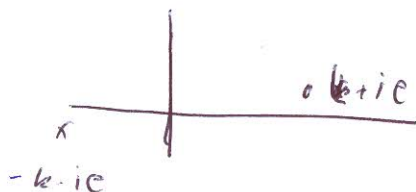
Forma explícita de $G_k^l(r, r')$

Exercício

SC1.100
17

$$G_k^l(r, r') = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{k^2 - q^2 + i\epsilon} \underbrace{f_l(qr) g_l(qr')}_{\text{funções conhecidas}} = -ik \delta_l(kr) h_e^{(1)}(kr)$$

polos



$$(k^2 - q^2 + i\epsilon) = (k + i\epsilon - q)(k + i\epsilon + q)$$

$$f_l = \frac{1}{2} (h_e^{(1)} + h_e^{(2)})$$

$$g_l = \frac{1}{2i} (h_e^{(1)} - h_e^{(2)})$$

$$G_k^l(r, r') = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{k^2 - q^2 + i\epsilon} \left[\begin{array}{l} \text{I} \quad h_e^{(1)}(qr) h_e^{(1)}(qr') + h_e^{(2)}(qr) h_e^{(2)}(qr') \\ \text{II} \quad + h_e^{(1)}(qr) h_e^{(2)}(qr') + h_e^{(2)}(qr) h_e^{(1)}(qr') \end{array} \right] \frac{1}{4}$$

$$\text{I} \quad \frac{\text{fecho}}{\text{por cima}} \frac{1}{2} (2\pi i) \frac{2}{\pi} \frac{1}{4} \left[h_e^{(1)}(kr) h_e^{(1)}(kr') \right] \frac{k^2}{2k} = \frac{i}{4} k \left(h_e^{(1)}(kr) h_e^{(1)}(kr') \right)$$

$$\text{II} \quad \frac{\text{fecho}}{\text{por baixo}} \frac{1}{2} (-2\pi i) \frac{2}{\pi} \frac{1}{4} \left[h_e^{(2)}(-kr) h_e^{(2)}(-kr') \right] \frac{k^2}{2k} = -\frac{i}{4} k \left(h_e^{(2)}(-kr) h_e^{(2)}(-kr') \right)$$

$$\text{III} = \begin{cases} \frac{r > r'}{\text{cima}} & \frac{1}{2} (2\pi i) \frac{2}{\pi} \frac{1}{4} \left[h_e^{(1)}(kr) h_e^{(2)}(kr') \right] \frac{k^2}{2k} = \frac{ik}{4} \left[h_e^{(1)}(kr) h_e^{(2)}(kr') \right] \\ \frac{r' > r}{\text{baixo}} & -\frac{ik}{4} \left[h_e^{(1)}(-kr) h_e^{(2)}(-kr') \right] \end{cases}$$

$$\bar{V} = \begin{cases} \frac{r > r'}{\text{outside}} & -\frac{ik}{4} \left(h_e^{(2)}(kr) h_e^{(1)}(-kr') \right) \\ \frac{r' > r}{\text{inside}} & \frac{ik}{4} \left(h_e^{(2)}(kr) h_e^{(1)}(kr') \right) \end{cases}$$

SCI-13

$$h_e^{(1)}(-kr) = (-1)^l h_e^{(1)}(kr)$$

$$\circ \quad (r > r') \quad \frac{ik}{4} \left[h_e^{(1)}(kr) h_e^{(2)}(kr') - h_e^{(2)}(kr) h_e^{(1)}(kr') \right]$$

$$= \frac{ik}{4} \left[h_e^{(1)}(kr) h_e^{(2)}(kr') - h_e^{(2)}(kr) h_e^{(1)}(kr') \right]$$

$$= \frac{ik}{4} \left[h \right]$$

5. Espalhamento de um pacote de ondas: a) ESTADO

SCI-19

~~Representar~~ e Consideremos

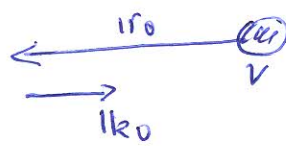
$$H = H_0 + V$$

$$c) H_0 = \frac{p^2}{2\mu}$$

No instante $t=0$ o estado inicial é dado por

$$\Psi(r, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \Psi(k) e^{i k \cdot (r - r_0)}$$

- $\Psi(k) \equiv$ função suave, picada em torno de k_0
- $\Psi(r, 0)$ é localizada em torno de r_0 (Riemann theorem) e com momento bem definido $\hbar k_0$
- assumimos



$r_0 \parallel k_0$ mas no estado opaco

A receita para a evolução temporal é simples: como solução de

$$H \Psi_{\text{est}} = E \Psi_{\text{est}}$$

expandamos

$$\Psi(r, 0) = \sum_n c_n \Psi_n \quad \frac{d\Psi}{dt} = \Psi(r, t) = \sum_n c_n e^{-i E_n t / \hbar} \Psi_n$$

Logo de ver se por giro!

$$\Psi_{\mathbb{R}}(x) = \frac{e^{i k \cdot r}}{(2\pi)^{3/2}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{i k |x - x'|}}{|x - x'|} \Psi_{\mathbb{R}}(x')$$

i) Mostremos inicialmente que $\Psi(r, 0) = \int d^3k \Psi(k) e^{i k \cdot (r - r_0)} \stackrel{-i k \cdot r_0}{=} e^{i k \cdot r} \Psi_{\mathbb{R}}(r) !$

Devemos mostrar que

$$\int d^3k \Psi(k) e^{-i k \cdot r_0} \int d^3x' \frac{e^{i k |x - x'|}}{|x - x'|} \Psi_{\mathbb{R}}(x') = 0$$

Tomemos que

$$\int d^3k \Psi(k) e^{-i k \cdot r_0} e^{i k \cdot (r - r_0)} \Psi_{\mathbb{R}}(x) \stackrel{\Psi \text{ picada em } k_0}{\approx} \Psi_{k_0}(x) \int d^3k \Psi(k) e^{-i k \cdot r_0} e^{i k \cdot (r - r_0)} \stackrel{\approx}{=}$$

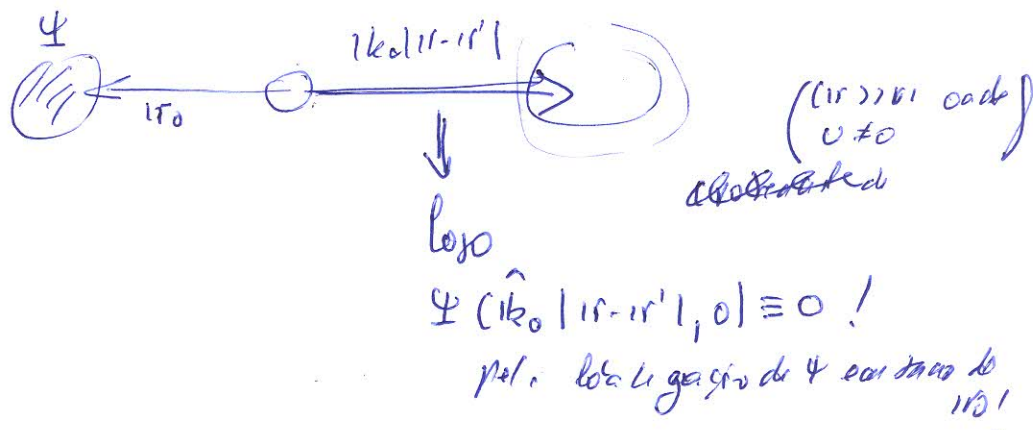
agora $k \approx \hat{k}_0 \cdot k$ pois $\Psi(k)$ é picada em k_0 !

$$\approx \Psi_{k_0}(x') \int d^3k \phi(k) e^{i k_0 [\hat{k}_0 |r-r'| - v t]}$$

[SCI-20]

$$= (2\pi)^{3/2} \Psi_{k_0}(x') \Psi(\hat{k}_0 |r-r'|, 0) \circ$$

Mas p/ $t=0$



ii) Logo $\Psi(r, t) = \int d^3k \phi(k) e^{(-i k \cdot r_0 - i \omega t)} \Psi_k(x)$

$$e/ \omega \hbar = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$$

Para A onda atinge o ~~det~~ ^{also} num tempo

$$T_A \approx \frac{r_0 \hbar}{\hbar k_0}$$

" " os detectores $c/r \approx r_0$

$$T_D \approx \frac{2 r_0 \mu}{\hbar k_0}$$

Nos detectores devemos levar em conta a ond. espalhada também.
é útil aproximar

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2\mu} = \frac{\hbar}{2\mu} [k_0 + (k-k_0)]^2 = \frac{\hbar}{2\mu} [2k_0 k - k_0^2 + (k-k_0)^2]$$

que $\frac{\hbar}{2\mu} (k-k_0)^2 T_D \ll 1$, isto é, $\left(\frac{\hbar}{2\mu}\right) \frac{(k-k_0)^2 r_0}{k_0} \ll 1$

↳ pacote não chega muito!

Com isto:

$$\Psi(r,t) \approx \int d^3k \Psi(k) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(\hat{\mathbf{r}}) \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{r} \right] e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t) + i\omega_0 t}$$

cl $v_0 = \frac{\hbar k_0}{\mu}$ $\hbar \omega_0 = \frac{1}{2} \mu v_0^2$

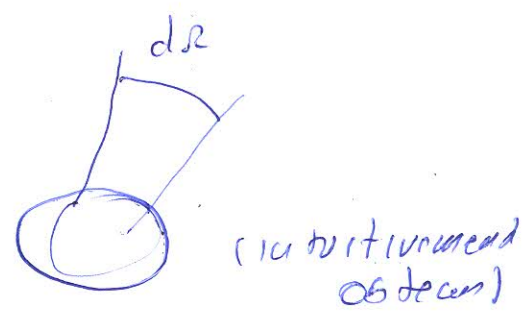
Comparando com a expressão de $\Psi(r,0)$ e $\mathbf{k} \approx \hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \mathbf{k}$
 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \approx \mathbf{k}_0 \cdot \hat{\mathbf{k}}_0 r$

$$\Psi(r,t) = \underbrace{\Psi(r - v_0 t, 0)}_{\text{por de cond inicial}} e^{i\omega_0 t} + \frac{f(\hat{\mathbf{r}})}{r} \underbrace{\Psi(r \hat{\mathbf{k}}_0 - v_0 t, 0)}_{\text{cond espalhada esférica}} e^{i\omega_0 t}$$

Note: isto vale se ficar um pouco mais em torno de $\mathbf{k}_0$. Exatidão experimentalmente assegurada $\Rightarrow$ movimento do pacote!

b) Seção de Cada

prob. de observar uma partícula em $d\Omega$ no intervalo de tempo entre t e $t+dt$:



$$v_0 \frac{|f(\hat{\mathbf{r}})|^2}{r^2} |\Psi(r \hat{\mathbf{k}}_0 - v_0 t, 0)|^2 r^2 d\Omega dt$$

A prob. de detectar uma partícula é

$$v_0 |f(\hat{\mathbf{r}})|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt |\Psi((r - v_0 t) \hat{\mathbf{k}}_0, 0)|^2$$

$$\xi = r - v_0 t \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi |\Psi(\xi \hat{\mathbf{k}}_0, 0)|^2 = P_r$$

probabilidade de ~~col~~ ^{partícula} incidente / unidade de área = $\int_{-\infty}^{+\infty} dz |\Psi(\vec{r}|k_0, 0)|^2 \doteq r_c$ (SCI-22)

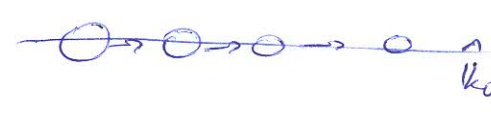
$\vec{r} = r - v_0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dr}{dz} = \frac{r_1}{r_2} = |f_{1k_0}(\vec{r})|^2}$$

13/03/09

c) Conservação da probabilidade: TEOREMA ÓTICO

$$\Psi = \Psi_{inc} + \Psi_{esp} \text{ com}$$

$$\Psi_{inc} \approx \Psi(r - v_0 t, 0) e^{i\omega_0 t} \rightarrow$$


$$\Psi_{esp} \approx e^{i\omega_0 t} \frac{f_{k_0}(\vec{r})}{r} \Psi(r|\vec{k}_0 - v_0 t, 0) =$$


Logo Ψ_{inc} e Ψ_{esp} só interferem na região frontal ($\theta=0$)
 pois aqui $\vec{r} = r\hat{k}_0$

Vamos estudar a conservação de probabilidade
~~abrindo~~ usando o formalismo INDEPENDENTE do tempo, mas
 lembrando das potências de onda quando necessário!

A corrente de probabilidade radial é dada por

$$j_r \approx \frac{\hbar}{2\mu} \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right)^2 2 \text{Im} \left[\left(e^{-ikr \cos \theta} + \frac{e^{-ikr}}{r} f_{(0)}^* \right) \frac{1}{r} \left(e^{+ikr \cos \theta} + f_{(0)} \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right]$$

|| r muito grande, quando a onda se torna uma partícula

$$\Rightarrow f_r^{\text{inc}} \approx \frac{\hbar k}{\mu} \cos \theta \frac{1}{(2\pi)^3}$$

$$f_r^{\text{exp}} \approx \frac{\hbar k}{\mu} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2}$$

$$f_r^{\text{interferência}} \approx \frac{\hbar k}{\mu} \frac{1}{r} \text{Im} \left[i e^{i k r (\cos \theta - 1)} f^* \cos \theta + i e^{-i k r (\cos \theta - 1)} f \right]$$

Note: 1) f_r^{inc} e f_r^{exp} são funções novas de θ para $\theta \rightarrow 0$

2) f_r^{INT} oscilando exceto r/ $\theta^2 < O(1/k r)$. Agora

Como devemos nos lembrar de cond. $\int d\Omega \xrightarrow{\text{Riemann}} f_r^{\text{int}}$

desaparece EXCETO para $\theta \neq 0$

Vejamos o fluxo gerado pelas 3 termos num ângulo sólido

$\delta\Omega = 2\pi (\delta\theta)^2$ em torno de $\theta=0$:

$$\int \delta\Omega r^2 d r_{\text{inc}} \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar k}{\mu} r^2 \delta\Omega$$

$$\int \delta\Omega r^2 f_r^{\text{exp}} \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar k}{\mu} |f(0)|^2 \delta\Omega$$

$$\int d\Omega r^2 f_r^{\text{INT}} \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar k}{\mu} r 2\pi \text{Im} \left\{ i f(0)^* \int_{1 - \frac{1}{2}(\delta\theta)^2}^1 f d\cos\theta e^{i k r (x-1)} \right\}$$

Para

$$\int_{1-\frac{\delta\theta^2}{2}}^1 dr \, d e^{i k r(x-1)} = \frac{1 - e^{-\frac{i}{2} k r (\delta\theta)^2}}{i k r}$$

SC1 24



PENSANDO NO PACOTE DE ONDA $\int dr e^{i k r(x-1)} e^{-\frac{i}{2} k r (\delta\theta)^2}$ $\ll \frac{1}{k r}$
 Para $k r (\delta\theta)^2 \ll 1$

PACOTE DE ONDA + $k r (\delta\theta)^2 \gg 1$ (caso realístico) $\Rightarrow$

oscilações rápidas $\Rightarrow$ último termo não contribui.

Logo $\Rightarrow \int r^2 \delta\theta \, d\theta \approx - \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\hbar k}{\mu} \frac{4\pi}{k} \underbrace{\text{Im}(f(0))}_{>0 \text{ (prova a seguir)}}$

↑
reflexões
do feixe incidente!

Conservação de probabilidade: como o regime é independente do tempo

$$\int d^3r \, |\Psi|^2 = r^2 \int dr \, d\Omega = \text{const.}$$

Seja r o raio de 1910 r

$$\int dr \, J_r^{\text{inc}} \equiv 0$$

$$\int dr \, J_r^{\text{refl}} = 4\pi \frac{\hbar k}{\mu} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int dr \, |H|^2 = \frac{\hbar k}{\mu} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \sigma_{\text{total}}$$

do' ter o cond. 2, 307

$$\int dz f_r^{INT} = - \frac{1}{(2\pi i)^3} \frac{ik}{\mu} \frac{4\pi}{k} \text{Im } f(0)$$

(SCI-25)

Logo

$$\frac{4\pi}{k} \text{Im } f(0) = \sigma_{tot}$$

Teorema ÓTICO

Exemplo: verificar usando ondas parciais!

$$f(0) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta)$$

$$\frac{4\pi}{k} \text{Im } f(0) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{P_l(1)} = \sigma \quad (\text{oh!})$$

6. Desenvolvimento Formal: Eq. de Lippmann-Schwinger

Consideremos $H = \frac{p^2}{2\mu} + V = H_0 + V$ e desejamos

obter o espectro contínuo de H : $H|E\rangle = E|E\rangle$

Re-escrevendo $(E - H_0)|E\rangle = V|E\rangle$

Analogamente ao feito em teoria de perturbação podemos obter uma solução particular

$$|\Psi\rangle_p = \frac{1}{E - H_0} V|E\rangle_p$$

e a solução geral é

$$|E\rangle = |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0} V|E\rangle \quad \text{onde } H_0|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle$$

Porém isso não funciona já que H_0 tem espectro contínuo e $\frac{1}{E - H_0}$ não está bem definido!

Analogamente ao que fizemos com a função de Green vamos introduzir uma pequena parte imaginária para ϵ :

SCI-26

$$|\psi^{(\pm)}\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} V |\psi^{(\pm)}\rangle \quad (\text{eq. de Lippman-Schwinger})$$

onde o limite $\epsilon \rightarrow 0$ é tomado no final do dia!
Essa eq. independe da escolha da representação adotada. Lembremos as notações anteriores:

$$\langle x | \psi^{(\pm)} \rangle = \langle x | \phi \rangle + \langle x | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} V | \psi^{(\pm)} \rangle$$

$$\mathbb{1} = \int d^3x' |x'\rangle \langle x'|$$

$$= \langle x | \phi \rangle + \int d^3x' \langle x | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | x' \rangle \langle x' | V | \psi^{(\pm)} \rangle$$

escolha μ $\langle x | p \rangle = \frac{e^{i p \cdot x / \hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$ e definimos $G(x, x') = \langle x | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | x' \rangle \frac{\hbar^2}{2\mu}$

$$G(x, x') = \frac{\hbar^2}{2\mu} \int d^3p \underbrace{\langle x | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | p \rangle \langle p | x' \rangle}_{\langle x | p \rangle \frac{1}{E - \frac{p^2}{2\mu} \pm i\epsilon} \langle p | x' \rangle}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2\mu} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{e^{i p \cdot (x - x') / \hbar}}{E - \frac{p^2}{2\mu} \pm i\epsilon} \stackrel{\text{conhecimento}}{=} - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm i k |x - x'|}}{|x - x'|}$$

c/ 1480 $\langle x | \psi^{(\pm)} \rangle = \langle x | \phi \rangle - \frac{2\mu}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{\pm i k |x - x'|}}{4\pi |x - x'|} \langle x' | V | \psi^{(\pm)} \rangle$

7. Estados ligados e simplificações de espalhamento (heurísticos)

Vimos que no limite de grandes distâncias

$$R_e \rightarrow \frac{1}{2ikr} \left[\eta_e e^{i(kr - \pi/2)} - e^{-i(kr - \pi/2)} \right] \quad (1)$$

onde $\eta_e = e^{i\delta_e}$

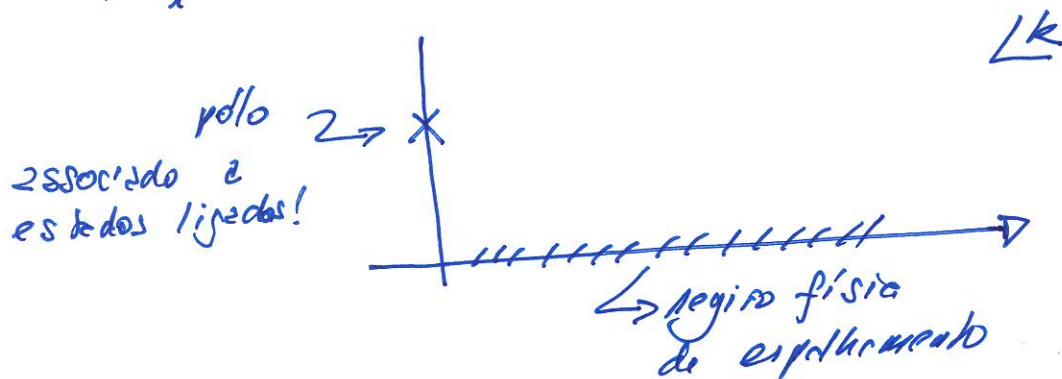
No caso de estados ligados para $r \rightarrow \infty$ e $v \rightarrow 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u}{dr^2} \approx -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2\mu} u \Rightarrow u \approx e^{-\kappa r} \Rightarrow R_e \sim \frac{e^{-\kappa r}}{r} \quad (2)$$

Isso ocorre apenas p/ valores discretos de E . Na eq. 1/ estados ligados não existe a necessidade da solução homogênea (condição incidente).

Continuando analiticamente $R_e k$ para $i\kappa$ (1) a partir $e^{-\kappa r}$ e $e^{+\kappa r}$ para que (2) seja satisfeito p/ alguns valores

de κ , $\eta_e(k)$ deve desenvolver um pólo simples!



Muita informação pode ser obtida das propriedades de analiticidade de η_e . Por exemplo:

Para cada $l=0$: $\eta_l = e^{i\delta_0}$

SC1-28

Sabemos que no limite $k \rightarrow 0$ $\eta_0 \rightarrow 1$. Podemos tentar obter uma função que satisfaz:

1) $\exists$ sólo para $k = i\kappa$ (1 estado ligado)

2) $|\eta_0| = 1$ para $k > 0$ real

3) $\eta_0 = 0$ para $k = 0$.

Um chute simples é: $\eta_0 = \frac{-k - i\kappa}{k - i\kappa}$

Com isso $f_0 = \frac{\eta_0 - 1}{2i\kappa} = \frac{k}{-k - i\kappa} \Rightarrow \frac{1}{k \cot \delta_0 - i\kappa}$

$\therefore \lim_{k \rightarrow 0} k \cot \delta_0 = -\kappa = -\frac{a^2}{a}$
 $\hookrightarrow$ scattering length

8. Espalhamento ressonante:

16/3/09

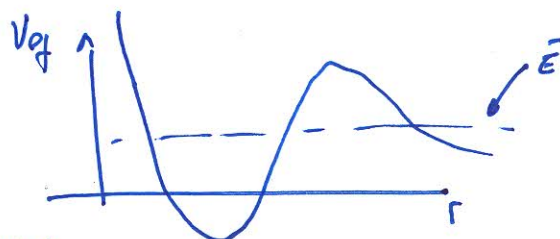
SCF-24

Para $V(r)$ temos que resolver

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \underbrace{\left(\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+1)}{r^2} + V(r) \right)}_{V_{\text{ef.}}} u_l = E u_l$$

onde aparece o potencial efetivo $V_{\text{ef}} = V(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+1)}{r^2}$

Para $V(r)$ atrativo e possível que



Se a barreira for suficientemente alta, haverá um estado ligado em $\bar{E}$. Mas como essa barreira é finita

temos um estado "quase ligado".

No espalhamento a existência desse quase-estado ligado está associada a de parâmetro $\tan \delta_l$, $i.e.$, uma direção

para $\delta_l = \frac{4\pi}{k^2} |a_{l+1}| \sin^2 \delta_l$!

Se $\delta_l \approx \pi/2$ podemos ~~aproximar~~ expressar $\cot \delta_l$ em potências

de $E - \bar{E}$

$$\cot \delta_l \approx \cot \delta_l \Big|_{\bar{E}} + \frac{2}{\Gamma} (E - \bar{E}) + \dots$$

como $f_l = \frac{1}{k \cot \delta_l - ik} = \frac{\Gamma/2}{k(E - \bar{E}) + i\Gamma/2}$

Coen 1840
$$V_l = \frac{4\pi}{k^2} \frac{2l+1 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{(E - \bar{E})^2 + \frac{\pi^2}{4}}$$

Exemplo: Potencial $V(r) = -\frac{\lambda \hbar^2}{2\mu} \delta(r-a)$ // $l=0$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u_0}{dr^2} + \lambda \delta(r-a) u_0 = -k^2 u_0$$

$$\Rightarrow u_0 = \begin{cases} A \sin kr \\ B \sin(kr + \delta_0) \end{cases}$$

cont. $r=a \Rightarrow A \sin(ka) = B \sin(ka + \delta_0)$

Seito derivada $r=a \Rightarrow k B \cos(ka + \delta_0) - k A \cos ka = -\lambda A a \cos(ka)$

$$k \cos(ka + \delta_0) = \frac{k \cos ka \sin(ka + \delta_0)}{\sin ka} = -\lambda \sin(ka + \delta_0)$$

$$k \frac{1}{\tan(ka + \delta_0)} \cdot \sin(ka) - k \cos ka = \lambda \sin ka$$

~~$$k \tan(ka) - k \tan(ka + \delta_0) = \lambda \tan ka \tan(ka + \delta_0)$$~~

$$\Rightarrow \tan \delta_0 = -\frac{\lambda}{k} \frac{\sin^2 ka}{1 + \frac{\lambda}{2k} \sin(2ka)}$$

usando $\gamma = \frac{\lambda}{2k}$ $\tan(2\delta_0) = -\frac{2k}{\lambda}$

9. Aproximação de Born

SC1-31

Sabemos que $f(\theta, \varphi) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' e^{-i\mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|}} V(\mathbf{x}') \Psi(\mathbf{x}')(\theta)$

com $\Psi(\mathbf{x}) = e^{i\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{k}|}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \Psi(\mathbf{x}') V(\mathbf{x}') (e)$

a.) Ordem mais baixa:

Nesta aproximação tomamos $\Psi \approx e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ (desprezamos o 2. termo de (2)) em (1)

$$f_B = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}'} V(\mathbf{x}')$$

onde $|\mathbf{k}'| \equiv k \frac{x}{|\mathbf{x}|}$

b) ~~Domínio de validade~~ Exemplo: para potências esfericamente simétricas $V(r)$

$$f_B = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d\varphi \int d\cos\theta \int dr' r'^2 e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}'} V(r')$$



$\vec{q} = |\mathbf{k} - \mathbf{k}'|$ com $q^2 = 2k^2(1 - \cos\theta) = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$

Agora eixo y' de $\mathbf{r}'$ na direção de $\vec{q}$:

$$= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} 2\pi \int_0^\infty dr' r'^2 V(r') \underbrace{\int_{-1}^1 d\cos\theta e^{iqr' \cos\theta}}_{\frac{e^{iqr'} - e^{-iqr'}}{iqr'}} = -\frac{2\mu}{\pi^2 q} \int_0^\infty dr' r' V(r') \sin qr'$$

Note que $f(\theta)$ representa experimentalmente a intensidade

1) $f(\theta)$ é função $q = 2k^2(1 - \cos\theta)$

2) $f(\theta)$ é sempre real

3) $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ independe do sinal de V

4) Para $k \rightarrow \infty \Rightarrow q \rightarrow 0$ f independe de θ

$$f(\theta) \rightarrow -\frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty dr r^2 v(r) = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int d^3x' v(x')$$

Consideremos agora o potencial de Yukawa

$$v(r) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

~~decaimento exponencial~~

Com isso $f_B(\theta) = -\frac{2\mu V_0}{\hbar^2} \frac{1}{q^2 + \alpha^2}$

$$\therefore \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2\mu V_0}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{(2k^2(1 - \cos\theta) + \alpha^2)^2} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \text{Coulomb} \left(\frac{2\mu V_0}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{4k^2(1 - \cos\theta)^2}$$

cl $V_0 = ZZ'e^2 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\mu)^2 (ZZ'e^2)^2}{\hbar^4} \frac{1}{16k^4 \sin^2(\theta/2)}$

que é o resultado EXATO da teoria e foi verificado

c) Validade da aproximação de Born:

Para potenciais de curto alcance o maior efeito vem da região próxima a $r=0$:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \underbrace{\Phi_{1k}(r)}_{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{x}' \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \Psi(\mathbf{x}') V(\mathbf{x}')$$

$$\Rightarrow \frac{\Phi_{1k}(0) - \Psi_k(0)}{\Phi_{1k}(0)} = \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{x}' \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}')}}{|\mathbf{x}'|} \Psi(\mathbf{x}') V(\mathbf{x}')$$

$$\approx \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{x}' \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}')}}{|\mathbf{x}'|} \Phi_{1k}(\mathbf{x}') V(\mathbf{x}')$$

$$= \frac{2\mu}{\hbar^2 q_k} \int_0^\infty e^{ikr} \sin kr V(r) dr = I$$

Alguns casos:

i) Altas energias: se a for o alcance $ka \gg 1$;
lema de Riemann $\Rightarrow$ a integral se anula!

ii) Baixas energias: $ka \ll 1$

$$I \rightarrow \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty dr r V(r) \Rightarrow \left| \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^\infty dr r V(r) \right| \ll 1$$

Para $V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \Rightarrow \frac{2\mu}{\hbar^2} V_0 \frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{\mu a^2}{\hbar^2} V_0 \ll 1 \Rightarrow \text{N}^\circ \text{ estado ligado!}$

iii) Ainda por o potencial curto.

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{k} \int_0^a dr V_0 e^{ikr} \sin kr = \frac{2\mu}{\hbar^2 k} \frac{V_0}{2i} \int_0^a dr (e^{i2kr} - 1)$$

$$= \frac{V_0 \mu}{\hbar^2 k i} \left[\frac{e^{i2ka} - 1}{2ik} - \frac{a}{i} \right]$$

grosser Raum

$$\left| \frac{V_0 a \mu}{\hbar^2 k} \right| \ll 1 \Rightarrow$$

$$V_0 \ll \frac{\hbar^2 P}{\mu} = \hbar^2 v$$

hoch, bsd
11 liegen

"energie"

d) Ordens superiores: Substituindo Ψ_{ik} na eq. seguinte.

~~$$\Psi_{ik}(x) = \phi_{ik}(x) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|} V(x') \phi_{ik}(x) + \left(-\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \int d^3x' \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|} V(x') \int d^3x'' \frac{e^{ik|x'-x''|}}{|x'-x''|} V(x'') \phi_{ik}(x'')$$~~

$$\text{Definindo } H(x, x') = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik|x-x'|}}{|x-x'|}$$

$\therefore$ ~~alternativa~~

$$\Psi_{ik}(x) = \phi_{ik}(x) + \int d^3x' H(x, x') V(x') \Psi_{ik}(x')$$

(subst Ψ_{ik})

$$\Psi_{ik}(x) = \phi_{ik}(x) + \int d^3x' H(x, x') V(x') \phi_{ik}(x')$$

$$+ \int d^3x' H(x, x') V(x') \left(\int d^3x'' H(x', x'') V(x'') \Psi_{ik}(x'') \right)$$

$$\Psi_{1k} = \Phi_{1k} + \int d^3x' H(x, x') V(x') \Phi_{1k}(x')$$

$$+ \int d^3x' H(x, x') V(x') \int d^3x'' H(x', x'') V(x'') \Phi_{1k}(x'')$$

$$+ \int d^3x' H(x, x') V(x') \int d^3x'' H(x', x'') V(x'') \int d^3x''' H(x'', x''') V(x''') \Psi_{1k}(x''')$$

E assim sucessivamente!

Quando a série é boa? Pode-se mostrar que a série apresenta um bom raio de convergência se o potencial não possui entalhes ligados...

e) Aproximação de Born para free shifts:

EXERCÍCIO

→ também é origem de fase
e o índice de refração óptico

(17/3/09)

f) Exemplo: Espalhamento de uma partícula com energia pelo potencial elétrico $V(r)$:

$$f_B = - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(r)$$

com $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$
 $q^2 = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$

$$= - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r \frac{1}{q^2} \nabla^2 (e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}) V(r)$$

partes $\rightarrow$

$$= \frac{\mu}{2\pi\hbar^2 q^2} \int d^3r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \nabla^2 V(r)$$

However, $\nabla^2 V(r) = -4\pi z' e^2 \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{do núcleo}}}{z \delta(r)} - \underset{\substack{\rightarrow \text{das outras de} \\ \text{um átomo}}}{\rho(r)} \right)$ SCI-36

∴ $f_B = -4\pi z' e^2 \frac{\mu}{2\pi \hbar^2 q^2} [z - F(q)]$

onde F é o fator de forma $F(q) = \int d^3r e^{iq \cdot r} \rho(r)$

Assumindo q' par $\Rightarrow F$ é real:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(2z' \frac{m e^2}{\hbar^2} \frac{1}{q^2} \right)^2 (z - F)^2 = \frac{z'^2 q^2}{a_0^2 q^4} (z - F(q))^2$$

1) Para $q \rightarrow \infty$: $F(q) \rightarrow 0$ exceto as outras cargas pontuais

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \frac{4z'^2 q^2}{a_0^4 q^4} = \frac{C^2 z'^2}{\propto \frac{1}{q^2}} \dots \text{fórmula de Rutherford!}$$

2) Para $q \rightarrow 0$

$$F(q) = \int d^3x \rho(x) \left[1 + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{V}}}{q \cdot r} + \frac{1}{2} q^i q^j r_i r_j + \dots \right]$$

1) p par o momento do dipolo é nulo

Se ρ for esfericamente simétrico:

SCI-360

$$\int d^3r \underbrace{r_i r_j}_{\frac{r^2}{3} \delta_{ij}} \rho(r) = \int d^3r \frac{r^2}{3} \delta_{ij} \rho(r)$$

Logo $F(q) = z + \frac{q^2}{6} \langle r^2 \rangle z$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dz} = \frac{z^2}{a_0^2} \frac{4}{3} \frac{q^2}{36} z^2 \langle r^2 \rangle^2 \Rightarrow \text{não é singular p/ } \theta \rightarrow 0 \text{ (direção fractal)}$$

p/ o cálculo de H

$$\rho(r) = z \left(\frac{\alpha^3}{\pi z_0^3} \right) e^{-\alpha r/a_0}$$

$$F(q) = \frac{z}{\left[1 + \left(\frac{z_0}{\alpha} \right)^2 \frac{q^2}{4} \right]^2}$$

10. Aproximação eikonal:

SC1-37

Assumamos que V varia pouco por distâncias da ordem de λ , i.e. $E \gg |V|$. Nestas condições a aproximação semi-clássica é aplicável.

a) Aquecimento: Escrevendo $\Psi(x,t) = \sqrt{p(x,t)} e^{\frac{iS(x,t)}{\hbar}}$

que substituída na eq. de Schrödinger leva a

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\nabla^2 \sqrt{p} + \frac{2i}{\hbar} (\nabla \sqrt{p}) \cdot (\nabla S) - \frac{1}{\hbar^2} \sqrt{p} |\nabla S|^2 + \frac{i}{\hbar} \sqrt{p} \nabla^2 S \right] + \sqrt{p} V$$

$$= i \frac{\hbar}{2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{p} + \frac{i}{\hbar} \sqrt{p} \frac{\partial S}{\partial t} \right]$$

Assumindo $\sqrt{\hbar} \frac{\partial \sqrt{p}}{\partial t} \ll \frac{\partial S}{\partial t}$, $\hbar |\nabla^2 S| \ll |\nabla S|^2$, $\left(\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{p} \right) \ll \left(\frac{1}{\hbar} \sqrt{p} \frac{\partial S}{\partial t} \right)$ segue que

$$\frac{1}{2\mu} |\nabla S|^2 + V + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

que é a eq. de Hamilton-Jacobi $\Rightarrow S$ é a ação clássica!

Para $S = W - Et \Rightarrow \frac{1}{2\mu} |\nabla W|^2 + V - E = 0$; W é a parte independente do tempo.

RS:

A eq. da continuidade é dada por

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) = 0 \quad \text{onde } \mathbf{v} = \frac{\nabla S}{\mu}$$

b) Aproximação para Ψ :

SCI-38

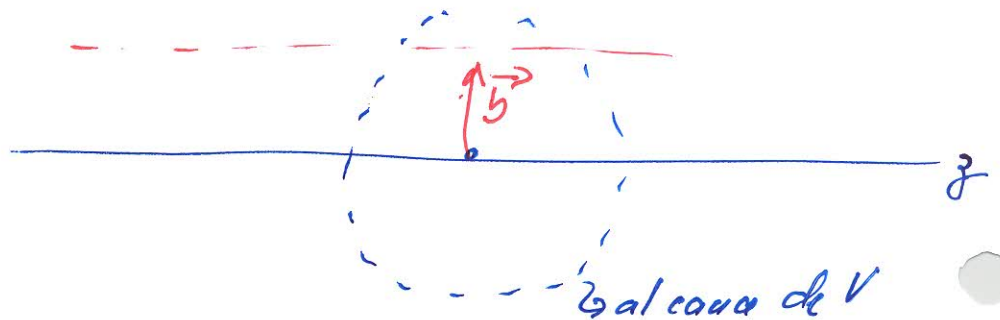
(Should be w...)

tomemos $\Psi^+ \sim e^{iS/\hbar}$

c/ $\frac{(\nabla S)^2}{2\mu} + V = E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \quad (1)$

Se a ação clássica

É difícil obter ~~uma~~ solução exata desta equação. Todavia, no limite de grandes energias, podemos calcular a ação clássica de trajetórias retilizadas



(1) $\Rightarrow \frac{S}{\hbar} = \int_{-\infty}^z dz' \left[k^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\sqrt{z'^2 + y'^2}) \right]^{1/2} + \text{constante}$

Escolhemos a constante t.q. $\frac{S}{\hbar} \rightarrow k z$ para $V \rightarrow 0$.

$\frac{S}{\hbar} = \int_{-\infty}^z dz' \left\{ \underbrace{\left[k^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\sqrt{z'^2 + y'^2}) \right]^{1/2}}_{\downarrow} - k \right\} + k z$

para k 's grandes $k \left(1 - \frac{\mu}{\hbar^2 k^2} V \right) - k \approx - \frac{\mu V}{\hbar^2 k}$

$\therefore$ a altas energias: $\Psi^+(x) = \Psi^+(16 + j\hat{\sigma}) \approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i k z} e^{-\frac{i\mu}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{\infty} dz' V(\sqrt{z'^2 + y'^2})}$

Agora vamos que

SCI-39

$$f = - \frac{\mu}{2\pi k^2} \int d^3 x' e^{-i \vec{k} \cdot \vec{x}'} V(x') \psi(x')$$

e a expressão para ψ^+ da página (SCI-38)

$$f = - \frac{\mu}{2\pi k^2} \int d^3 x' e^{-i |\vec{k}| \cdot \vec{x}'} V(\sqrt{b^2 + z'^2}) e^{i k_z z'} e^{-\frac{i \mu}{k^2 k} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' V(\sqrt{b^2 + z'^2})}$$

first order
Born approximation

Em coordenadas cilíndricas $d^3 x' = b db d\phi_s dz'$.

Para pequenas deflexões $-\vec{k}' \cdot \vec{x} - k_z z \approx -\vec{k}' \cdot \vec{b}$
 $(k \sin \theta \hat{z} + k \cos \theta \hat{y}) \cdot (b \cos \phi_s \hat{x} + b \sin \phi_s \hat{y})$
 $\approx -kb \theta \cos \phi_s$

Logo

$$f = - \frac{\mu}{2\pi k^2} \int_0^\infty db b \int_0^{2\pi} d\phi_s \underbrace{e^{-i kb \theta \cos \phi_s}}_{2\pi J_0(kb \theta)} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' V(\sqrt{b^2 + z'^2}) e^{-\frac{i \mu}{k^2 k} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' V(\sqrt{b^2 + z'^2})}$$

$$\frac{i k^2 k}{\mu} e^{-\frac{i \mu}{k^2 k} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' V(\sqrt{b^2 + z'^2})}$$

$$\therefore f = -i k \int_0^\infty db b J_0(bk\theta) [e^{i 2\Delta(b)} - 1] \quad \text{and} \quad \Delta(b) = \frac{\mu}{2k^2 k} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\sqrt{b^2 + z'^2}) dz'$$

Obs.: 1) espcilamente: Fraunhofer $\Rightarrow$ $\delta \gg a$ mas a aprox. vale vl ótica geométrica $\frac{a}{\lambda} \ll k$. Se por outro lado $\frac{a}{\lambda} \gg k$ retrat

SCI-40

1) $e^{i2\Delta(b)} - 1$ vai a zero para b maior que o alcance (a) do potencial

2) Eikonal é não linear em V . Para $|\Delta| \ll 1$ usamos a aproximação de Born

$$f_b \approx -\frac{1}{2} \int_0^\infty db \int d\theta \, V(kb\theta) \frac{2\pi}{k^2} V(\sqrt{\delta^2 + \theta^2})$$

para pequenos ângulos.

- $\rightarrow$ Eikonal é melhor que Born qdo há grandes mudanças de fase
- $\rightarrow$ Born é melhor que eikonal pois não se restringe a pequenos ângulos

Exemplo: $\Delta(b) = -\frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{V_0 a}{k} e^{-b^2/a^2}$

- 1) Born em v'ld $\Delta \ll 1$ ou $V_0 a \ll k$
- 2) Eikonal $|V_0| \ll k^2$

isto quer dizer $\leftarrow$ scattering waves a distâncias pequenas

Exercício: Eikonal satisfaz o teorema ótico

1) não satisfaz condição de est.

11. Espalhamento de Partículas Idênticas:

SC1.41

a) Intuitivo:

No centro de massa a troca de 2 partículas idênticas ^{de spin 0} corresponde a fazer $\pi \rightarrow -\pi$! Como o função de onda deve ser simétrica a condição de contorno de espalhamento é alterada por

$$\psi_s \rightarrow e^{ik \cdot x} + e^{-ik \cdot x} + [f(\theta) + f(\pi - \theta)] \frac{e^{ikr}}{r}$$

Com isso a seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 = |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 + 2 \operatorname{Re}[f(\theta) f^*(\pi - \theta)]$$

o que leva a interferência construtiva para $\theta \cong \pi/2$!

Logo o spin da partícula leva a peculiaridades da seção de choque! $\frac{d\sigma}{d\Omega} \big|_{\theta=\pi/2}^{\text{bom}} = 2 \frac{d\sigma}{d\Omega} \big|_{\theta=\pi/2}^{\text{interferência}} / \frac{d\sigma}{d\Omega} \big|_{\theta=\pi/2}^{\text{sem}}$

No caso do espalhamento de 2 férmions de spin $\frac{1}{2}$ podemos considerar os seguintes e o valor gradiente do spin

temos: spin total zero $\rightarrow$ função de onda simétrica

spin total 1 $\rightarrow$ " " " anti-simétrica

1) a parte da onda anti-simétrica

$$\psi_A \rightarrow e^{ik \cdot x} - e^{-ik \cdot x} + [f(\theta) - f(\pi - \theta)] \frac{e^{ikr}}{r}$$

Nesse caso

Spin-0
form

Spin-0 total

Sec 42

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} |f(0) + f(\pi-0)|^2 + \frac{3}{4} |f(0) - f(0-\pi)|^2$$

$$= |f(0)|^2 + |f(\pi-0)|^2 - \text{Re} [f(0) f^*(\pi-0)]$$

o que leva a interferência destrutiva para $\theta \approx \pi/2$!

Sec 42.

b) Desenvolvimento formal (25/3/09)

Esquecendo o syra a eq. de Lippmann-Schwinger é

$$|k^{\pm}\rangle = |k\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} V |k^{\pm}\rangle \quad (1)$$

$$\text{com isso, } f(k', k) = - \frac{\mu (4\pi)^2}{2k + 2} \underbrace{\langle k' | V | k^{\pm} \rangle}_{\text{um modo de } \delta} \quad (2)$$

É conveniente definir o operador T tal que

$$V |k^{\pm}\rangle = T |k\rangle$$

Multiplicando $V(x) |1\rangle \Rightarrow$

$$T |k\rangle = V |k\rangle + V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T |k\rangle$$

$$\text{Logo: } T = V + V \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} T$$

$$\text{Mas, (2)} \Rightarrow f(k', k) = - \frac{\mu (4\pi)^2}{2k + 2} \langle k' | T | k \rangle$$

No espalhamento de partículas idênticas a seção de choque total é

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

pois as direções no centro de massa $\vec{p} = -\vec{p}$ são indistinguíveis ~~no~~ ~~em~~ já que as partículas são idênticas!



Em termos de ondas parciais

$$f(\theta) = \sum_l e^{i l \pi/2} (2l+1) f_l P_l(\cos\theta)$$

$\hookrightarrow$ $e^{i l \pi/2} = i^l$

Com isso para bósons $P_l(\cos(\pi-\theta)) = P_l(\cos\theta) = (-1)^l P_l(\cos\theta)$

$$f(\theta) + f(\pi-\theta) = 2 \sum_{l \text{ par}} i^l f_l (2l+1) P_l(\cos\theta)$$

e quando $\theta = \pi/2$ para ~~ondas~~ ~~partículas~~ férmions,

$$f(\theta) - f(\pi-\theta) = 2 \sum_{l \text{ ímpar}} i^l f_l (2l+1) P_l(\cos\theta)$$

Podemos escrever $(E - H_0)|k\rangle = 0$ como

$$(E - H)|k\rangle = -V|k\rangle$$

Ⓟ Invertendo $(E - H)$ com a escolha de solução homogênea sendo $|k^+\rangle$ temos que

$$|k\rangle = |k^+\rangle + \frac{1}{E - H + i\epsilon} V|k\rangle$$

ou seja, $|k^+\rangle = \left(1 + \frac{1}{E - H + i\epsilon} V\right) |k\rangle$

Com isso $T = V + V \frac{1}{E - H + i\epsilon} V$

é o op. ~~total~~
elástico: $E_{in} = E_{out}$
 $= E_{pad}!$

Note que este desenvolvimento vale no caso de desacoplamento spin!

Agora estudamos o espalhamento de um com 42
cl spins S_1 e S_2 . O estado inicial é

$$|k_i, S_1^i, S_2^i\rangle = |k_i, \nu_i\rangle \equiv |i\rangle \text{ partícula o estado final}$$

$$\text{e } |k_f, S_1^f, S_2^f\rangle = |k_f, \nu_f\rangle \equiv |f\rangle. \text{ Se levarmos em}$$

conta os spins finais e iniciais temos

$$N_s = (2S_1 + 1)(2S_2 + 1) \text{ combinações para analisar!}$$

Queremos

$$f(k_f, v_f | k_i, v_i) = -\frac{4\pi^2 \mu}{\tau^2} \langle k_f, v_f | T | k_i, v_i \rangle$$

503-44

com a normalização ψ

$$\psi \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{i k_i \cdot r} |v_i\rangle + \frac{e^{i k_f \cdot r}}{r} \sum_{v_f} |v_f\rangle f(k_f, v_f | k_i, v_i) \right]$$

(a)

$$e \frac{d\sigma}{d\Omega} i \rightarrow f = |f(k_f, v_f | k_i, v_i)|^2$$

c) Simétrica Seção de choque e polarização:

Vamos descrever o ~~est~~ ~~for~~ estado inicial ^{do spin} ~~ya~~ matriz de identidade

$$P_i = \sum_n |v_n\rangle P_{i,n} \langle v_n|$$

No caso de ato e projétil não polarizados $P_i = \frac{1}{N_S}$

Definição ^{moj}

$$\langle v_f | M(k_f, k_i) | v_i \rangle \overset{\text{for } |v_i\rangle \text{ ou } |v_f\rangle}{=} -\frac{4\pi^2 \mu}{\tau^2} \langle k_f, v_f | T | k_i, v_i \rangle$$

o que permite escrever

$$\psi \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{i k_i \cdot r} + \frac{e^{i k_f \cdot r}}{r} M(k_f, k_i) \right] |v_i\rangle$$

$i \rightarrow f$

$$\psi_{i \rightarrow f} = \langle v_f | \psi_{\text{scat}}(t) \rangle$$

Dado que a Eq. de Schrödinger é linear, tem-se uma relação linear entre P_i e P_f :

incidente
 $|D_u\rangle$



espalhado
 $M(k_f, k_i) |D_u\rangle$



$$\sum_u |D_u\rangle P_{iu} \langle D_u| \longrightarrow \sum_u M |D_u\rangle P_{iu} \langle D_u| M^\dagger$$

Com isso definimos $P_f = N_f M P_i M^\dagger$
 ↳ ~~o~~ ^{erro} no ~~caso~~ de spins finais ~~é~~ ~~final~~.

cl $N_f = \text{Tr}[P_i M^\dagger M]$ para garantir q $\text{Tr}(P_f) = 1$.
 ↳ $\frac{d\Gamma}{dz}$

Agora escrevemos que

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \sum_{u,v} |\langle D_u | M(k_f, k_i) | D_v \rangle|^2 \gamma_{i,u}$$

↳ total levando em conta todos os spins.

$$= \sum_{u,v} \langle D_u | M | D_v \rangle \gamma_{i,v} \langle D_v | M^\dagger | D_u \rangle$$

$$= \text{Tr}[P_i M^\dagger M]$$

d) Espalhamento $\text{SPIN } \frac{1}{2} \otimes \text{SPIN } 0$

SCI-46

Nesse caso temos $N_S = 2$ possíveis ~~se~~ combinações de spins iniciais e finais. Se $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli do projétil de $\text{spin } \frac{1}{2}$, a forma mais geral de M é

$$M = g_1 + \vec{\sigma} \cdot (|\mathbf{k}_i \wedge \mathbf{k}_f|) g_2 + \vec{\sigma} \cdot (|\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_f|) g_3 + \vec{\sigma} \cdot (|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f|) g_4$$

onde $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_f| = k$ e θ é o ângulo entre $\mathbf{k}_i$ e $\mathbf{k}_f$.

Assumamos que a interação é invariante por paridade.

Sob rot. translação $\left\{ \begin{array}{l} \text{momento} \rightarrow - \text{momento} \\ \text{spin} \rightarrow \text{spin} \end{array} \right\}$ ~~o~~ Para geral

M seja invariante $\xrightarrow{(*)} g_3 = g_4$

Logo podemos escrever

$$M = g(k, \theta) + \vec{\sigma} \cdot \vec{n} h(k, \theta)$$

onde $\vec{n} = \frac{|\mathbf{k}_i \wedge \mathbf{k}_f|}{|\mathbf{k}_i| |\mathbf{k}_f|}$ onde g e h devem ser obtidas

resolvendo a eq. de Schrödinger.

* $\vec{\sigma}$ NÃO é o spin mas é um operador que

relaciona spin INICIAL e SPIN FINAL $\Rightarrow$ como spin não muda por $P \Rightarrow \vec{\sigma}$ não muda!

A interação mais geral compatível com conservação de Spin e paridade é

$$V = V_0(r) + \vec{\sigma} \cdot \vec{L} V_1(r)$$

No caso de feixe não polarizado ($P_i = \frac{1}{2}$) a seção de choque diferenciada é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \text{Tr} \left[\frac{1}{2} (g^* + \vec{\sigma} \cdot \vec{n} h^*) (g + \vec{\sigma} \cdot \vec{n} h) \right] \stackrel{\text{Tr} \vec{\sigma} = 0}{=} \frac{1}{2} (|g|^2 + |h|^2)$$

$\text{Tr}(\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma}) = 3$

que independe do ângulo azimutal φ

A polarização do feixe espalhado é definido por

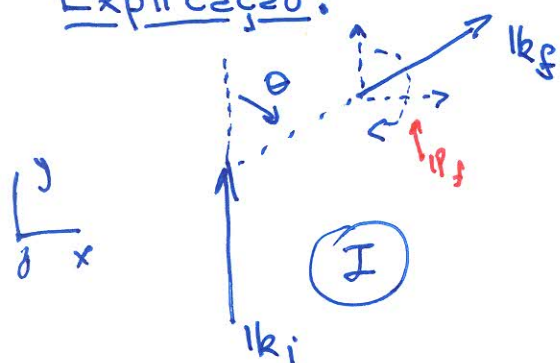
$$P_f = \text{Tr} [\vec{\sigma} P_f] \stackrel{P_i = \frac{1}{2}}{\downarrow} \text{det} \left[\frac{1}{2} (g + \vec{\sigma} \cdot \vec{n} h) (g^* + \vec{\sigma} \cdot \vec{n} h^*) \right]$$

$$P_f \stackrel{P_i = 1/2}{\downarrow} = \frac{\frac{1}{2} (g + \vec{\sigma} \cdot \vec{n} h) (g^* + \vec{\sigma} \cdot \vec{n} h^*)}{\frac{1}{2} \text{Tr} [(g + \vec{\sigma} \cdot \vec{n} h) (g^* + \vec{\sigma} \cdot \vec{n} h^*)]} = \frac{|g|^2 + |h|^2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{n} (g^* h + h^* g)}{2 [|g|^2 + |h|^2]}$$

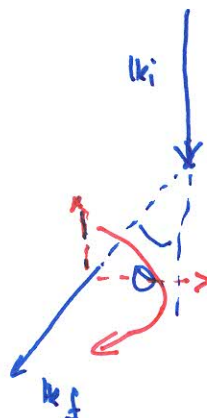
Logo $\vec{P}_f = \langle \vec{\sigma} P_f \rangle = \frac{\vec{n} (|g|^2 - |h|^2)}{|g|^2 + |h|^2}$ é $\perp$ ao plano de espalhamento!

Explicação:

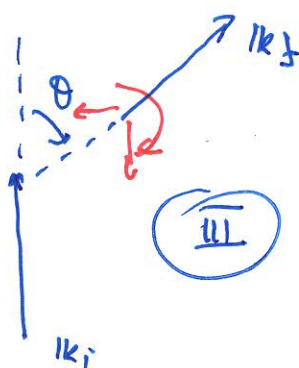
SC2 48



invariância
por paridade
 P_f é axial!



rotação
por π ao redor
do eixo z



Como (I) e (III) são ~~equivalentes~~ equivalentes por rotações π em torno de z

$$\Rightarrow P_f^x = P_f^y = 0.$$

Isso pode ser generalizado para qualquer P_i !

Para feixes polarizados $P_i = \frac{1}{2}(1 + \vec{\sigma}_i \cdot \vec{P}_i)$ o que leva a

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{P}_i) (g^* + \vec{\sigma} \cdot \vec{u} h^*) (g + \vec{\sigma} \cdot \vec{u} h) \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[|g|^2 + g^* \vec{\sigma} \cdot \vec{u} h + \vec{\sigma} \cdot \vec{u} h^* g + (\vec{\sigma} \cdot \vec{u})^2 |h|^2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{P}_i |g|^2 + g^* \vec{\sigma} \cdot \vec{P}_i h \vec{\sigma} \cdot \vec{u} \right. \\ &\quad \left. + \vec{\sigma} \cdot \vec{P}_i \vec{\sigma} \cdot \vec{u} h^* g + \vec{\sigma} \cdot \vec{P}_i \vec{\sigma} \cdot \vec{u} h^* h \vec{\sigma} \cdot \vec{u} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |g|^2 + |h|^2 + 2 (\mathbf{P}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}) \operatorname{Re}[gh^*]$$

c) Espalhamento spin 1/2 (x) spin 1/2

30/3/09

O princípio de exclusão de Pauli limita as possíveis ondas parciais num espalhamento já que devemos ter

(~~FO~~ ~~(-1)^{l+S}~~)

$$S_{tot} = 0 \Rightarrow (-1)^l = +1$$

$$S_{tot} = 1 \Rightarrow (-1)^l = -1$$

com isto

J = 0	1S	3P
J = 1	3P	3S 1P
J = 2	3P	1D 3F
	⋮	⋮

Mais ainda, para interações invariantes por paridade não há mistura entre os singletos e tripletos!

Fato notável: princípio de Pauli leva a correlação entre spins MESMO para interações independentes do spin e feixes não polarizados. Exemplo, a baixa energia $\Rightarrow$ espalhamento $\propto$ onda S $\Rightarrow S_{tot} = 0 \Rightarrow$ spins anti-paralelos! (Sem o princípio de Pauli poderíamos pensar que as interações dependem do spin!)

Para o espalhamento $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$ o espaço é 4-dimensional SCI. 50
e podemos separar as interações isotópicas por paridade

$$M(k_i, k_f) = M_S(k_i, k_f) + M_T(k_i, k_f)$$

Para partículas idênticas M_S deve ser ^(anti) simétrizado:

$$M = [M_S(k_i, k_f) + M_S(k_i, -k_f)] + [M_T(k_i, k_f) - M_T(k_i, -k_f)]$$

Usando os projetores
~~Em geral podemos~~ no espaço ao triângulo
podemos escrever

$$M = f_S(k, \theta) P_S + f_T(k, \theta) P_T$$

$$\text{onde } P_S = \frac{1}{4} (1 - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \text{ e } P_T = \frac{1}{4} (3 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$$

Podemos formalismo de envolvido

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \text{Tr}(P_i M^\dagger M) \quad \text{e} \quad P_f = \frac{M P_i M^\dagger}{d\sigma/d\Omega}$$

A forma mais geral de P_i é

$$P_i = \frac{1}{4} \left(1 + \underbrace{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_1}_{\uparrow \pi_1, \pi_2} + \underbrace{\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_2}_{\uparrow \pi_2} + \sum_{i,j} \underbrace{\sigma_{1,i} \sigma_{2,j}}_{\uparrow \pi_1} C_{ij} \right)$$

P | estados iniciais nro polarizados e interação invariante por paridade

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\left\{ (f_S^*(\theta) + f_S^*(\pi-\theta)) P_S + (\bar{f}_T^*(\theta) - \bar{f}_T^*(\pi-\theta)) P_T \right\} \right. \\ \left. \left\{ (f_S(\theta) + f_S(\pi-\theta)) P_S + (f_T(\theta) - f_T(\pi-\theta)) P_T \right\} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Tr } P_S &= 1 \\ \text{Tr } P_T &= 3 \end{aligned}$$

$$\downarrow \\ = \frac{1}{4} |f_S(\theta) + f_S(\pi-\theta)|^2 + \frac{3}{4} |f_T(\theta) - f_T(\pi-\theta)|^2$$

Se as forças independem do spin $f_S = f_T$.