

ÍNDICE

<u>I. INTRODUÇÃO</u>	<u>1</u>
<u>II. A TEORIA DE SAINT-VENANT.....</u>	<u>2</u>
II.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS	2
II.2 - DERIVADA DIRECIONAL DA FUNÇÃO ψ	6
II.3 - CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	7
II.4 - A FUNÇÃO DAS TENSÕES DE PRANDTL	12
II.5 - BARRAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL FECHADA E PAREDE DELGADA.....	14
II.6 - BARRAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL ABERTA E PAREDE DELGADA.....	19
II.7 - SEÇÕES HÍBRIDAS	21
II.8 - SEÇÕES FECHADAS MULTICELULARES DE PAREDE DELGADA.....	22
II.9 - EXEMPLOS	23
<u>III. A TEORIA DE VLASOV - ANÁLISE LINEAR</u>	<u>27</u>
III.1 - HIPÓTESES BÁSICAS	27
III.2 - DESLOCAMENTOS DA SUPERFÍCIE MÉDIA – ÁREA SETORIAL	28
III.3 - TENSÕES E DEFORMAÇÕES NORMAIS.....	33
III.4 - TENSÕES DE CISALHAMENTO	34
III.5 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO.....	36

III.5.1 - OBSERVAÇÕES	44
III.6 - ESFORÇOS SOLICITANTES.....	45
III.6.1 - ESFORÇOS SOLICITANTES CORRESPONDENTES ÀS TENSÕES NORMAIS	46
III.6.2 - ESFORÇOS SOLICITANTES CORRESPONDENTES ÀS TENSÕES DE CISALHAMENTO	49
III.6.3 - OBSERVAÇÕES	52
III.7 - BARRAS COM APOIOS ELÁSTICOS	56
III.8 - PROPRIEDADES SETORIAIS DAS SEÇÕES MAIS COMUNS.....	58
III.8.1 - SEÇÃO I MONOSSIMÉTRICA	58
III.8.2 - SEÇÃO C MONOSSIMÉTRICA	65
III.8.3 - SEÇÃO Z PONTO-SIMÉTRICA.....	70
III.9 - INTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO PARA MOMENTOS EM TORNO DE Z.....	76
III.9.1. EXEMPLOS.....	80
 <u>IV. TEORIA DE VLASOV - ANÁLISE DE ESTABILIDADE</u>	 <u>106</u>
 IV.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS	 106
IV.2 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....	106
IV.2.1 - FORÇAS TRANSVERSAIS ADICIONAIS	107
IV.2.2 - MOMENTO DE TORÇÃO ADICIONAL	112
IV.2.3 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO.....	119
IV.3 - O MÉTODO ENERGÉTICO	120
IV.3.1 - APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS. OBTENÇÃO DO FUNCIONAL U ..	122
IV.3.2 - APLICAÇÃO DE UMA TEORIA NÃO-LINEAR GEOMETRICAMENTE EXATA	130

I. INTRODUÇÃO

O emprego de estruturas de aço no Brasil, embora ainda pouco intenso, vem sendo incrementado continuamente. Ao uso tradicional do aço em edifícios de uso industrial, coberturas, estruturas de apoio de equipamentos e residências de arquitetura arrojada vêm se somar agora os edifícios comerciais e residenciais de múltiplos andares, para os quais sistemas construtivos industrializados têm se revelado vantajosos.

Nos edifícios de grande porte, a estrutura principal é constituída principalmente de perfis fabricados a partir de chapas soldadas entre si, em geral com seção transversal em forma de I. Os perfis conformados por dobramento a frio de chapas delgadas são utilizados, nestes edifícios, apenas como elementos secundários.

Já nos edifícios de pequena altura e pequenos vãos, o uso de chapas soldadas de pequena espessura não é economicamente vantajoso, tanto por exigir cuidados especiais de fabricação quanto pelo custo das operações de corte, soldagem e desempenamento. A oferta de perfis laminados também tem sido muito irregular, o que dificulta a adequação dos mesmos às necessidades de projeto. Em vista disso, os perfis de chapa dobrada são os mais adequados para estas construções, podendo ser fabricados em formas tais que as características geométricas da seção transversal possa atender, da melhor maneira, as necessidades de projeto.

Os arranjos adotados nas estruturas correntes de edifícios são tais que as barras não ficam, em geral, submetidas a esforços primários de torção consideráveis. No entanto, a pequena rigidez à torção dos perfis de seção aberta e parede delgada comumente utilizados pode tornar estas barras instáveis por uma combinação de torção e flexão, mesmo quando submetidas apenas a tensões normais. Deste modo, a análise da torção de barras e, em especial, das barras de seção aberta e parede delgada, é essencial para o estudo de elementos submetidos a um carregamento qualquer.

Apresentam-se inicialmente as hipóteses básicas da teoria da torção uniforme de Saint-Venant e a seguir, de forma mais ampla, os princípios básicos da teoria de Vlasov, aplicada a barras de seção transversal aberta e de parede delgada submetidas a um carregamento qualquer. A instabilidade destas barras é estudada a partir da teoria de Vlasov.

II. A TEORIA DE SAINT-VENANT

II.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Este capítulo trata do comportamento de barras prismáticas retas, constituídas de material isotrópico em regime elástico linear e submetidas a momento de torção uniforme, ou seja, dois momentos de torção de sentidos opostos aplicados às extremidades e barras isentas de qualquer impedimento ao livre empenamento na direção longitudinal. Este problema consiste em se obter os deslocamentos, as tensões e as deformações em um ponto genérico M da barra, que satisfaçam as condições de contorno do problema e que sejam a solução do sistema de equações da teoria da elasticidade dado por:

Equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (1.a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (1.b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (1.c)$$

Relações deslocamentos-deformações:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.b)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.f)$$

Equações constitutivas (relações tensões-deformações):

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (3.a)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (3.b)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (3.c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (3.d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (3.e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (3.f)$$

O princípio de Saint-Venant estabelece que, conhecida uma solução qualquer, esta deve ser a solução do problema a menos das regiões próximas às extremidades. Saint-Venant propôs então resolver o problema indiretamente, com base em certas hipóteses iniciais sugeridas pela intuição e por observações experimentais. Se a solução assim encontrada atende as equações (1), (2) e (3), o problema está resolvido.

As hipóteses formuladas por Saint-Venant (1855) são as seguintes:

- a) A rotação ϕ_z da barra em torno do eixo longitudinal varia linearmente ao longo do comprimento, ou seja, a rotação específica ϕ_z' é constante.
- b) As seções transversais empenam (deixam de ser planas) e o empenamento é o mesmo para todas as seções transversais; sua intensidade é proporcional à rotação específica ϕ_z' , logo:

$$w_M = \varphi_z' \psi(x, y) \quad (4)$$

onde $\psi(x, y)$ é denominada função empenamento de Saint-Venant.

c) A forma da seção transversal não se altera, ou seja, não são consideradas distorções da seção transversal em seu próprio plano ($\tau_{xy}=0$; $\gamma_{xy}=0$).

Tomando-se a origem O de um sistema de eixos coordenados dextrógiro numa das extremidades da barra e o eixo de rotação coincidente com o eixo z, pode-se expressar a rotação em torno de z e os deslocamentos no plano da seção transversal de um ponto M qualquer da barra de coordenadas x,y,z como (fig. II.1)

$$\varphi_z = z \varphi_z' \quad (5)$$

$$u_M = -y \varphi_z = -y z \varphi_z' \quad (6.a)$$

$$v_M = x \varphi_z = x z \varphi_z' \quad (6.b)$$

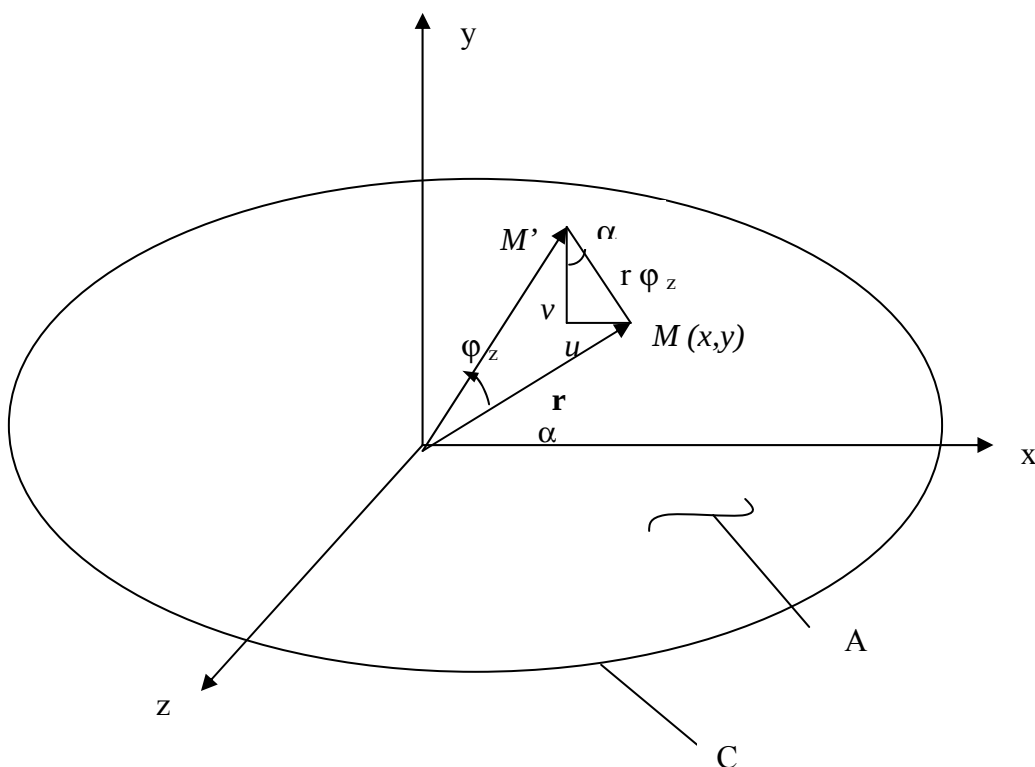


FIGURA II.1

Substituindo-se (4) e (6) em (2) tem-se

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \quad (7.a)$$

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial u_M}{\partial z} + \frac{\partial w_M}{\partial x} \right) = \phi_z' \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) = \phi_z' (\psi_{,x} - y) \quad (7.b)$$

$$\gamma_{yz} = \left(\frac{\partial v_M}{\partial z} + \frac{\partial w_M}{\partial y} \right) = \phi_z' \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) = \phi_z' (\psi_{,y} + x) \quad (7.c)$$

e portanto, com o uso das expressões (3),

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad (8.a)$$

$$\tau_{xz} = G\phi_z' (\psi_{,x} - y) \quad (8.b)$$

$$\tau_{yz} = G\phi_z' (\psi_{,y} + x) \quad (8.c)$$

O estado de tensões em qualquer ponto M é portanto de cisalhamento puro, caracterizado pelos componentes τ_{xz} e τ_{yz} , e não ocorre distorção da seção transversal em seu próprio plano, já que $\gamma_{xy} = 0$.

As equações de equilíbrio nas direções x e y (expressões (1.a) e (1.b)) são automaticamente satisfeitas por (8). Da equação de equilíbrio na direção z (1.c), tem-se

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = G\phi_z' (\psi_{,xx} + \psi_{,yy}) = G\phi_z' \nabla^2 \psi = 0$$

e portanto

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad \text{em A} \quad (9)$$

onde A é a seção transversal da barra. A função empenamento ψ deve ser determinada impondo-se que satisfaça a expressão (9) e as condições de contorno do problema, descritas no item 3.

II.2 - DERIVADA DIRECIONAL DA FUNÇÃO ψ

Para aplicação posterior em perfis de parede delgada, é interessante determinar a variação da função empenamento ao longo de uma direção $\vec{s}$ qualquer. Tomando-se um sistema de eixos dextrógiro $\vec{n}, \vec{s}, \vec{z}$, tem-se na seção $z + dz$, de acordo com a fig. II.2:

$$n_x = \cos \theta_M = \frac{dy}{ds} = \frac{dx}{dn} \quad (10.a)$$

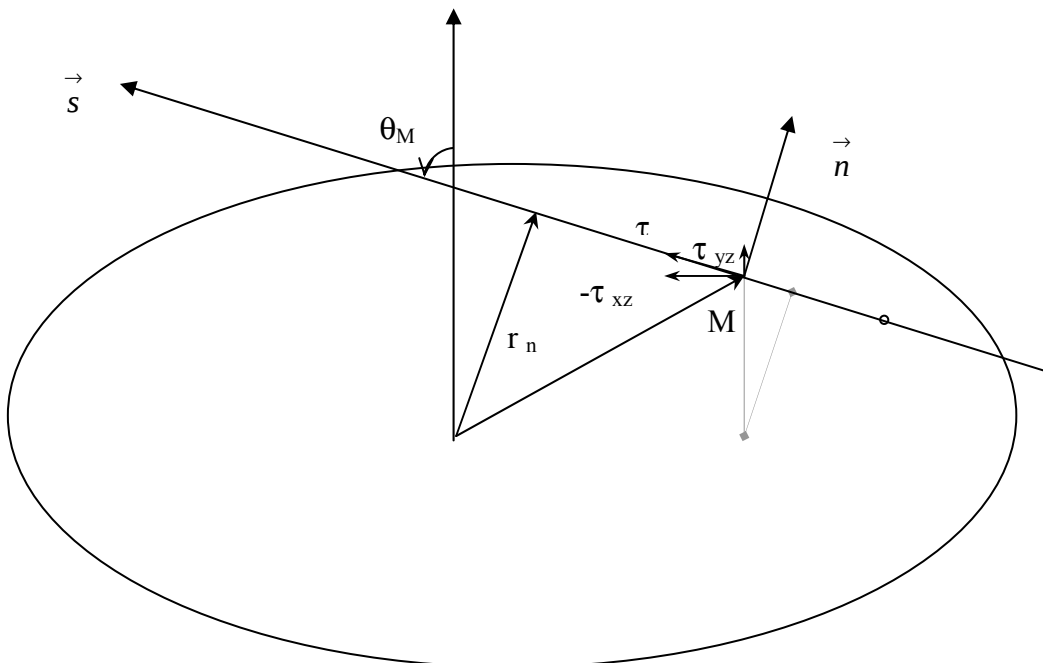
$$n_y = \sin \theta_M = -\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dn} \quad (10.b)$$

$$r_n = x \cos \theta_M + y \sin \theta_M = x n_x + y n_y = x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \quad (10.c)$$

e também

$$\tau_s = -\tau_{xz} \sin \theta_M + \tau_{yz} \cos \theta_M = -\tau_{xz} \frac{dy}{dn} + \tau_{yz} \frac{dx}{dn} = \tau_{xz} \frac{dx}{ds} + \tau_{yz} \frac{dy}{ds} \quad (11.a)$$

$$\tau_n = \tau_{yz} \sin \theta_M - (-\tau_{xz}) \cos \theta_M = \tau_{xz} \frac{dx}{dn} + \tau_{yz} \frac{dy}{dn} = \tau_{xz} \frac{dy}{ds} - \tau_{yz} \frac{dx}{ds} \quad (11.b)$$



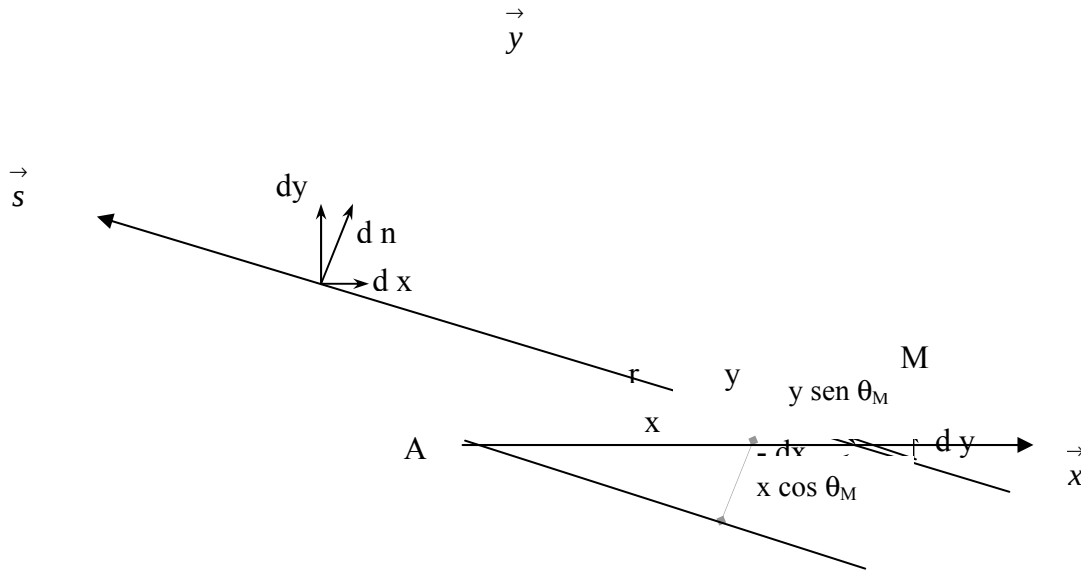


FIGURA II.2

A derivada da função ψ na direção $\vec{s}$ é dada, com o auxílio de (8), por

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{ds} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{1}{G\phi'_z} \left(\tau_{xz} \frac{dx}{ds} + \tau_{yz} \frac{dy}{ds} \right) + \left(y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds} \right) = \\ &= \frac{\tau_s}{G\phi'_z} - r_n \end{aligned} \quad (12)$$

II.3 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

a) Superfície lateral

As condições de contorno na superfície lateral da barra são obtidas a partir do equilíbrio, na direção z , de um prisma elementar em que uma das faces pertence à superfície lateral (fig. II.3).

Impondo-se que as tensões de cisalhamento no plano da mesma são nulas em vista da ausência de carregamento externo na direção z , conclui-se que :

$$\tau_{xz} dy dz - \tau_{yz} dx dz = \tau_n ds dz = 0 \quad (13)$$

ou seja, a tensão de cisalhamento é tangente ao contorno ($\tau = \tau_s$). Pode-se escrever então, introduzindo-se (8.b), (8.c) e (10) em (13), que

$$(\psi_{,x} - y)n_x + (\psi_{,y} + x)n_y = 0 \quad \text{em } C \quad (14)$$

A função ψ é a solução de um Problema de Valor no Contorno definido pelas expressões (9) e (14). Este PVC tem solução única a menos de uma constante.

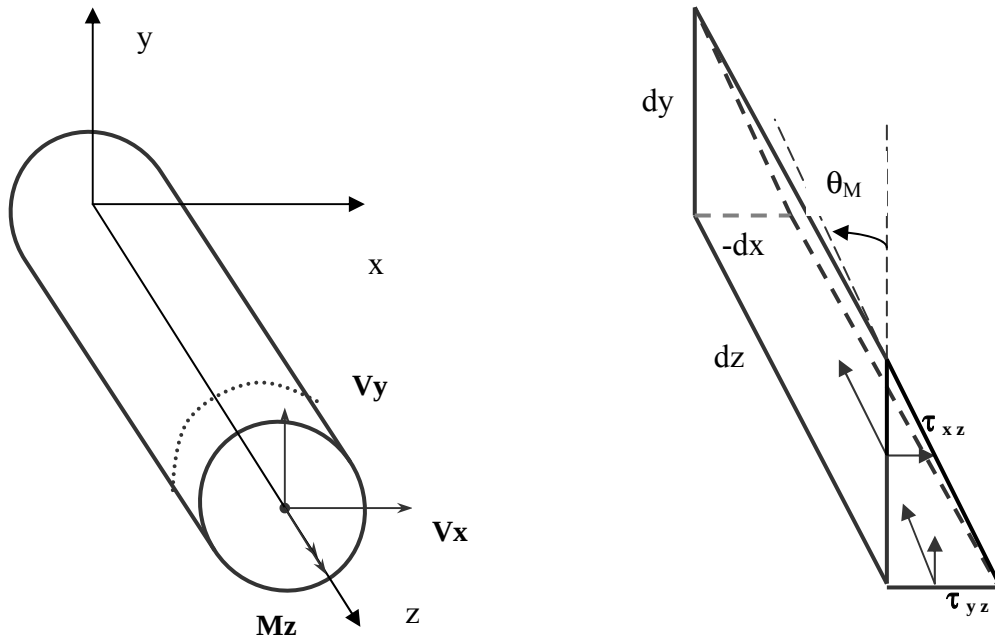


FIGURA II.3

b) Extremidades da barra

As condições de contorno nas extremidades da barra, em $z = 0$ e $z = l$, são obtidas impondo-se que o sistema de tensões é estaticamente equivalente ao momento de torção M_z , ou seja (fig. II.3),

$$V_x = \int_A \tau_{xz} dA = 0 \quad (15.a)$$

$$V_y = \int_A \tau_{yz} dA = 0 \quad (15.b)$$

$$M_z = \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dx dy \quad (15.c)$$

As duas primeiras equações são satisfeitas para ψ dada pela solução do PVC. Tomando-se como exemplo a expressão (15.a), substituindo-se τ_{xz} de (7.b) e somando-se $x \nabla^2 \psi$ (de valor igual a zero, em vista de (9)) tem-se, após algumas manipulações algébricas,

$$\begin{aligned} \int_A \tau_{xz} dA &= G \phi'_z \int_A \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} - y + x \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] dA = G \phi'_z \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - y \right] dA = \\ &= G \phi'_z \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[x \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[x \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \right] \right\} dA \end{aligned}$$

Aplicando-se o teorema do divergente nesta expressão tem-se, em vista de (14),

$$\int_A \tau_{xz} dA = G \phi'_z \int_C \left[x \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) n_y + x \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) n_x \right] dC = 0$$

Da equação (15.c) resulta, com a substituição de (8), que

$$M_z = G I_t \phi'_z \quad (16.a)$$

onde

$$I_t = \int_A (x^2 + y^2 + x \psi_{,y} - y \psi_{,x}) dA \quad (16.b)$$

é designada constante de torção de Saint-Venant ou momento de inércia à torção. Note-se que I_t só é igual ao momento polar de inércia I_0 , dado por

$$I_0 = \int_A (x^2 + y^2) dA \quad (17)$$

se não há empenamento ($\psi=0$), o que só ocorre, por simetria, nas seções circulares maciças ou vazadas (ver item 5).

c) Observação

A posição do eixo de rotação não é definida na teoria de Saint-Venant. No entanto, pode-se demonstrar que uma mudança na posição dos eixos de referência implica em alteração da

função empenamento e do momento polar de inércia, mas não do momento de inércia à torção. Realmente, tomando-se um sistema de eixos $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ conforme indicado na fig. II.4, tem-se

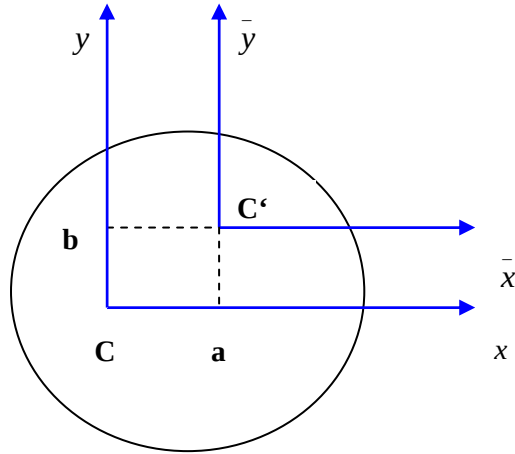


FIGURA II.4

$$\bar{x} = x - a \quad \bar{y} = y - b \quad (18.a)$$

$$[\bar{\psi}_{,x} - (y - b)]n_x + [\bar{\psi}_{,y} + (x - a)]n_y = 0 \quad (18.b)$$

comparando-se (14) e (18.b), conclui-se que:

$$\bar{\psi}_{,x} = \psi_{,x} - b \quad \bar{\psi}_{,y} = \psi_{,y} + a$$

logo:

$$\bar{\psi} = \psi - bx + ay + c \quad (19.a)$$

$\bar{\psi}$ difere de ψ , portanto, por um movimento de corpo rígido.

Substituindo-se (18.a) e (19.a) na expressão de $\bar{I}_t$ e considerando-se que V_x e V_y são nulos, tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{I}_t &= \int_A (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{x}\bar{\psi}_{,y} - \bar{y}\bar{\psi}_{,x}) dA = I_t + b \int_A (\psi_{,x} - y) dA - a \int_A (\psi_{,y} + x) dA = \\ &= I_t + \frac{b}{G\phi'_z} \int_A \tau_{xz} dA - \frac{a}{G\phi'_z} \int_A \tau_{yz} dA = I_t\end{aligned}\quad (19.b)$$

Por outro lado, o momento polar de inércia depende do sistema de referência, já que

$$\bar{I}_0 = \int_A (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) dA = I_0 + A(x^2 + y^2)$$

II.4 - A FUNÇÃO DAS TENSÕES DE PRANDTL

A solução apresentada por Saint-Venant, que corresponde ao Método dos Deslocamentos, pode ser de difícil emprego se a condição de contorno é complicada. Prandtl resolveu o problema diretamente a partir das tensões, com o emprego da função das tensões ϕ ; o método por ele proposto corresponde ao Método dos Esforços.

Prandtl admitiu válidas as condições (7.a) e introduziu a função $\phi = \phi(x,y)$ tal que

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (20)$$

A equação de equilíbrio (1.c) fica automaticamente satisfeita com o uso de (20). Substituindo-se estas expressões em (7.b) e (7.c), tem-se:

$$\tau_{xz} = G\phi'_z (\psi_{,x} - y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (21.a)$$

$$\tau_{yz} = G\phi'_z (\psi_{,y} + x) = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (21.b)$$

Derivando-se a primeira expressão em relação a y, a segunda em relação a x e subtraindo-se uma da outra, obtém-se

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \nabla^2 \phi = -2G\phi'_z \quad \text{em } A \quad (22)$$

Da condição de contorno $\tau_n = 0$ e com o uso de (11.b) e (20), tem-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = \tau_n = 0 \quad \text{em } C \quad (23)$$

ou seja, ϕ é constante no contorno. Tomando-se curvas de nível da função ϕ ao longo da seção transversal, conclui-se que a resultante das tensões de cisalhamento na direção normal a uma curva de nível de ϕ qualquer também é nula. A tensão de cisalhamento τ_s é, portanto, tangente à curva de nível de ϕ , sendo dada por:

$$\tau_s = -\tau_{xz} \frac{dy}{dn} + \tau_{yz} \frac{dx}{dn} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dn} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dn} = -\frac{d\phi}{dn} \quad (24)$$

logo, a tensão de cisalhamento é igual à máxima inclinação da superfície $\phi = \phi(x,y)$ no ponto M em questão.

Como apenas derivadas de ϕ aparecem nas expressões das tensões pode-se adotar, para seções simplesmente conexas,

$$\phi = 0 \quad \text{em } C. \quad (25)$$

Para seções com mais de um contorno (como as seções vazadas), pode-se impor $\phi=0$ apenas em um dos contornos. Nos outros, a função ϕ é constante mas não obrigatoriamente nula.

Com a ajuda do teorema do divergente e de (23), pode-se mostrar que as condições de contorno (15.a) e (15.b) são automaticamente satisfeitas, pois

$$\int_A \tau_{xz} dA = \int_A \frac{\partial \phi}{\partial y} dA = \int_C \phi n_y dC = 0$$

$$\int_A \tau_{yz} dA = -\int_A \frac{\partial \phi}{\partial x} dA = \int_C \phi n_x dC = 0$$

A condição de contorno (15.c) resulta em

$$\begin{aligned} M_z &= -\int_A \left(x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dA = -\int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (x\phi) + \frac{\partial}{\partial y} (y\phi) - 2\phi \right] dA = \\ &= -\int_C (x\phi n_x + y\phi n_y) dC + 2 \int_A \phi dA = -\int_C \phi r_n dC + 2 \int_A \phi dA \end{aligned}$$

Designando-se por ϕ_0 o valor da função das tensões no contorno (constante, em vista de 23) e por A_0 a área delimitada pelo contorno e notando-se ainda que $\int_C r_n dC$ é o dobro da área do setor AMM' (fig. II.5), vem que:

$$M_z = -2\phi_0 A_0 + 2 \int_A \phi dA \quad (26)$$

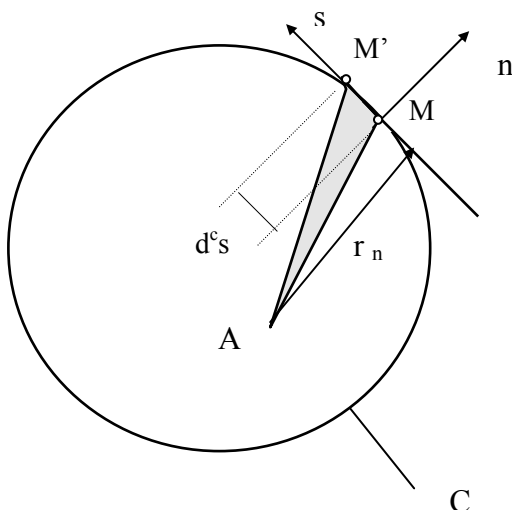


FIGURA II.5

Para seções simplesmente conexas, pode-se adotar $\phi_0=0$ em (26); para seções compostas de dois contornos, como as seções vazadas, o primeiro termo de (26) passa a ser dado por:

$$-2 (\phi_0 A_0 - \phi_i A_i),$$

onde A_i e ϕ_i correspondem ao contorno interno.

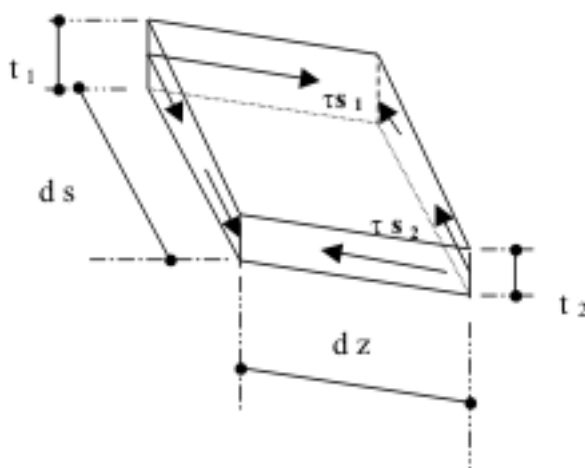
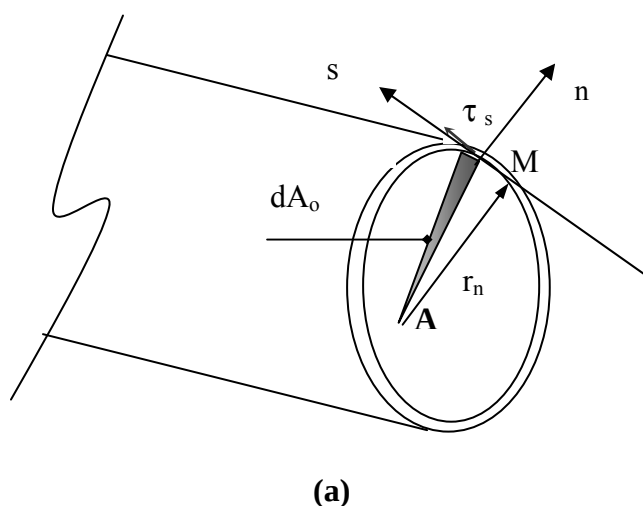
II.5 - BARRAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL FECHADA E PAREDE DELGADA

Considere-se a barra de seção transversal fechada qualquer da fig II.6.a. Admitindo-se pequena espessura em relação às demais dimensões da seção ($t/b \leq 10$, onde b é a menor dimensão da seção transversal), pode-se considerar com boa aproximação que as tensões tangenciais τ_s têm, em cada ponto M , intensidade constante na espessura. Esta intensidade pode ser variável ao longo da seção transversal caso a espessura da parede também seja variável ao longo da mesma.

Adicionalmente, do equilíbrio de um elemento $dsdz$ na direção longitudinal (fig. II.6.b), pode-se concluir que:

$$\tau_{s1} t_1 dz = \tau_{s2} t_2 dz,$$

logo o fluxo de cisalhamento $\tau_s t$ é constante na seção transversal.



(b)

FIGURA II.6

O momento de torção M_z é dado então por

$$M_z = \oint \tau_s t ds r_n = \tau_s t \oint r_n ds = 2A_0 \tau_s t \quad (27)$$

$\int_M^{M'} r_n ds$ é o dobro da área do setor compreendido entre os pontos M' e M , cujos raios vetores são AM e AM' (triângulo de base ds e altura r_n). A_0 é, portanto, a área da figura delimitada pela linha média da seção.

Multiplicando-se a expressão (12) por ds , integrando-se ao longo da seção transversal e levando-se em conta que a integral da função empenamento em um contorno fechado é nula, já que o empenamento é o mesmo nos extremos de integração, obtém-se:

$$\oint d\psi = \frac{t\tau_s}{G\phi'_z} \oint \frac{ds}{t} - \oint r_n ds = \frac{t\tau_s}{G\phi'_z} \oint \frac{ds}{t} - 2A_0 = 0 \quad (28)$$

Substituindo-se $t\tau_s$ de (27) em (28) e utilizando-se (16.a), vem que

$$I_t = \frac{4A_0^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (29)$$

Esta expressão para cálculo de um valor aproximado (dada a hipótese de τ_s constante na espessura) de I_t em seções fechadas é conhecida como fórmula de Bredt. Dois exemplos de aplicação estão indicados a seguir (fig. II.7), assim como uma comparação com o valor de I_0 .

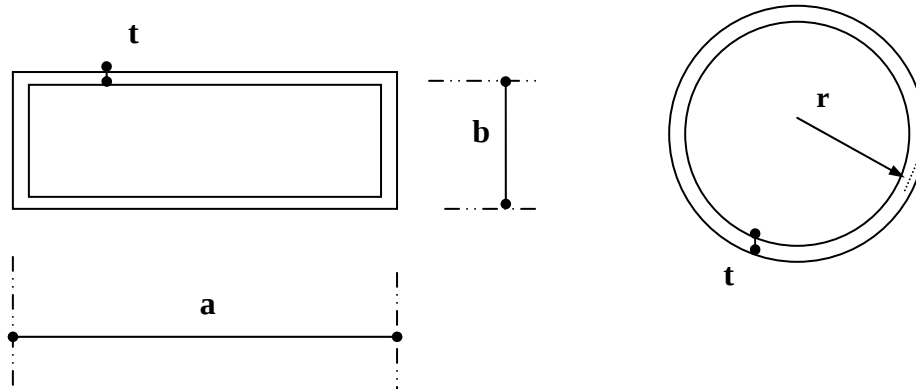


FIGURA II.7

a) barras de seção retangular vazada de lados a e b e espessura t

De acordo com a expressão (29),

$$I_t = \frac{4(ab)^2}{2(a+b)/t} = \frac{2a^2b^2t}{(a+b)} \quad (30)$$

enquanto que

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{t(a+b)^3}{6} > I_t \quad (31)$$

b) barras de seção circular vazada de raio médio r e espessura t

$$I_t = \frac{4(\pi r^2)^2}{2\pi r/t} = 2\pi r^3t \quad (32)$$

e também:

$$I_0 = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A r^2 dA \cong r^2 (2\pi r t) = I_t \quad (33)$$

Os valores de I_0 ou I_t acima indicados para a barra de seção circular vazada são aproximados.

O valor exato de I_t pode ser obtido da expressão (16.b) impondo-se $\psi=0$. Note-se que I_t coincide com o valor exato de I_0 , dado por:

$$\begin{aligned} I_t = I_0 &= \int_A r^2 dA = \int_{r_i}^{r_e} r^2 dr \oint ds = \int_{r_i}^{r_e} r^2 dr 2\pi r = \frac{\pi}{2} (r_e^4 - r_i^4) = \\ &= \pi \frac{r_e + r_i}{2} (r_e - r_i) (r_e^2 + r_i^2) = \pi r t (r_e^2 + r_i^2) \end{aligned} \quad (34)$$

Logo, em vista de (16.b) e (17), a seção circular vazada não sofre empenamento.

A título de ilustração, o problema da seção circular vazada é resolvido abaixo com o auxílio de uma função de Prandtl sob a forma

$$\phi = k \left(1 - \frac{r^2}{r_e^2} \right) = k \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{r_e^2} \right) \quad r_i \leq r \leq r_e$$

Esta função atende à condição $\phi = 0$ para $r = r_e$ (no contorno externo). Substituindo-se a expressão acima em (22), obtém-se:

$$k = G\phi_z' r_e^2 / 2,$$

logo:

$$\phi = \frac{G\phi_z' r_e^2}{2} \left(1 - \frac{r^2}{r_e^2} \right) = \frac{G\phi_z' r_e^2}{2} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{r_e^2} \right) \quad (35)$$

Substituindo-se a função ϕ em (21), tem-se:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -G\phi_z' y$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = G\phi_z' x$$

Comparando-se estas expressões com (8.b) e (8.c), conclui-se que $\psi=0$, como já visto anteriormente.

Substituindo-se a função ϕ em (24) e notando-se que, na seção circular, $dn = dr$, tem-se:

$$\tau_s = G\phi_z' r \quad r_i \leq r \leq r_e \quad (36)$$

o que evidencia que, na realidade, τ_s varia ao longo da espessura.

A relação entre o momento de torção M_z e $G\phi_z'$ pode ser obtida de

$$M_z = 2 \left[\int_A \phi dA - (\phi_0 A_0 - \phi_i A_i) \right] \quad (37)$$

Notando-se que $\phi_0=0$ no contorno externo e que $A_i=\pi r_i^2$, substituindo-se ϕ de (35) e calculando-se ϕ_i desta expressão para $r=r_i$, vem que:

$$M_z = G\phi_z' \frac{\pi}{2} (r_e^4 - r_i^4) = G\phi_z' I_t \quad (38)$$

II.6 - BARRAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL ABERTA E PAREDE DELGADA

Nas barras de seção transversal aberta e parede delgada de espessura t constante (fig. II.8) pode-se considerar, a menos das regiões extremas e das de mudanças bruscas de direção da tangente à superfície média $\bar{s}$, que as curvas de nível da função ϕ são paralelas a $\bar{s}$ (note-se que $\phi_0=0$ no contorno), logo $d\phi/ds = \tau_n = 0$ ao longo da seção transversal.

Deste modo, sendo o sistema $\bar{n}, \bar{s}, \bar{z}$ ortonormal, pode-se escrever a equação (22) como:

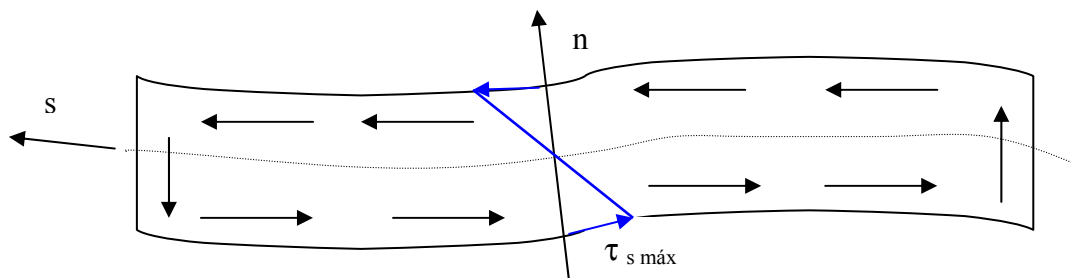


FIGURA II.8

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} = -2G\phi'_z \quad (39)$$

onde $\phi_0=0$ para $n = \pm t/2$

Estas condições são satisfeitas para ϕ sob a forma

$$\phi = G\phi_z' \left(\frac{t^2}{4} - n^2 \right) \quad (40)$$

de onde:

$$\tau_s = -\frac{\partial \phi}{\partial n} = 2G\phi_z' n = 2 \frac{M_z}{I_t} n \quad (41)$$

A distribuição dos τ_s é, portanto, linear em n e

$$\tau_{s \max} = \frac{M_z}{I_t} t \quad \text{para } n = \pm t/2 \quad (42)$$

Ao longo da linha média tem-se $\tau_s = 0$ e assim, de (12),

$$\psi_{0M} = - \int_s r_n ds + c \quad (43)$$

Para trechos retos da seção transversal, onde r_n é constante, ψ_0 é linear ao longo da linha média. Como se verá na teoria de Vlasov, ψ_{0M} é denominada área setorial da seção. A constante c depende da origem M_0 do eixo s .

Tomando-se em particular uma seção retangular esbelta de largura b com eixo n na direção de y , pode-se obter a função empenamento das igualdades

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G\phi_z' (\psi_{,x} - y) = -\tau_s = -2G\phi_z' y \\ \tau_{yz} &= G\phi_z' (\psi_{,y} + x) = \tau_n = 0 \end{aligned}$$

de onde

$$\psi_{,x} = -y \quad \text{e} \quad \psi_{,y} = -x, \quad \text{logo:}$$

$$\psi = -xy \quad (44)$$

O empenamento é portanto nulo ao longo dos eixos de simetria e máximo nos cantos da seção.

O momento de inércia à torção pode ser obtido de:

$$M_z = 2 \int_A \phi dA = 2G\phi_z' \int ds \int_{-t/2}^{+t/2} \left(\frac{t^2}{4} - n^2 \right) dn = G\phi_z' \frac{\sum b_i t^3}{3}$$

logo:

$$I_t = \frac{\sum b_i t^3}{3} \quad (45)$$

É interessante observar que o momento de torção resultante das tensões de cisalhamento τ_s vale

$$M_{z1} = \frac{\tau_{smax}}{4} \frac{t}{3} \frac{2bt}{3} = \frac{1}{6} bt^2 \tau_{smax} = \frac{1}{6} bt^3 \frac{M_z}{I_t} = \frac{M_z}{2}$$

ou seja, corresponde a apenas a metade do momento aplicado. A outra metade é dada pelas tensões τ_{yz} , que foram desprezadas quando se admitiu ϕ sob a forma cilíndrica. Estas tensões, embora só sejam significativas nas proximidades dos bordos $x = \pm b/2$ da seção transversal e tenham valor inferior a τ_s , atuam com um braço de alavanca maior, sendo por isso responsáveis pela outra metade do M_z .

II.7 - SECÇÕES HÍBRIDAS

Nas seções híbridas como a da figura II.9, pode-se compor os resultados obtidos nos itens 5 e 6, logo

$$I_t = \frac{4A_0^2}{\oint \frac{ds}{t}} + \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3 \quad (46)$$

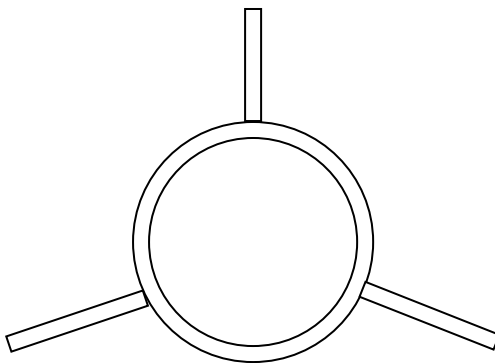


FIGURA II.9

II.8 - SEÇÕES FECHADAS MULTICELULARES DE PAREDE DELGADA

Para seções multicelulares de parede delgada, o fluxo das tensões de cisalhamento τ_s é semelhante ao de seções unicelulares. No entanto, ao invés de se obter as tensões de cisalhamento diretamente de (27), é preciso determinar a distribuição de M_z entre as diversas células.

A técnica de solução deste tipo de problema é ilustrada a seguir para uma seção retangular de duas células (fig. II.10). As tensões de cisalhamento são constantes em cada trecho de espessura constante, como já visto no item 5.

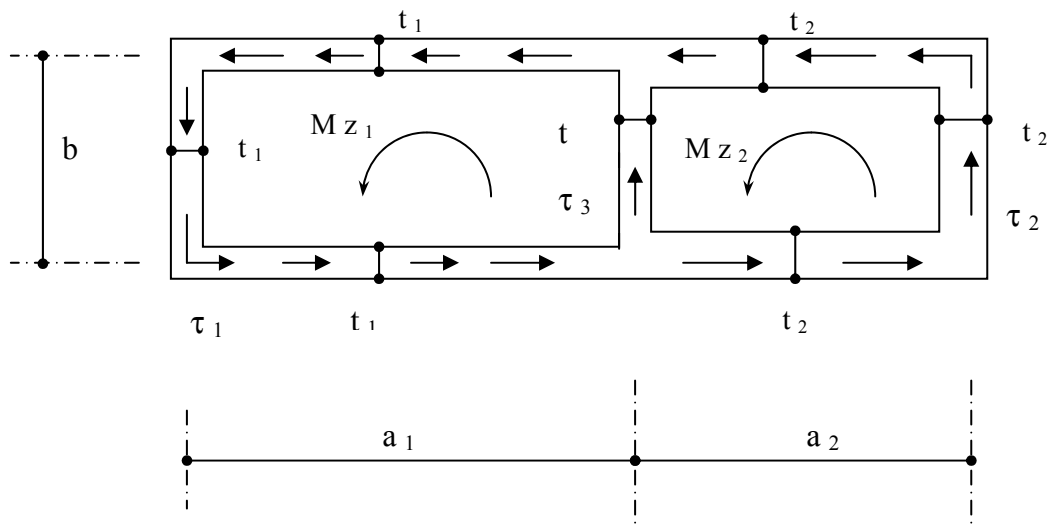


FIGURA II.10

Considere-se que as células 1 e 2 resistem respectivamente às parcelas M_{z1} e M_{z2} do momento de torção. No trecho comum s_3 , a tensão de cisalhamento τ_3 é a resultante das tensões calculadas nas células 1 e 2, tendo sido assumido na figura que a componente devida a M_{z1} é maior, em módulo, que a devida a M_{z2} . Utilizando-se a expressão (27), vem que

$$\tau_1 = \frac{M_{z1}}{2A_{01}t_1} \quad (47.a)$$

$$\tau_2 = \frac{M_{z2}}{2A_{02}t_2} \quad (47.b)$$

$$\tau_3 = \frac{M_{z1}}{2A_{01}t_3} - \frac{M_{z2}}{2A_{02}t_3} \quad (47.c)$$

Em vista da hipótese de ausência de distorção da seção transversal em seu próprio plano, o ângulo de rotação de cada uma das duas células deve ser igual ao da seção multicelular. De (16.a), (27), (28) e (29), tem-se:

$$\varphi_z' = \frac{M_z}{GI_t} = \frac{2A_0(\tau_s t)}{G4A_0^2} \oint \frac{ds}{t} = \frac{1}{2GA_0} \oint \tau ds \quad (48)$$

Logo

$$\varphi_z' = \frac{1}{2GA_{01}}(\tau_1 s_1 + \tau_3 s_3) = \frac{1}{2GA_{02}}(\tau_2 s_2 - \tau_3 s_3) \quad (49)$$

Notando-se que:

$$s_1=2a_1+b \quad s_2=2a_2+b \quad s_3=b \quad (50)$$

$$A_{01}=a_1 b \quad A_{02}=a_2 b \quad (51)$$

$$M_z=M_{z1}+M_{z2} \quad (52)$$

obtêm-se finalmente as tensões de cisalhamento τ_1, τ_2 e τ_3 , dadas por

$$\tau_1 = \frac{M_z}{2} \frac{A_{01} t_3 s_2 + (A_{01} + A_{02}) t_2 s_3}{A_{01}^2 t_1 t_3 s_2 + (A_{01} + A_{02})^2 t_1 t_2 s_3 + A_{02}^2 t_2 t_3 s_1} \quad (53.a)$$

$$\tau_2 = \frac{M_z}{2} \frac{A_{02} t_3 s_1 + (A_{01} + A_{02}) t_1 s_3}{A_{01}^2 t_1 t_3 s_2 + (A_{01} + A_{02})^2 t_1 t_2 s_3 + A_{02}^2 t_2 t_3 s_1} \quad (53.b)$$

$$\tau_3 = \frac{M_z}{2} \frac{A_{01} t_1 s_2 - A_{02} t_2 s_1}{A_{01}^2 t_1 t_3 s_2 + (A_{01} + A_{02})^2 t_1 t_2 s_3 + A_{02}^2 t_2 t_3 s_1} \quad (53.c)$$

Para seções simétricas, em particular, tem-se $s_1=s_2$, $t_1=t_2$ e $A_{01}=A_{02}$, logo $\tau_3=0$ na alma central.

II.9 - EXEMPLOS

Exemplo 1

Determinar a dimensão **b** das seções indicadas na fig. II.11, de modo que o momento de inércia à torção seja igual ao de uma seção circular maciça de raio igual a 10cm. Comparar as tensões de cisalhamento e o consumo de aço (área da seção transversal).

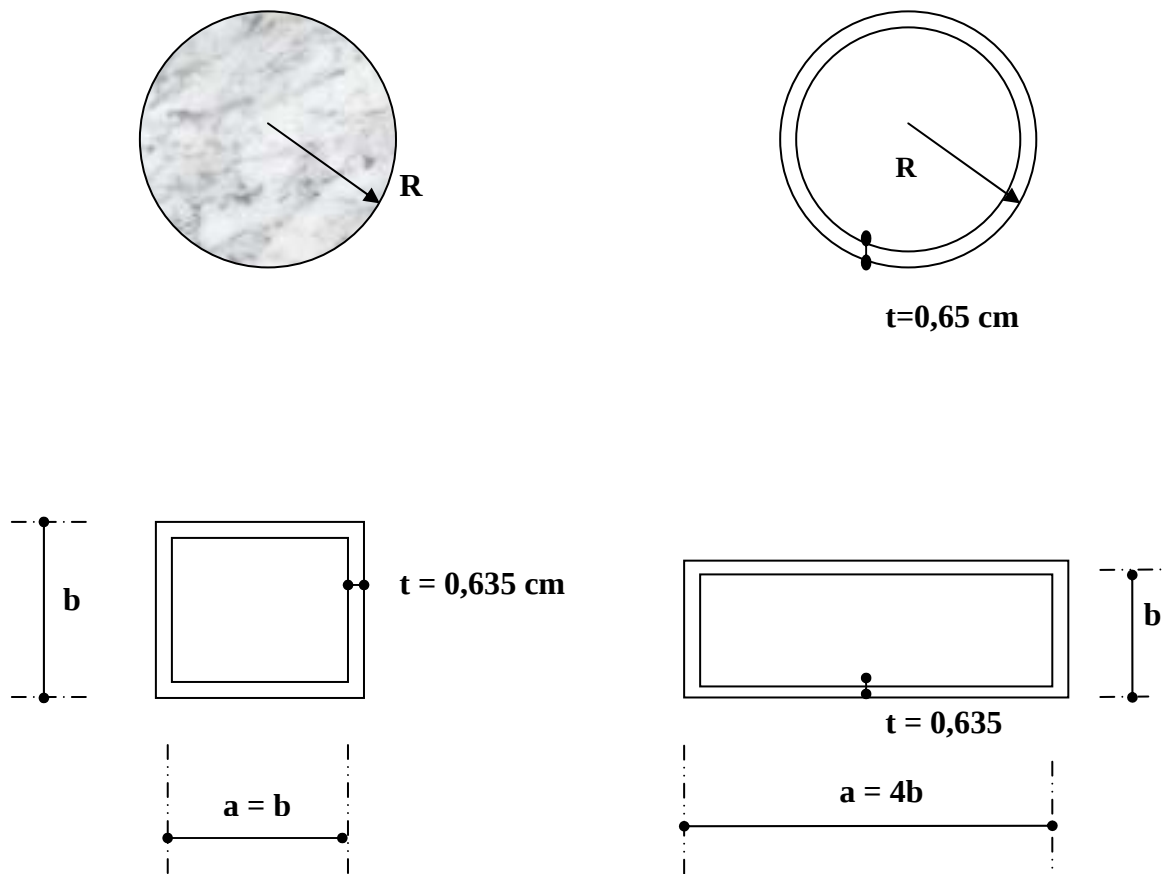


FIGURA II.11

a) Seção circular maciça

$$I_t = I_0 = \int_A r^2 dA = \int_0^R r^2 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{2}$$

Para $R = 10 \text{ cm}$, tem-se:

$$I_t = 15708 \text{ cm}^4$$

$$A = \pi R^2 = 314 \text{ cm}^2$$

$$\tau_{\max} = M_z R / I_t = M_z / 1571$$

b) Seção circular vazada de espessura $t=0.635\text{cm}$

$$I_t = 2\pi R^3 t = 15708 \text{ cm}^4 \quad \text{logo} \quad R = 15,8 \text{ cm}$$

$$A \cong 2\pi R t = 63 \text{ cm}^2$$

$$\tau_{\max} = M_z / 2A_0 t = M_z / 2\pi R^2 t = M_z / 996$$

c) Seção quadrada vazada de espessura $t=0.635\text{cm}$

$$I_t = \frac{4A_0^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4b^4}{4b/0.635} = 15708 \text{ cm}^4 \quad \text{logo} \quad b = 29 \text{ cm}$$

$$A \cong 4bt = 74 \text{ cm}^2$$

$$\tau_{\max} = M_z / 2A_0 t = M_z / 2b^2 t = M_z / 1068$$

d) Seção retangular vazada de espessura $t=0.635\text{cm}$

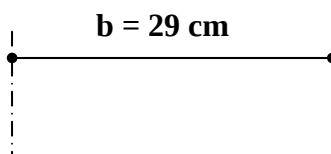
$$I_t = \frac{4A_0^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4(4b^2)^2}{10b/0.635} = 15708 \text{ cm}^4 \quad \text{logo} \quad b = 15,65 \text{ cm}$$

$$A \cong 10bt = 99 \text{ cm}^2$$

$$\tau_{\max} = M_z / 2A_0 t = M_z / 2(4b^2)t = M_z / 1244$$

Exemplo 2

Comparar a seção obtida no item c do exercício anterior com outra de mesma dimensão mas aberta (fig. II.12). Determinar o deslocamento relativo das bordas da seção, na direção longitudinal, para $M_z = 200 \text{ kNcm}$.



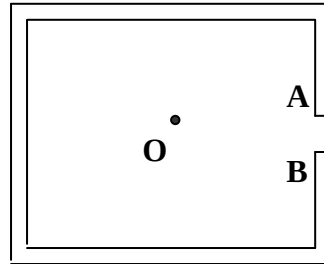


FIGURA II.12

$$I_t = 4bt^3/3 = 9.9 \text{ cm}^4 \ll 15708 \text{ cm}^4$$

$$\tau = M_z t / I_t = M_z / 15,6 \gg M_z / 996$$

Logo, a seção aberta é muito menos eficiente para torção.

$$\psi = - \int_s r_n ds + c$$

Tomando-se $\psi_i = 0$ e portanto $w_i = 0$ para uma das bordas ($s_i = 0$), tem-se

$$\psi_f = - \int_s r_n ds = -4 \times 14.5 \times 29 = -1682 \text{ cm}^2$$

$$\phi_z' = \frac{M_z}{GI_t} = \frac{M_z}{8000 \times 9.9} = \frac{M_z}{79200}$$

$$w_f = w_i + \phi_z' (\psi_f - \psi_i) = -0.021 M_z$$

Em particular, para $M_z = 200 \text{ kN.cm}$ resulta $w_f = -4.2 \text{ cm}$.

III. A TEORIA DE VLASOV - ANÁLISE LINEAR

III.1 - HIPÓTESES BÁSICAS

A Teoria de Vlasov, aplicada às barras de seção transversal aberta e parede delgada submetidas a um carregamento qualquer, baseia-se nas seguintes hipóteses:

- a- A forma da seção transversal não se altera, ou seja, não são consideradas distorções de seção em seu próprio plano ($\gamma_{xy} = 0$).
- b- As deformações por cisalhamento na superfície média da barra podem ser desprezadas ($\gamma_{sz} = 0$). Esta hipótese corresponde à de Euler-Bernoulli na teoria clássica da Resistência dos Materiais.
- c- O empenamento da seção transversal é constante ao longo da espessura e pode ser representado pelo seu valor ao longo da superfície média.

As tensões de cisalhamento paralelas à superfície média são dadas pela soma de dois termos (figura III.1). O primeiro termo, com distribuição linear ao longo da espessura e anti-simetricamente distribuído em relação à linha média, é o obtido da teoria da torção uniforme, como já visto. O esforço solicitante resultante destas tensões de cisalhamento (τ_t) é o momento de torção uniforme:

$$M_z = GI_t \varphi_z'$$

O segundo termo (τ_v) pode ser admitido constante ao longo da espessura. Como se verá a seguir, o esforço solicitante resultante destas tensões de cisalhamento é denominado momento de flexo-torção.

Deve-se notar que esta distribuição de tensões está em contradição com a hipótese de deformações por cisalhamento nulas na superfície média, já que a existência das tensões τ_v implica em distorções por cisalhamento da barra. Assim, as tensões de cisalhamento não podem ser associadas às distorções através da equação constitutiva $\tau = G \gamma$.

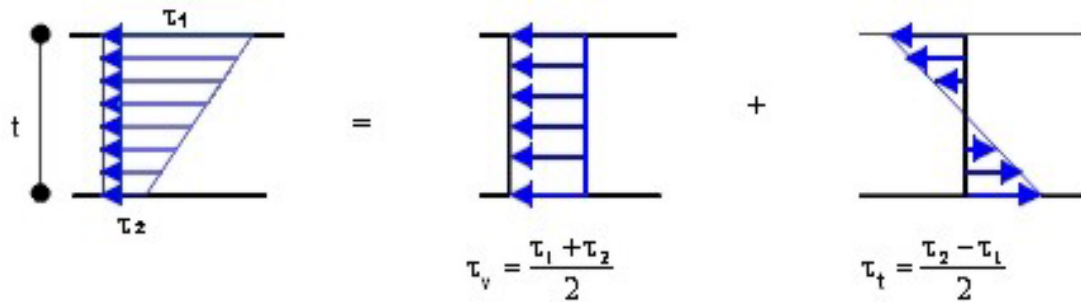


FIGURA III.1

III.2 - DESLOCAMENTOS DA SUPERFÍCIE MÉDIA – ÁREA SETORIAL

Para as deduções que se seguem, qualquer ponto M da superfície média da seção transversal tem suas coordenadas definidas de uma das seguintes maneiras (fig. III.2):

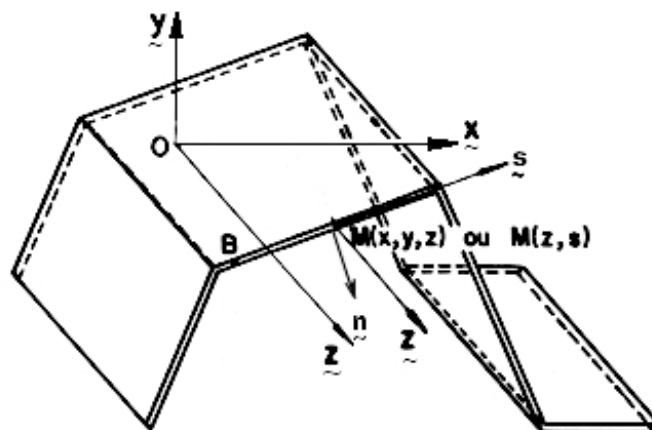


FIGURA III.2

- Pelas coordenadas x, y, z do ponto M
- Pelas coordenadas z , na direção do eixo da barra e s , ao longo da linha de contorno da superfície média a partir de uma origem B a ser escolhida.

Como o contorno da seção não se altera, os deslocamentos do ponto M no plano da seção transversal podem ser escritos em função dos deslocamentos de um outro ponto qualquer A denominado pólo, contido ou não na superfície média, e da rotação da seção em torno deste ponto (fig. III.3).

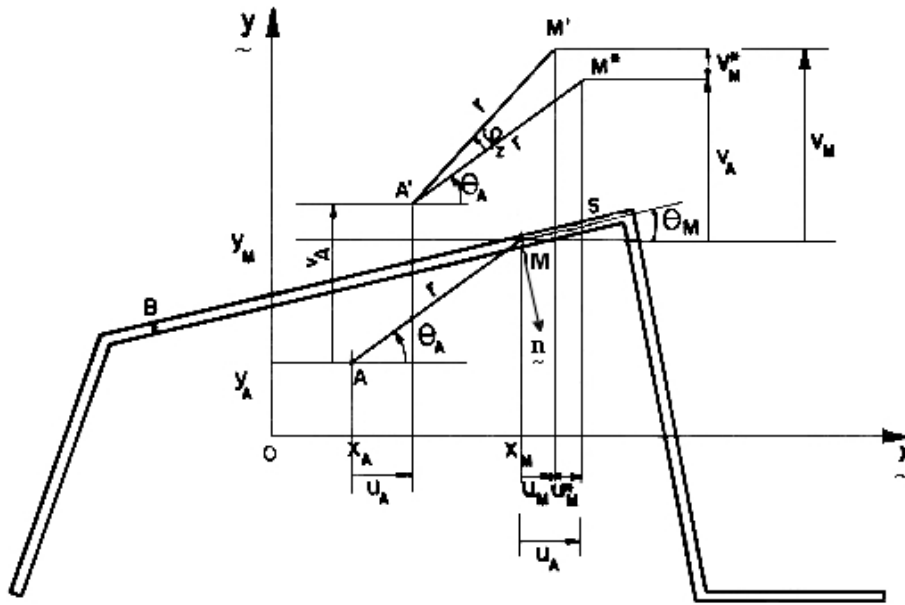


FIGURA III.3

a) Deslocamentos transversais (no plano de superfície média)

Sendo (x_A, y_A) e (x_M, y_M) as coordenadas de A e M respectivamente, (u_A, v_A) e (u_M, v_M) os deslocamentos destes pontos nas direções x e y e φ_z a rotação da seção no plano xy, pode-se expressar os deslocamentos de A em função dos de M como:

$$\begin{aligned} u_A &= u_M + u_M^* = u_M + [r \cos \theta_A - r \cos (\theta_A + \varphi_z)] = \\ &= u_M + r \cos \theta_A (1 - \cos \varphi_z) + r \sin \theta_A \sin \varphi_z = \\ &= u_M + (x_M - x_A)(1 - \cos \varphi_z) + (y_M - y_A) \sin \varphi_z \end{aligned}$$

$$v_A = v_M - v_M^* = v_M - [r \sin (\theta_A + \varphi_z) - r \sin \theta_A] =$$

$$=v_M+(y_M-y_A)(1-\cos\varphi_z)-(x_M-x_A)\operatorname{sen}\varphi_z$$

Admitindo-se φ_z pequeno, pode-se tomar $(1 - \cos \varphi_z) \cong \frac{\varphi_z^2}{2} \cong 0$ e $\operatorname{sen}\varphi_z \cong \varphi_z$, de onde

$$u_M = u_A - (y_M - y_A) \varphi_z \quad (1.a)$$

$$v_M = v_A + (x_M - x_A) \varphi_z \quad (1.b)$$

Tomem-se agora os deslocamentos (t_M, n_M) de M nas direções tangente (de $\tilde{s}$) e normal (de $\tilde{n}$) à superfície média (fig. III.4). Sendo θ_M o ângulo entre a tangente no ponto M (na direção $\tilde{s}$) e o eixo x e projetando-se u_M e v_M nas direções de $\tilde{s}$ e $\tilde{n}$, para um sistema de coordenadas $\tilde{n}, \tilde{s}, \tilde{z}$ dextrógiro, tem-se:

$$t_M = t_M(z, s) = u_M \cos\theta_M + v_M \operatorname{sen}\theta_M = u_A \cos\theta_M + v_A \operatorname{sen}\theta_M - \\ -[(x_M - x_A)\operatorname{sen}\theta_M + (y_M - y_A)\cos\theta_M]\varphi_z \quad (2.a)$$

$$n_M = n_M(z, s) = +u_M \operatorname{sen}\theta_M - v_M \cos\theta_M = +u_A \operatorname{sen}\theta_M - v_A \cos\theta_M - \\ -[(x_M - x_A)\cos\theta_M + (y_M - y_A)\operatorname{sen}\theta_M]\varphi_z \quad (2.b)$$

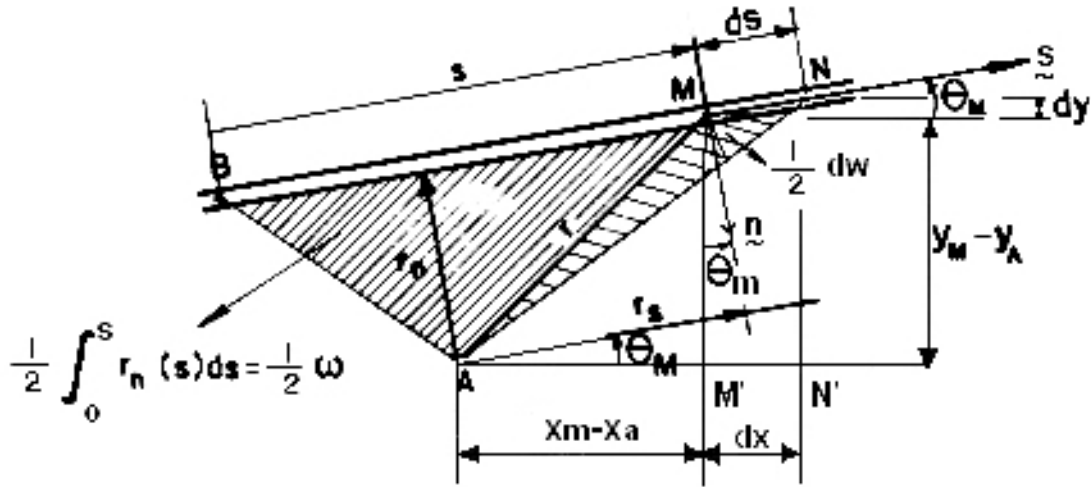


FIGURA III.4

Os dois primeiros termos destas equações correspondem aos deslocamentos do pólo A nas direções $\tilde{s}$ e $\tilde{n}$.

Pode-se observar, na fig. III.4, que os termos entre colchetes das expressões (2), que correspondem aos deslocamentos do ponto M devidos à rotação φ_z , são os componentes do raio vetor AM nas direções $\tilde{n}$ e $\tilde{s}$ respectivamente, de onde:

$$t_M = u_A \cos \theta_M + v_A \sin \theta_M + r_M \varphi_z \quad (3.a)$$

$$n_M = u_A \sin \theta_M - v_A \cos \theta_M - r_s \varphi_z \quad (3.b)$$

Para a orientação de eixos adotada na figura, $r_{\tilde{n}}$ é negativo (oposto a $\tilde{n}$) e $r_{\tilde{s}}$ positivo (na direção de $\tilde{s}$).

b) Deslocamentos longitudinais

Os deslocamentos de M na direção $\tilde{z}$ podem ser deduzidos a partir da consideração de que as deformações por cisalhamento na superfície média são nulas (hipótese b, item 1). Sendo $\tilde{s}$ e $\tilde{z}$ dois vetores desta superfície inicialmente normais entre si, tem-se:

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w_M}{\partial s} + \frac{\partial t_M}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Omitindo-se por simplicidade o índice A em u_A e v_A , obtém-se, de (3a):

$$\frac{\partial t_M}{\partial z} ds = u' \cos \theta_M ds + v' \sin \theta_M ds + \varphi'_z r_n ds = u' dx + v' dy + \varphi'_z r_n ds \quad (5)$$

onde $r_n ds$ é o dobro da área do setor com base ds e altura r_n . Esta área, em módulo, pode ser calculada com o auxílio da fig. III.4, sendo dada por:

$$-r_n ds = 2A_{AMN} = 2(A_{AMM'} + A_{NN'MM'} - A_{ANN'}) = (y_M - y_A)dx - (x_M - x_A)dy \quad (6)$$

Logo, $r_n ds$ é uma função linear da posição do ponto em relação ao pólo.

Substituindo-se (5) em (4), notando-se que u , v e φ_z são funções apenas de z e que $\sin \theta_M$, $\cos \theta_M$, r_n e r_s são funções apenas de s e integrando-se entre a origem B e o ponto M, tem-se:

$$w_M = w(z, s) = - \int_0^s \frac{\partial t_M}{\partial z} ds + w_B(z) = w_B(z) - u'(z)[x(s) - x_B] - \\ - v'(z)[y(s) - y_B] + \varphi'_z(z) \omega^A(s)$$

ou

$$w_M = w_0(z) - u'(z)x(s) - v'(z)y(s) + \varphi'_z(z)\omega^A(s) \quad (7.a)$$

onde

$$w_0(z) = w_B(z) + x_B u'(z) + y_B v'(z) \quad (7.b)$$

$$\omega^A(s) = \int_0^s -r_n ds \quad (7.c)$$

w_0 independe do ponto da seção transversal, pois é função apenas de z , ou seja, corresponde a um deslocamento longitudinal uniforme para toda a seção transversal, igual ao da origem 0.

$\omega^A(s)$ é o dobro da área do setor compreendido entre os pontos B e M e depende portanto, para cada ponto M, da posição do pólo A e da origem B. Vlasov denomina $\omega^A(s)$ de área setorial de M em relação ao pólo A com origem setorial B. Consideram-se aqui incrementos positivos das

áreas setoriais se o raio vetor AM percorre ds a partir da origem B no sentido positivo e r_n é negativo (oposto a $\tilde{n}$), ou seja, se o produto vetorial $\tilde{ds} \wedge \tilde{r}_n$ é positivo (no sentido de z positivo).

É usual representar $\omega(s)$ por um diagrama traçado sobre a linha média da seção transversal, com o valor de ω indicado na direção normal ao contorno. Alguns exemplos de determinação da área setorial são apresentados no item 8.

Pode-se observar que os três primeiros termos da expressão (7.a) correspondem à teoria usual de barras da Resistência dos Materiais, em que se admite válida a hipótese de Bernoulli-Euler, de que as seções planas permanecem planas e ortogonais ao eixo após a deformação. Este fato decorre da hipótese $\gamma_{sz} = 0$.

O primeiro termo representa um deslocamento axial uniforme na seção. Os dois seguintes correspondem aos deslocamentos devidos às rotações ϕ_x e ϕ_y , associadas por esta hipótese às derivadas em relação a z dos deslocamentos do eixo passando pelo pólo ($\phi_x = -v'$ e $\phi_y = u'$). O quarto termo representa o empenamento da seção transversal e é similar ao obtido por Saint-Venant para torção uniforme (expressão (4) do cap. II), embora aqui ϕ'_z não seja constante em z.

Note-se que a forma do empenamento é a mesma para todas as seções, mas sua intensidade difere de uma seção para outra, sendo proporcional a ϕ'_z . Para ϕ'_z positivo, áreas setoriais positivas correspondem a deslocamentos no sentido positivo de z.

A área setorial, nas seções abertas de paredes delgadas, corresponde à função empenamento $\Psi(x,y)$ da teoria da torção uniforme, como pode ser constatado comparando-se (7.c) à expressão 43 do cap.II.

III.3 - TENSÕES E DEFORMAÇÕES NORMAIS

A deformação longitudinal em qualquer ponto da seção transversal é dada por

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w(z,s)}{\partial z} = w'_0(z) - u''(z)x(s) - v''(z)y(s) + \phi'_z(z)\omega^A(s) \quad (8)$$

As tensões normais no ponto M são admitidas constantes ao longo da espessura e podem ser obtidas da expressão (8), Omitindo-se por simplicidade a variável s, vem que:

$$\sigma = E \varepsilon_z = E [w'_0(z) - u''(z)x - v''(z)y + \phi'_z(z)\omega] \quad (9)$$

O diagrama de tensões normais decorrentes do empenamento da seção transversal é, portanto, proporcional ao diagrama das áreas setoriais.

A teoria de Saint-Venant ou da torção pura trata do caso particular $\varepsilon_z = 0$ para qualquer valor de s , ou seja, $w_o'(z) = 0$, $u''(z) = 0$ e $v''(z) = 0$ (deslocamentos de corpo rígido) e ainda $\varphi''_z(z) = 0$, de onde $\varphi'_z(z) = \text{constante}$.

III.4 - TENSÕES DE CISALHAMENTO

Na teoria de Vlasov, apenas as tensões de cisalhamento na direção da tangente à superfície média τ_v são consideradas. As tensões de cisalhamento τ_t podem ser obtidas da teoria de Saint-Venant.

As tensões de cisalhamento devem ser determinadas a partir das condições de equilíbrio de um elemento da barra na direção longitudinal (fig. III.5) já que, por hipótese, as distorções no plano tangente à superfície média são nulas. Assim:

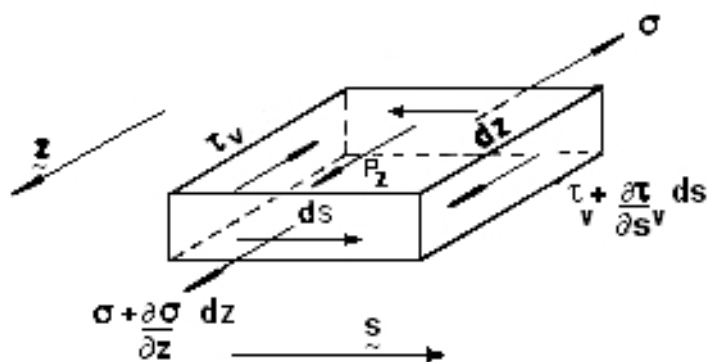


FIGURA III.5

$$\frac{\partial \tau_v}{\partial s} ds dz = -p_z ds dz - \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz ds$$

logo

$$\frac{\partial \tau_v}{\partial s} = -\frac{p_z}{t} - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \quad (10)$$

onde p_z é a projeção das forças externas na direção z .

Integrando-se a expressão (10) entre uma origem M_0 e o ponto M , respectivamente de coordenadas s_0 e s , e substituindo-se σ da expressão (9), tem-se:

$$\begin{aligned} \tau_{v_M} - \tau_{v_{M_0}} &= \tau_v(z, s) - \tau_v(z, s_0) = -\int_{s_0}^s \left[\frac{p_z}{t} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] ds = \\ &= \frac{E}{t} \left[-\frac{1}{E} \int_{s_0}^s p_z ds - w_0'' \int_{s_0}^s t ds + u'''(z) \int_{s_0}^s x t ds + v'''(z) \int_{s_0}^s y t ds - \phi_z''' \int_{s_0}^s \omega t ds \right] \end{aligned}$$

logo:

$$\tau_v(z, s) - \tau_v(z, s_0) = \frac{E}{t} \left[-\frac{1}{E} \int_{s_0}^s p_z ds - w_0''(z) A(s) - u'''(z) S_Y(s) + v'''(z) S_X(s) - \phi_z'''(z) S_\omega(s) \right] \quad (11)$$

onde:

$$A(s) = \int_{s_0}^s t ds, \quad S_X(s) = \int_{s_0}^s y t ds \quad e \quad S_Y(s) = -\int_{s_0}^s x t ds$$

são respectivamente a área e os momentos estáticos em relação aos eixos x e y .

$S_\omega(s) = \int_{s_0}^s \omega t ds$, por analogia, é denominado momento estático setorial do trecho da seção entre a origem M_0 e o ponto M . Esta origem não tem qualquer relação com a origem setorial B , sendo apenas um ponto no qual é a tensão de cisalhamento é conhecida. Usualmente, este ponto é uma extremidade do contorno, onde $\tau_v(z, s_0) = 0$.

$A(s)$, $S_X(s)$, $S_Y(s)$ e $S_\omega(s)$ são então calculados para a parte da seção entre a extremidade e o ponto M . Os incrementos do momento estático setorial ao longo de s e com origem M_0 são positivos se a área setorial é positiva ou, em notação vetorial, se o produto vetorial $\vec{ds} \wedge \vec{\omega}$ é positivo (no sentido de $\vec{n}$).

$\vec{\omega}$ é um vetor com direção $\vec{z}$ e sentido correspondente ao sinal da área setorial.

Mostra-se adiante (comparar as expressões 11 e 37.c) que, para momentos de torção positivos, as tensões de cisalhamento τ_v são positivas, ou seja, têm o sentido de s , se o momento estático setorial é positivo.

Alguns exemplos de determinação do momento estático setorial são apresentados no item 8.

Adicionalmente, se as forças externas na direção z ao longo da superfície são nulas ($p_z = 0$), os deslocamentos $w_0(z)$ são lineares em z e, assim, $w_0''(z) = 0$. Neste caso,

$$\tau_v(z, s) = \frac{E}{t} \left[-u'''(z) S_y(s) + v'''(z) S_x(s) - \varphi_z''' S_\omega(s) \right] \quad (12)$$

Os termos em u''' e v''' correspondem às tensões de cisalhamento τ_b resultantes da flexão em dois planos ortogonais. O termo em φ_z''' corresponde às tensões de cisalhamento τ_ω , uniformes ao longo da espessura, devidas ao empenamento da seção. As tensões de cisalhamento totais na seção são obtidas adicionando-se as tensões de cisalhamento correspondentes à torção uniforme (expressão (41) do cap. II) às indicadas acima, logo:

$$\tau(z, s) = \frac{E}{t} \left[-u'''(z) S_y(s) + v'''(z) S_x(s) - \varphi_z''' S_\omega(s) \right] - 2 \frac{M_z}{I_t} n \quad (13)$$

III.5 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO

As funções $w_0(z)$, $u(z)$, $v(z)$ e $\varphi_z(z)$ são determinadas a partir das condições de equilíbrio de um elemento de barra de comprimento dz . A ação do restante da barra é substituída pelas tensões (σ , τ_v), onde em τ_v não estão incluídas as tensões provenientes da torção pura, e pelo momento de torção M_z , estaticamente equivalente à resultante das tensões de cisalhamento τ_t correspondentes à torção pura. O carregamento externo, estaticamente equivalente às forças f_x , f_y e f_z , é substituído por um sistema de forças de mesma intensidade passando pelo pólo A e pelo momento de torção m_z resultante destas forças (fig. III.6).

$$m_z = f_y e_x - f_x e_y \quad (14)$$

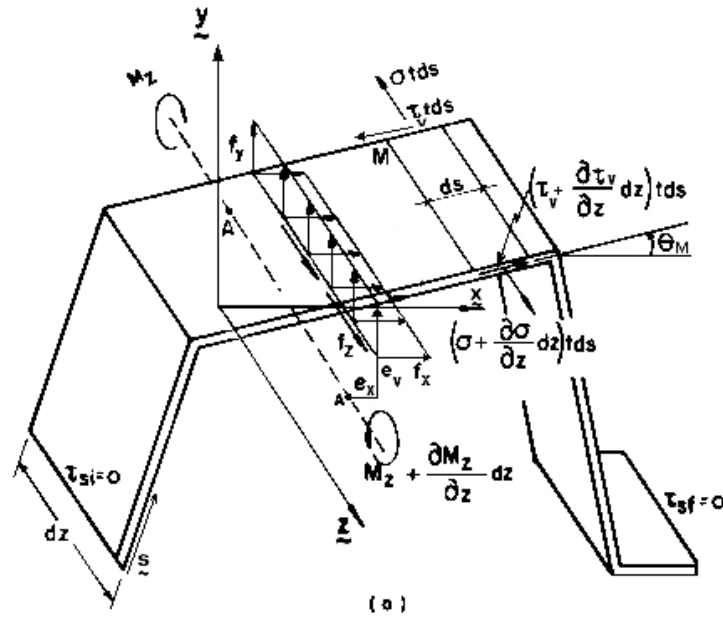


FIGURA III.6.a

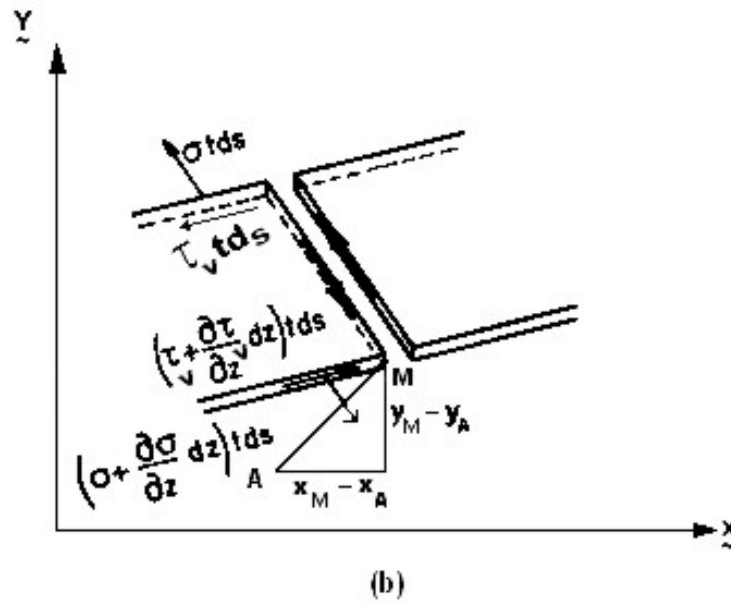


FIGURA III.6.b

Equilíbrio de forças na direção z:

$$\int_{S_t} \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz t ds + f_z dz = 0 \quad \therefore \quad \int_A \frac{\partial \sigma}{\partial z} dA + f_z = 0 \quad (15.a)$$

Equilíbrio de forças na direção x:

$$+ \int_{S_i}^{S_f} \frac{\partial \tau_v}{\partial z} dz \cos \theta_M t ds + f_x dz = 0 \quad \therefore \quad t \int_{S_i}^{S_f} \frac{\partial \tau_v}{\partial z} dx + f_x = 0 \quad (15.b)$$

Equilíbrio de forças na direção y:

$$\int_{S_i}^{S_f} \frac{\partial \tau_v}{\partial z} dz \sin \theta_M t ds + f_y dz = 0 \quad \therefore \quad t \int_{S_i}^{S_f} \frac{\partial \tau_v}{\partial z} dy + f_y = 0 \quad (15.c)$$

Equilíbrio de momentos em torno do pólo A:

$$\int_{S_i}^{S_f} \frac{\partial \tau_v}{\partial z} dz [(x_M - x_A) \sin \theta_M - (y_M - y_A) \cos \theta_M] t ds + \frac{\partial M_z}{\partial z} dz + m_z dz = 0$$

Utilizando-se a expressão (6) na equação de equilíbrio de momentos, vem que:

$$\int_{S_i}^{S_f} \frac{\partial \tau_v}{\partial z} t r_n ds + M'_z + m_z = - \int_{S_i}^{S_f} \frac{\partial \tau_v}{\partial z} t d\omega + M'_z + m_z = 0 \quad (15.d)$$

Substituindo-se (9) em (15.a), tem-se:

$$A \omega'' + S_y u''' - S_x v''' + S_\omega \varphi_z''' = - \frac{f_z}{E} \quad (16)$$

onde S_x , S_y e S_ω são calculados para toda a seção transversal.

Das expressões (9) e (10), obtém-se:

$$t \frac{\partial \tau_v}{\partial s} = -P_z - t \frac{\partial \sigma}{\partial z} = -P_z - Et [w''(z) - u'''(z)x - v'''(z)y + \varphi_z'''(z)\omega]$$

logo:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[t \frac{\partial \tau_v}{\partial s} \right] ds = - \frac{\partial p_z}{\partial z} ds - w_0'''(z) E dA + u^{IV}(z) E x dA + v^{IV}(z) E y dA - \phi_z^{IV}(z) E \omega dA \quad (17)$$

Integrando-se por partes, ao longo da superfície média, a equação de equilíbrio de forças na direção x, tem-se:

$$\left[t x \frac{\partial \tau_v}{\partial z} \right]_{S_i}^{S_f} - t \int_{S_i}^{S_f} x \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \tau_v}{\partial z} \right) ds + f_x = 0$$

Sendo as tensões de cisalhamento τ_v nulas no contorno e portanto $\left[t x \frac{\partial \tau_v}{\partial z} \right]_{S_i}^{S_f} = 0$, resulta

$$-t \int_{S_i}^{S_f} x \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \tau_v}{\partial z} \right) ds + f_x = 0 \quad (18.a)$$

Analogamente para as forças na direção y e momentos em torno de z:

$$- \int_{S_i}^{S_f} y t \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \tau_v}{\partial z} \right) ds + f_y = 0 \quad (18.b)$$

$$\int_{S_i}^{S_f} \omega t \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \tau_v}{\partial z} \right) ds + M_z' + m_z = 0 \quad (18.c)$$

Substituindo-se (17) nestas expressões e notando-se que $M_z' = G I_t \phi_z''$ resulta

$$-S_y w_0''' - I_y u^{IV} + I_{xy} v^{IV} + I_{\omega x} \phi_z^{IV} = - \frac{1}{E} \left[f_x + \int_{S_i}^{S_f} x \frac{\partial p_z}{\partial z} ds \right] \quad (19.a)$$

$$S_x w_0''' + I_{xy} u^{IV} - I_x v^{IV} + I_{\omega y} \phi_z^{IV} = - \frac{1}{E} \left[f_y + \int_{S_i}^{S_f} y \frac{\partial p_z}{\partial z} ds \right] \quad (19.b)$$

$$-S_{\omega} w_0''' + I_{\omega x} u^{IV} + I_{\omega y} v^{IV} - I_{\omega} \phi_z^{IV} + \frac{GI_t}{E} \phi_z'' = \frac{1}{E} \left[-m_z + \int_{S_i}^{S_f} \omega \frac{\partial p_z}{\partial z} ds \right] \quad (19.c)$$

As expressões (16) e (19) representam as quatro equações diferenciais de equilíbrio para as quatro incógnitas $w_0(z)$, $u(z)$, $v(z)$ e $\phi_z(z)$.

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad e \quad I_{xy} = - \int_A xy dA$$

são respectivamente os momentos de inércia em relação aos eixos x e y e o produto de inércia da seção transversal. Por analogia,

$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA, \quad I_{\omega x} = \int_A \omega x dA \quad e \quad I_{\omega y} = \int_A \omega y dA$$

são denominados respectivamente momento de inércia setorial ou constante de empenamento e produtos de inércia setoriais da seção transversal em relação aos eixos x e y.

O sistema de equações diferenciais de equilíbrio da barra pode ser bastante simplificado alterando-se a posição dos eixos de referência, do pólo A e da origem B.

a) Mudança dos eixos de referência

Os momentos estáticos S_x e S_y se anulam se os eixos de referência passam pelo centro de gravidade da seção G. Adicionalmente, se os eixos de referência são eixos principais, o produto de inércia I_{xy} também se anula.

b) Mudança do pólo A

Conhecida a área setorial em relação a um pólo A qualquer, pode-se facilmente determinar a área setorial em relação a um outro pólo C. Calculando-se $d\omega^A$ e $d\omega^C$, para os pólos A e C por meio da expressão (6), tem-se:

$$d\omega^A = (y_M - y_A) dx - (x_M - x_A) dy$$

$$d\omega^C = (y_M - y_C) dx - (x_M - x_C) dy$$

logo:

$$d(\omega^C - \omega^A) = (y_A - y_C) dx - (x_A - x_C) dy \quad (20)$$

Integrando-se entre a origem B e o ponto M, vem que:

$$\omega^C = \omega^A + (y_A - y_C)(x_M - x_B) - (x_A - x_C)(y_M - y_B) \quad (21)$$

Como a área setorial independe dos eixos de referência adotados toma-se aqui, por simplicidade, o sistema de eixos passando pelo centro de gravidade, para o qual $S_x = S_y = 0$

O pólo C que torna os produtos de inércia setoriais $I_{\omega x}$ e $I_{\omega y}$ nulos pode ser obtido por meio de:

$$I_{\omega x}^C = \int_A \omega^C x dA = \int_A \omega^A x dA - \int_A (y_C - y_A) x^2 dA + \int_A (x_C - x_A) xy dA - \int_A (x_C - x_A) xy_B dA + \int_A (y_C - y_A) x_B x dA = 0$$

$$I_{\omega y}^C = \int_A \omega^C y dA = \int_A \omega^A y dA - \int_A (y_C - y_A) xy dA + \int_A (x_C - x_A) y^2 dA - \int_A (x_C - x_A) y_B y dA + \int_A (y_C - y_A) x_B y dA = 0$$

logo:

$$I_{\omega x}^A - (y_C - y_A)I_y - (x_C - x_A)I_{xy} = 0$$

$$I_{\omega y}^A + (y_C - y_A)I_{xy} + (x_C - x_A)I_x = 0$$

Resolvendo-se este sistema de equações, obtém-se

$$y_C - y_A = \frac{I_{\omega x}^A I_x - I_{xy} I_{\omega y}^A}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (22.a)$$

$$x_C - x_A = -\frac{I_{\omega y}^A I_y - I_{xy} I_{\omega x}^A}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (22.b)$$

O pólo C assim determinado é o pólo principal. Pode-se mostrar que, para seções com um eixo de simetria, o pólo está sobre este eixo.

Em particular se os eixos são os principais, tem-se $I_{xy} = 0$ e

$$y_C - y_A = \frac{I_{\omega x}^A}{I_y} \quad (23.a)$$

$$x_C - x_A = -\frac{I_{\omega y}^A}{I_x} \quad (23.b)$$

c) Mudança da origem B

As coordenadas do pólo principal C não são afetadas por uma mudança da origem B. Este fato pode ser constatado tomando, para o mesmo pólo A, duas origens diferentes B e D. As áreas setoriais diferem apenas por uma constante dada pelo dobro da área do setor compreendido entre os raios vetores AB e AD (fig. III.7.a), ou seja:

$$\omega^A(s_{B,S}) = \omega^A(s_{D,S}) + \omega^A(s_{B,S_D}) \quad (24)$$

onde o primeiro termo entre parênteses indica a origem e o segundo o ponto em questão.

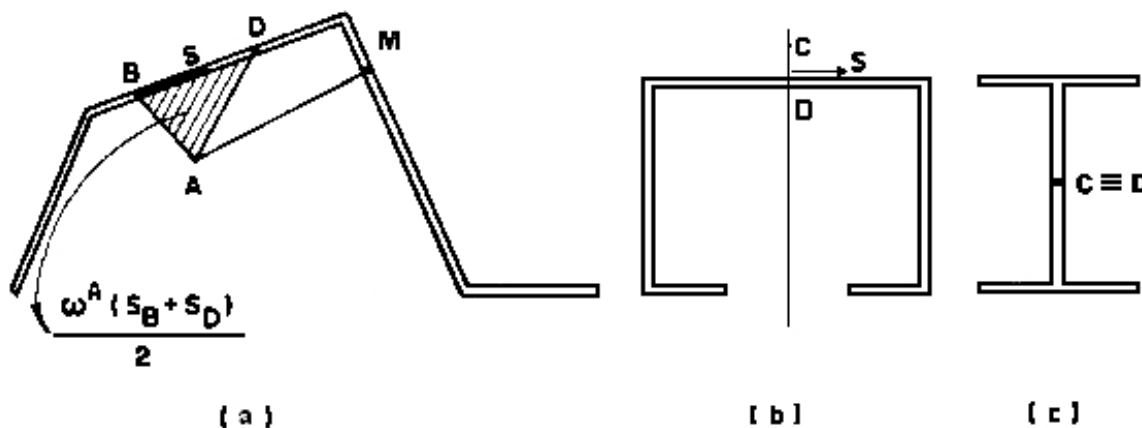


FIGURA III.7

Tomando-se novamente por simplicidade o sistema de eixos principais de referência e substituindo-se esta expressão em (23), pode-se mostrar que x_C e y_C podem ser calculados indistintamente a partir das áreas setoriais em relação às origens B ou D, pois:

$$(y_C - y_A)I_y = I_{\omega x}^A = \int_A \omega^A(s_B, s) x dA = \int_A \omega^A(s_D, s) x dA + \omega^A(s_B, s_D) \int_A x dA = \int_A \omega^A(s_D, s) x dA \quad (25.a)$$

$$(x_C - x_A)I_x = -I_{\omega y}^A = \int_A \omega^A(s_B, s) y dA = -\int_A \omega^A(s_D, s) y dA - \omega^A(s_B, s_D) \int_A y dA = -\int_A \omega^A(s_D, s) y dA \quad (25.b)$$

Por outro lado, com a escolha de uma origem adequada, pode-se obter $S_\omega = 0$. A área setorial correspondente a esta origem D e ao pólo C é denominada área setorial principal, e pode ser calculada por meio de:

$$S_\omega^D = \int_A \omega^C(s_D, s) dA = \int_A \omega^C(s_B, s) dA - \omega^C(s_B, s_D) A = 0$$

ou

$$\omega^C(s_B, s_D) = \frac{1}{A} \int_A \omega^C(s_B, s) dA \quad (26)$$

Assim, $\omega^C(s_B, s_D)$ representa o valor médio da área setorial ω^C ao longo da área A, calculada para uma origem B qualquer. Para seções com um eixo de simetria, o ponto D que torna este valor médio nulo está no encontro do eixo de simetria com a seção transversal - conforme fig. (III.7.b) - visto que o eixo de simetria divide a seção em duas partes com áreas setoriais iguais em módulo e de sinais contrários.

Para seções como o perfil tipo I simétrico da fig. III.7.c, pode existir um número infinito de pontos com as características da origem desejada. Todos os pontos da alma da seção têm área setorial nula e, assim, qualquer ponto da alma pode ser tomado como origem. Convenciona-se definir a origem como o ponto mais próximo do pólo principal da seção. Esta origem é denominada origem setorial principal.

Tomando-se agora os eixos x e y passando pelo centro de gravidade e as propriedades setoriais da seção calculadas em relação ao pólo e à origem principais e considerando-se ainda que as forças externas são compostas apenas pelas forças resultantes f_x , f_y e f_z e pelo momento m_z , as equações de equilíbrio passam a ser escritas como:

$$E A w_0'' = -f_z \quad (27.a)$$

$$EI_y^G u^{IV} - EI_{xy}^G v^{IV} = f_x \quad (27.b)$$

$$-EI_{xy}^G u^{IV} + EI_x^G v^{IV} = f_y \quad (27.c)$$

$$EI_\omega^C \varphi_z^{IV} - GI_t \varphi_z'' = m_z \quad (27.d)$$

Note-se que, se os eixos x e y são os principais, tem-se $I_{xy} = 0$ e as equações ficam desacopladas.

III.5.1 - Observações

a) Teoria da torção não-uniforme

Uma barra está submetida apenas a torção não-uniforme se as tensões normais são somente as que decorrem do empenamento da barra, ou seja,

$$\sigma = E \varphi_z'' \omega$$

Os momentos fletores e a força normal devem ser nulos, já que o único esforço solicitante é o momento de torção, logo:

$$M_x = \int_A \sigma y dA = \int_A E \varphi_z'' \omega y dA = E \varphi_z'' I_{\omega y} = 0$$

$$M_y = - \int_A \sigma x dA = - \int_A E \varphi_z'' \omega x dA = -E \varphi_z'' I_{\omega x} = 0$$

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A E \varphi_z'' \omega dA = E \varphi_z'' S_\omega = 0$$

Conclui-se, portanto, que só ocorre torção não-uniforme se o eixo de rotação passa pelo pólo principal. Note-se que, na teoria da torção uniforme de Saint-Venant, a posição do eixo de rotação não precisa ser definida. Este ponto é designado, na teoria da torção não-uniforme, como o centro de torção.

b) Teoria da flexão simples

Nas barras submetidas à flexão simples, o momento de torção aplicado m_z é nulo. Adotando-se por simplicidade o sistema de eixos principais e notando-se que as tensões de cisalhamento são

somente as que decorrem das forças cortantes V_x e V_y correspondentes às forças transversais aplicadas no pólo A tem-se, da Teoria da Resistência dos Materiais,

$$\tau_v^o = \frac{V_x}{t I_y} S_y(s) - \frac{V_y}{t I_x} S_x(s)$$

Integrando-se a equação de equilíbrio de momentos em torno do pólo A (expressão (15.d)) para $m_z = 0$, e vem que

$$M_z = + \int_{S_i}^{S_f} \tau_v t d\omega = + \frac{V_x}{I_y} \int_{S_i}^{S_f} S_y(s) d\omega - \frac{V_y}{I_x} \int_{S_i}^{S_f} S_x(s) d\omega \quad (28)$$

Integrando-se por partes o primeiro termo desta expressão, tem-se:

$$\int_{S_i}^{S_f} S_y(s) d\omega = S_y(s) \omega \Big|_{S_i}^{S_f} - \int_{S_i}^{S_f} \frac{dS_y(s)}{ds} \omega ds$$

onde $S_y(s)$ é nulo nos extremos de integração e

$$\frac{dS_y(s)}{ds} \omega ds = -x t \omega ds = -\omega x dA$$

Procedendo-se de forma análoga com o segundo termo da expressão (28), obtém-se:

$$M_z = + \frac{V_x}{I_y} \int \omega x dA + \frac{V_y}{I_x} \int \omega y dA = + \frac{V_x}{I_y} I_{\omega x} + \frac{V_y}{I_x} I_{\omega y} = + V_x (y_C - y_A) - V_y (x_C - x_A) \quad (29)$$

Conclui-se, portanto, que não ocorre torção ($M_z = 0$) apenas quando as forças transversais são aplicadas num eixo passando pelo pólo principal. Este ponto é definido, na teoria de flexão, como o centro de cisalhamento.

III.6 - ESFORÇOS SOLICITANTES

Os esforços solicitantes na seção transversal podem ser calculados a partir das tensões normais e de cisalhamento dadas pelas expressões (9) e (13).

III.6.1 - Esforços solicitantes correspondentes às tensões normais

Os esforços solicitantes correspondentes às tensões normais são a força normal N , os momentos fletores M_x e M_y em torno dos eixos x e y e o bimomento M_ω , dados por:

$$N = \int_A \sigma dA \quad (30.a)$$

$$M_x = \int_A \sigma y dA \quad (30.b)$$

$$M_y = - \int_A \sigma x dA \quad (30.c)$$

$$M_\omega = \int_A \sigma \omega dA \quad (30.d)$$

Substituindo-se a expressão (9) em (30), obtém-se:

$$N = \int_A \sigma dA = E \left[A w'_0(z) + S_y u''(z) - S_x v''(z) + S_\omega \varphi''_z(z) \right] \quad (31.a)$$

$$M_x = \int_A \sigma y dA = E \left[S_x w'_0(z) + I_{xy} u''(z) - I_x v''(z) + I_{\omega y} \varphi''_z(z) \right] \quad (31.b)$$

$$M_y = - \int_A \sigma x dA = E \left[S_y w'_0(z) + I_y u''(z) - I_{xy} v''(z) - I_{\omega x} \varphi''_z(z) \right] \quad (31.c)$$

$$M_\omega = \int_A \sigma \omega dA = E \left[S_\omega w'_0(z) - I_{\omega x} u''(z) - I_{\omega y} v''(z) + I_\omega \varphi''_z(z) \right] \quad (31.d)$$

Em particular se os eixos x e y passam pelo centro de gravidade e a área setorial é calculada em relação ao pólo e à origem setorial principais, tem-se $S_x^G, S_y^G, S_\omega^C, I_{\omega x}^C, I_{\omega y}^C$ nulos e assim, omitindo-se os índices C e G,

$$N = EA w_0'(z) \quad (32.a)$$

$$M_x = E(I_{xy} u''(z) - I_x v''(z)) \quad (32.b)$$

$$M_y = E(I_y u''(z) - I_{xy} v''(z)) \quad (32.c)$$

$$M_\omega = EI_\omega \phi_z''(z) \quad (32.d)$$

logo:

$$w_0'(z) = \frac{N}{EA} \quad (33.a)$$

$$Eu''(z) = \frac{-M_x I_{xy} + M_y I_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (33.b)$$

$$Ev''(z) = \frac{-M_x I_y + M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (33.c)$$

$$E\phi_z''(z) = \frac{M_\omega}{I_\omega} \quad (33.d)$$

Substituindo-se estes valores na expressão (9), obtém-se

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{I_x M_y - I_{xy} M_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} x + \frac{I_y M_x - I_{xy} M_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} y + \frac{M_\omega}{I_\omega} \omega \quad (34)$$

Pode-se observar que a expressão (34) contém um termo adicional, em relação aos da teoria da Resistência dos Materiais, correspondente ao empenamento da seção transversal, linearmente proporcional ao mesmo. Este termo é analisado em pormenor no item 6.3.

III.6.2 - Esforços solicitantes correspondentes às tensões de cisalhamento

Um procedimento similar pode ser adotado para as tensões de cisalhamento, definindo-se como esforços solicitantes as forças resultantes na seção nas direções x e y, V_x e V_y , e o momento de flexo-torção T_ω em relação ao pólo principal, decorrente das forças $\tau_v t$ atuantes ao longo da tangente ao contorno e uniformes ao longo da espessura.

$$V_x = \int_A \tau_v t ds \cos \theta_M = \int_A \tau_v t dx \quad (35.a)$$

$$V_y = \int_A \tau_v t ds \sin \theta_M = \int_A \tau_v t dy \quad (35.b)$$

$$T_\omega = \int_A r_n \tau_v dA = \int_{Si}^{Sf} r_n \tau_v t ds = - \int_A \tau_v t d\omega \quad (35.c)$$

Tomando-se novamente $p_z = 0$, e substituindo-se a expressão (12) em (35), tem-se:

$$V_x = E \left[-u'''(z) \int_A S_y(s) dx + v'''(z) \int_A S_x(s) dx - \phi_z'''(z) \int_A S_\omega(s) dx \right] \quad (36.a)$$

$$V_y = E \left[-u'''(z) \int_A S_y(s) dy + v'''(z) \int_A S_x(s) dy - \phi_z'''(z) \int_A S_\omega(s) dy \right] \quad (36.b)$$

$$T_\omega = E \left[u'''(z) \int_A S_y(s) d\omega - v'''(z) \int_A S_x(s) d\omega + \phi_z'''(z) \int_A S_\omega(s) d\omega \right] \quad (36.c)$$

Em particular se os eixos x e y passam pelo centro de gravidade e a área setorial é calculada em relação ao pólo e origem setorial principais tem-se, por integração por partes, que:

$$\int_{Si}^{Sf} S_x^G dx = S_x^G \cdot x \Big|_{Si}^{Sf} - \int_A x dS_x^G = - \int_A xy dA = I_{xy}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_A S_y^G dx &= I_y^G, & \int_A S_\omega^C dx &= 0, & \int_A S_\omega^C d\omega &= -I_\omega^C, & \int_A S_y^G d\omega &= 0 \\ \int_A S_y^G dy &= -I_{xy}^G, & \int_A S_x^G dy &= -I_x^G, & \int_A S_\omega^C dy &= 0, & \int_A S_x^G d\omega &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo-se estes valores nas expressões (36) e omitindo-se os índices C e G, tem-se

$$V_x = E \left[-I_y u'''(z) + I_{xy} v'''(z) \right] \quad (37.a)$$

$$V_y = E \left[I_{xy} u'''(z) - I_x v'''(z) \right] \quad (37.b)$$

$$T_\omega = -EI_\omega \phi_z'''(z) \quad (37.c)$$

logo:

$$Eu'''(z) = -\frac{V_y I_{xy} + V_x I_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (38.a)$$

$$Ev'''(z) = -\frac{V_x I_{xy} + V_y I_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} \quad (38.b)$$

$$E\phi_z'''(z) = -\frac{T_\omega}{I_\omega} \quad (38.c)$$

Substituindo-se estes valores na expressão (12), vem que:

$$\tau_v = \frac{1}{t} \left[\frac{V_y I_{xy} + V_x I_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} S_y(s) - \frac{V_x I_{xy} + V_y I_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} S_x(s) + \frac{T_\omega}{I_\omega} S_\omega(s) \right] \quad (39)$$

Esta expressão também apresenta um termo adicional, em relação aos da teoria da Resistência dos Materiais, correspondente ao empenamento da seção.

As tensões de cisalhamento totais na seção são obtidas adicionando-se ao valor obtido de (39), uniforme ao longo da espessura, o correspondente à torção uniforme.

Derivando-se as expressões (32) em relação a z e comparando-se às expressões (37), conclui-se que:

$$V_x = -M'_y \quad (40.a)$$

$$V_y = M'_x \quad (40.b)$$

$$T_\omega = -M'_\omega \quad (40.c)$$

O momento de torção total na seção é dado pela soma de T_ω e M_z , logo:

$$T = T_\omega + M_z = -EI_\omega \varphi_z''' + GI_t \varphi_z' \quad (41)$$

Comparando-se as expressões (41) e (27.d), pode-se escrever que (ver fig. III.8)

$$\frac{dT}{dz} = -EI_\omega \varphi_z^{IV} + GI_t \varphi_z'' = -M''_\omega + \frac{GI_t}{EI_\omega} M_\omega = -m_z \quad (42)$$

As expressões (41) e (42) são formas alternativas de apresentação da equação de equilíbrio de momentos (27.d)

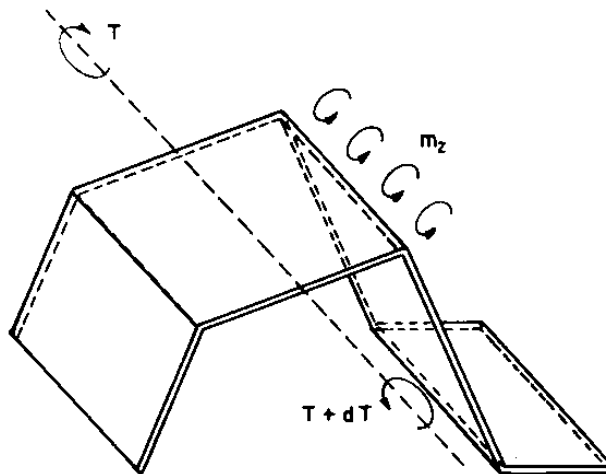


FIGURA III.8

As equações de equilíbrio (27) podem então ser re-escritas em função dos esforços solicitantes e das forças externas, obtendo-se:

$$N' + f_z = 0 \quad (43.a)$$

$$V'_x + f_x = 0 \quad (43.b)$$

$$V'_y + f_y = 0 \quad (43.c)$$

$$M''_{\omega} - M'_z - m_z = M''_{\omega} - T' - T'_{\omega} - m_z = 0 \quad (43.d)$$

Pode-se observar ainda que, se $T_{\omega} = 0$, ou seja, se as tensões de cisalhamento são tais que o momento das forças delas resultante em torno do pólo principal é nulo, a solução do problema é a da teoria da Resistência dos Materiais, onde se despreza o empenamento. Neste caso, se a peça não está submetida à torção pura, tem-se $\phi_z(z) = 0$. Isto ocorre se as forças transversais passam pelo pólo principal, como já visto em 5.1.

III.6.3 - Observações

Os esforços solicitantes deduzidos analiticamente neste capítulo serão agora obtidos de maneira informal para uma seção tipo I ou C.

- a- Considere-se, a título de ilustração, duas barras, uma de seção quadrada e outra de seção delgada em forma de H, ambas engastadas na base e submetidas, na extremidade livre, a uma forma normal excêntrica de valor $-4F$. Admitindo-se válida a superposição de efeitos, este carregamento pode ser decomposto em quatro, como indicado na fig. III.9.

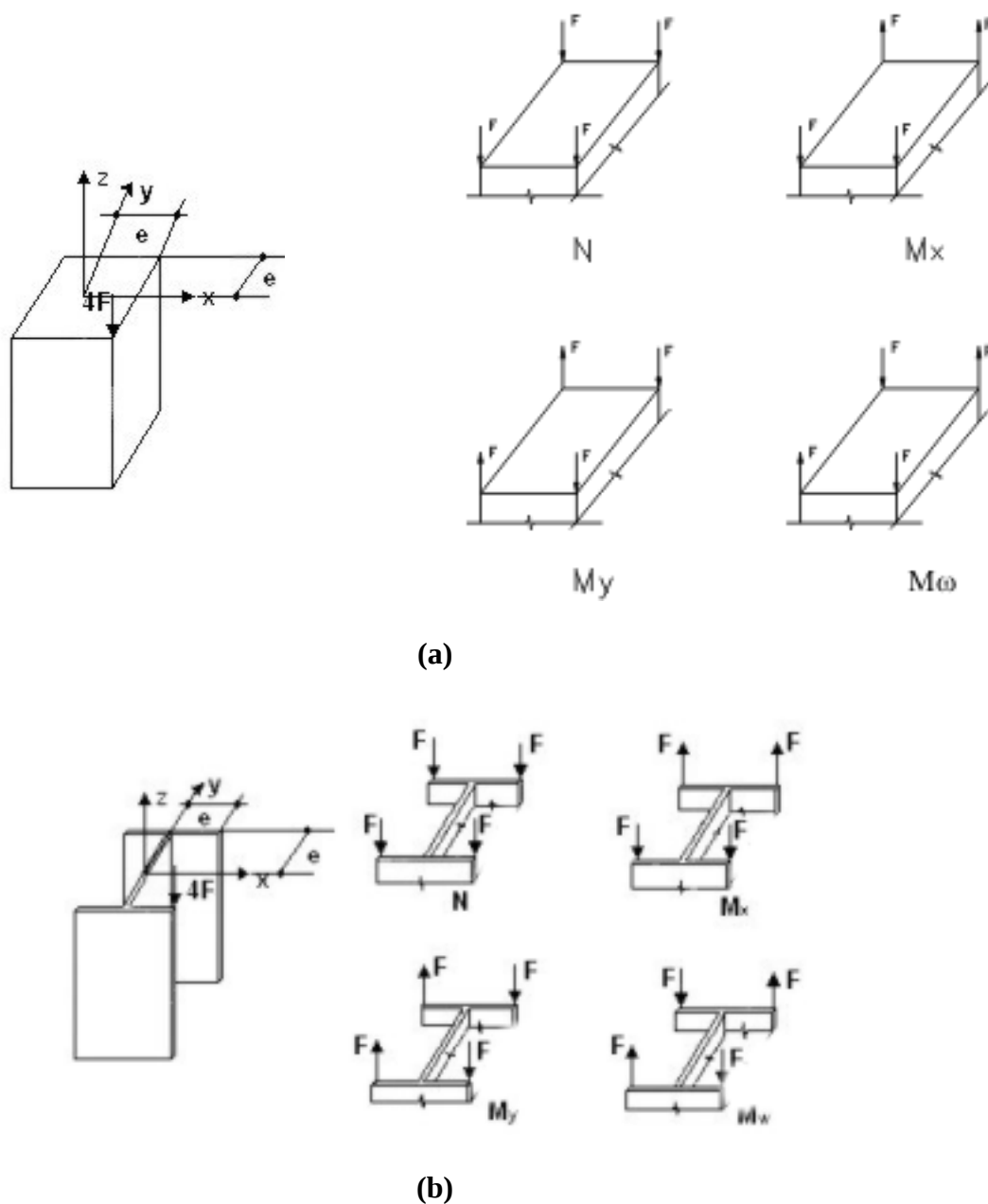


FIGURA III.9

Os três primeiros equivalem estaticamente a uma força axial $-4F$ e a momentos fletores $M_x = M_y = 4Fe$ em torno dos eixos principais x e y . Para cada um destes carregamentos aplica-se a hipótese de Bernoulli–Euler, de que as seções planas permanecem planas e ortogonais ao eixo da barra, sendo possível considerar, nestes casos, apenas os alongamentos paralelos ao eixo da barra.

No entanto, para reproduzir o carregamento proposto, é necessário considerar ainda o quarto sistema de forças. Para a barra de seção quadrada, este carregamento é geralmente desprezado, já que a força normal e os momentos fletores resultantes são nulos e, de acordo com o princípio de Saint–Venant, um sistema de forças estaticamente equivalente a zero aplicado a uma

pequena parte da superfície de um corpo não afeta significativamente partes do corpo afastadas da região de introdução das cargas.

Para a barra de seção H de parede delgada, embora o sistema de forças seja também estaticamente equivalente a zero, pode-se notar que a grande flexibilidade da alma permite que ocorra flexão das abas de forma praticamente independente, com sentidos opostos em cada uma delas, o que provoca empenamento da seção transversal (fig. III.10).

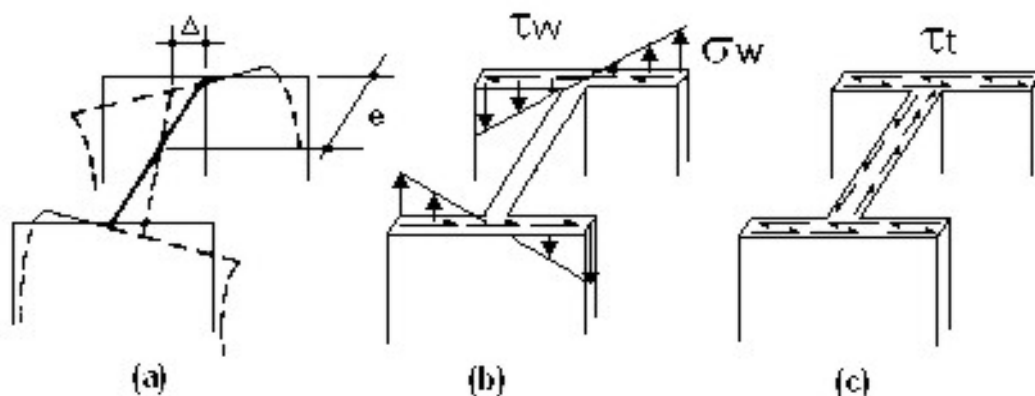


FIGURA III.10

Para manter-se a integridade da seção, a alma deve girar em torno do eixo z de um ângulo igual a $\varphi = \Delta/e$ e, se não houver distorção da seção em seu próprio plano, as abas também giram do mesmo ângulo, ocorrendo então também torção da seção transversal.

A flexão das abas resulta em tensões normais σ_w e de cisalhamento τ_w (fig. III.10.b) enquanto que a torção da seção resulta em tensões de cisalhamento τ_t , que se somam às tensões decorrentes dos outros três sistemas de forças.

Portanto, não se aplica às barras de parede delgada, o princípio de Saint-Venant.

Este sistema auto-equilibrado de forças resulta, portanto, na seção tipo H nos seguintes esforços solicitantes:

- Dois momentos fletores de igual intensidade e sentidos contrários, atuando em torno do eixo passando pela alma do perfil e com afastamento igual à distância entre as abas, definido como um novo esforço solicitante generalizado M_w denominado bimomento.
 - Duas forças cortantes V_w nas abas, resultantes da flexão das mesmas, de igual intensidade e sentidos contrários. O momento de torção $T_w = V_w 2e$ é definido como um novo esforço solicitante generalizado, denominado momento de flexo-torção.
 - Um momento de torção M_z que no caso, por equilíbrio, tem igual intensidade e sentido contrário a T_w , já que não há momento de torção externo T aplicado.
- b- O fenômeno apresentado para força normal excêntrica ocorre também para outros carregamentos, como é o caso das barras submetidas à torção. Na teoria usual da torção,

denominada torção uniforme ou torção de Saint-Venant, admite-se que as tensões normais longitudinais e as tensões de cisalhamento no plano médio da seção transversal são nulas. Isto, no entanto, não ocorre se existe algum impedimento ao livre empenamento da barra, ou seja, diferenças de empenamento em seções vizinhas. Estas diferenças são geralmente decorrentes de variação do momento de torção ao longo do comprimento ou da existência de vínculos (fig. III.11). Nestes casos, a barra fica submetida não apenas a torção pura mas também a tensões normais e de cisalhamento análogas às do caso anterior. Esta condição é denominada torção não uniforme.

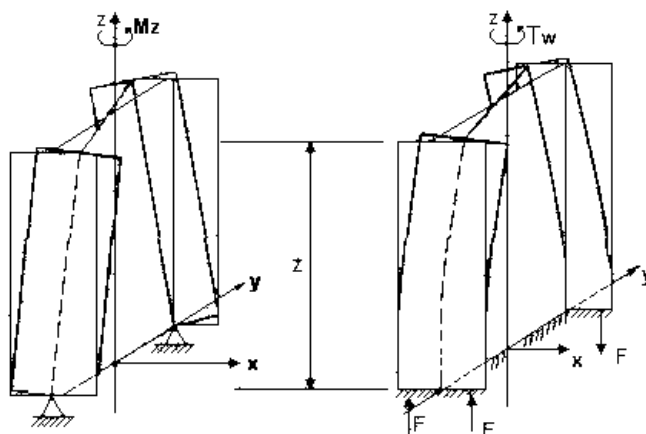


FIGURA III.11

- c- O estado de tensões numa barra submetida a flexão depende, em perfis de seção delgada, da forma de introdução do carregamento externo.

Considerem-se as formas de aplicação de momento fletor a uma barra de seção C, bi-apoiada e com restrição à rotação da seção transversal nas extremidades, indicadas na fig. III.12.

Para forças na direção y, o carregamento indicado na fig. III.12.b introduz apenas flexão em torno de x, enquanto que o da fig. III.12.a introduz flexão em torno de x e ainda flexo-torção, já que as forças não passam pelo centro de torção e o momento de torção não é uniforme na barra.

Para forças longitudinais, o estado de tensões depende da posição do carregamento. É fácil observar que, se as forças se aproximam da extremidade da aba, aumentam os esforços de flexão na mesma (flexo-torção), que se somam aos de flexão em torno de x. Como se verá adiante, é possível determinar um ponto de aplicação das forças tal que os esforços de flexo-torção se anulem. Este ponto é a origem principal.

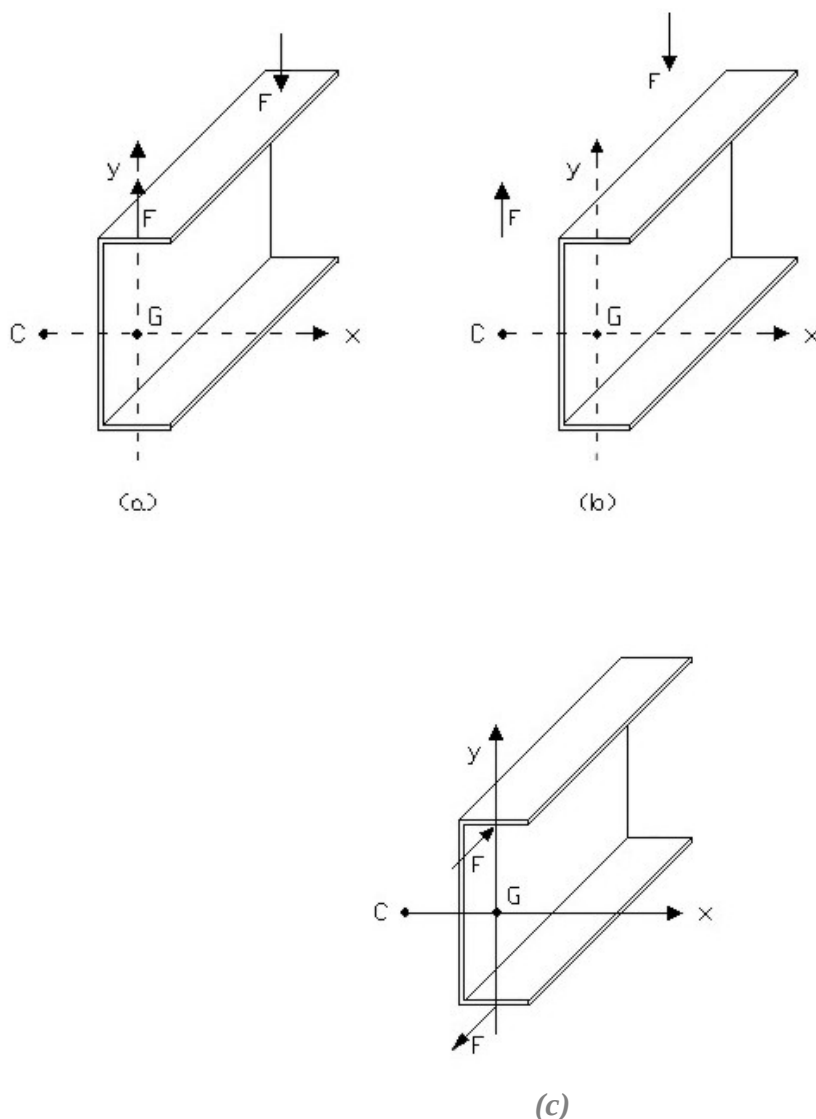


FIGURA III.12

III.7 - BARRAS COM APOIOS ELÁSTICOS

Considere-se a barra com seção de parede delgada da fig. III.13, continuamente apoiada em meio elástico ao longo de um eixo paralelo ao eixo z e passando pelo ponto H de coordenadas (x_H, y_H) . As forças reativas do meio elástico nas direções x e y são proporcionais aos deslocamentos u_H e v_H , enquanto que o momento de torção reativo depende destas forças e possui uma parcela proporcional a rotação ϕ_{ZH} , ou seja,

$$f_{x\beta} = -\beta_x u_H \quad (44.a)$$

$$f_{y\beta} = -\beta_y v_H \quad (44.b)$$

$$m_{z\beta} = -\beta_\phi \varphi_{zH} + (x_H - x_C) f_{y\beta} - (y_H - y_C) f_{x\beta} \quad (44.c)$$

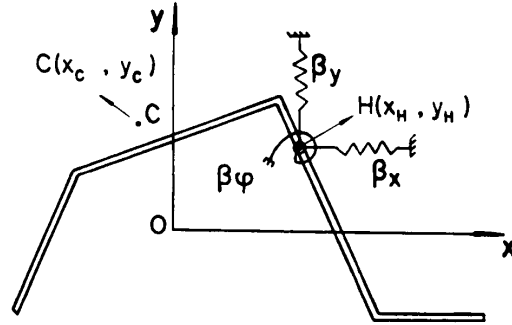


FIGURA III.13

$f_{x\beta}$, $f_{y\beta}$ e $m_{z\beta}$ são as reações do meio elástico por unidade de comprimento da barra. β_x , β_y e β_ϕ expressam a rigidez do apoio elástico por unidade de comprimento da barra, ou seja, forças nas direções x e y e momento de torção correspondentes a deslocamentos e rotações unitários.

Os deslocamentos e rotações do ponto H podem ser escritos em função dos deslocamentos e rotações do centro de torção como:

$$u_H = u - (y_H - y_C) \varphi_z$$

$$v_H = v - (x_H - x_C) \varphi_z$$

$$\varphi_{zH} = \varphi_z$$

Assim, as forças e momentos de torção adicionais a serem considerados nas equações de equilíbrio para barras com apoios elásticos são:

$$f_{x\beta} = -\beta_x [u - (y_H - y_C) \varphi_z] \quad (45.a)$$

$$f_{y\beta} = -\beta_y [v + (x_H - x_C) \varphi_z] \quad (45.b)$$

$$m_{z\beta} = -\beta_\phi \varphi_z + \beta_x (y_H - y_C) u - \beta_y (x_H - x_C) v + \\ + [-\beta_x (y_H - y_C)^2 - \beta_y (x_H - x_C)^2] \varphi_z \quad (45.c)$$

III.8 - PROPRIEDADES SETORIAIS DAS SEÇÕES MAIS COMUNS

As propriedades setoriais definidas neste capítulo são calculadas a seguir para algumas seções transversais muito utilizadas no projeto de estruturas de aço.

Os valores aproximados das demais propriedades geométricas, já conhecidas da Resistência dos Materiais, foram calculados desprezando-se a espessura diante das demais dimensões, ou seja, desprezando-se as parcelas $ds.t^3/12$ dos momentos de inércia dos elementos. Estes valores são apenas apresentados, sem dedução.

III.8.1 - Seção I monossimétrica

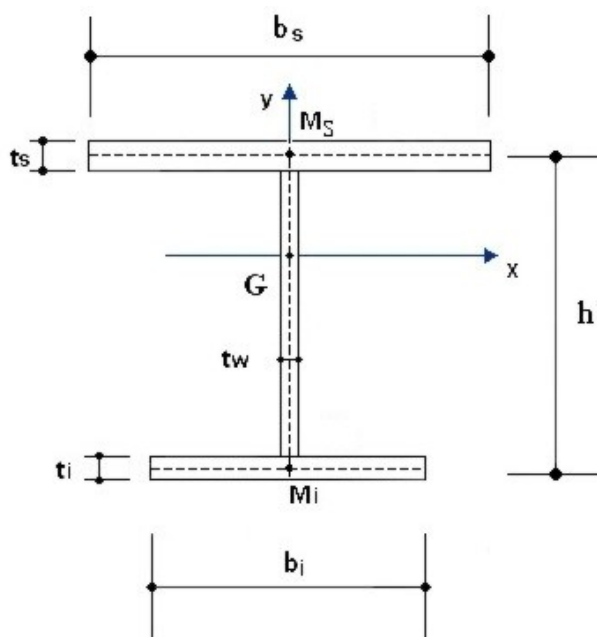


FIGURA III.14

$$y_{MS} = \frac{h \left(b_i t_i + \frac{h t_w}{2} \right)}{h t_w + b_i t_i + b_s t_s} \quad (46.a)$$

$$I_x = \frac{t_w h^3}{12} + \left(\frac{h}{2} - y_{MS} \right)^2 h t_w + b_s t_s y_{MS}^2 + b_i t_i (h - y_{MS})^2 \quad (46.b)$$

$$I_y = I_{ys} + I_{yi} = \frac{t_s b_s^3}{12} + \frac{t_i b_i^3}{12} \quad (46.c)$$

a) Determinação do pólo principal C

O perfil em questão apresenta um eixo de simetria, logo o pólo e a origem principais estão sobre este eixo. Tomando-se inicialmente o pólo auxiliar A e a origem B coincidentes com M_i ($y_A = y_B = y_{MS} - h$), tem-se para a área setorial ω_B^A , de acordo com a fig. III.15.a:

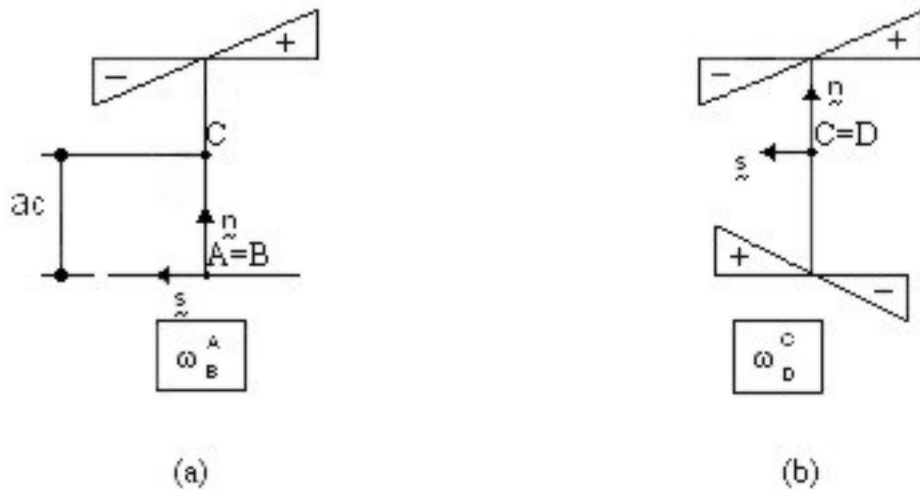


FIGURA III.15

- aba inferior e alma:

$$r_n = 0, \quad \text{logo } \omega^A = 0$$

- aba superior:

$$r_n = +h \quad (\text{no sentido de } \tilde{n})$$

$$ds = -dx$$

$$\omega_B^A = \int_0^s -r_n ds = -hs = hx$$

O produto de inércia setorial $I_{\omega\kappa}^A$ é dado por

$$I_{\omega\kappa}^A = \int_A \omega^A x dA = \int_{-bs/2}^{+bs/2} hx^2 t_s dx = h \frac{t_s b^3}{12} = hI_{ys}$$

e de acordo com a expressão (23.a),

$$y_C - y_A = \frac{I_{\omega x}^A}{I_y} = h \frac{I_{ys}}{I_y} = a_c \quad (47)$$

Pode se mostrar que $I_{\omega y}^A = 0$

b) Área setorial principal

Tomando-se agora o pólo principal C e a origem principal D coincidente com C (notar que qualquer ponto da alma pode ser tomado como origem principal) tem-se, de acordo com a figura III.15.b,

- alma:

$$r_n = 0 \rightarrow \omega^c = 0 \quad (48.a)$$

- aba superior:

$$r_n = + (h - a_c) = + h \frac{I_{yi}}{I_y} \rightarrow \omega^c = h \frac{I_{yi}}{I_y} x \quad (48.b)$$

- aba inferior:

$$r_n = -h \frac{I_{ys}}{I_y} \rightarrow \omega^c = -h \frac{I_{ys}}{I_y} x \quad (48.c)$$

Note-se que $\frac{1}{A} \int_A \omega^c dA = 0$, visto que o diagrama de ω^c é simétrico em relação ao eixo y, logo D é a origem principal e o diagrama apresentado na figura III.15.b é o da área setorial principal.

Note-se ainda que o resultado obtido independe do sentido de s, desde que $\tilde{n}, \tilde{s}, \tilde{z}$ seja dextrógiro.

c) Momento de inércia setorial

$$I_{\omega}^c = \int_A \omega^c{}^2 dA = 2 \int_0^{bs/2} h^2 \left(\frac{I_{yi}}{I_y} \right)^2 x^2 t_s dx + 2 \int_0^{bi/2} h^2 \left(\frac{I_{ys}}{I_y} \right)^2 x^2 t_i dx = h^2 \frac{I_{yi} I_{ys}}{I_y} \quad (49)$$

d) Momento estático setorial

Tomando-se para origem M_o de cálculo dos momentos estáticos setoriais as extremidades das abas superior e inferior com x positivo, tem-se, conforme fig. III.16:

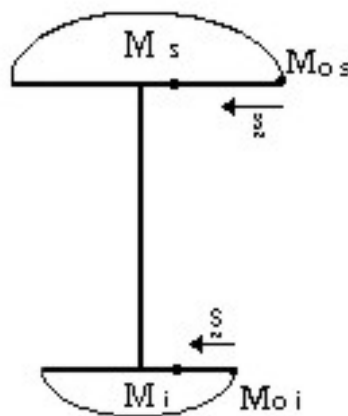


FIGURA III.16

- aba superior ($ds = -dx$)

$$S_{\omega}^c = \int_{M_{os}}^{M_s} \omega^c t_s ds = - \int_{b_s/2}^{x_{M_s}} h \frac{I_{yi}}{I_y} x t_s dx = - \frac{ht_s}{2} \cdot \frac{I_{yi}}{I_y} \left(x_{M_s}^2 - \frac{b_s^2}{4} \right)$$

Para

$$x_M = \pm b_s / 2 \rightarrow S_{\omega}^c = 0$$

Para

$$x_M = 0 \rightarrow S_{\omega_{\max}}^c = \frac{ht_s b_s^2}{8} \frac{I_{yi}}{I_y} \quad (50.a)$$

O valor máximo de S_{ω}^c ocorre para $x = 0$, pois

$$\frac{dS_{\omega}^c}{ds_0} = t_s \omega^c$$

e ω^c é nulo para $x = 0$

- aba inferior:

$$S_{\omega}^c = - \int_{b_i/2}^{x_{M_i}} \left(-h \frac{I_{ys}}{I_i} \right) x t_i dx = + \frac{ht_i}{2} \frac{I_{ys}}{I_y} \left(x_{M_i}^2 - \frac{b_i^2}{4} \right)$$

Para

$$x_M = 0 \rightarrow S_{\omega_{\max}}^c = - \frac{ht_i b_i^2}{8} \frac{I_{ys}}{I_y} \quad (50.b)$$

Para momentos de flexo-torção positivos, as tensões de cisalhamento têm o sentido de $\tilde{s}$ na aba superior e sentido oposto a $\tilde{s}$ na aba inferior, já que os S_{ω}^c são respectivamente positivos e negativos nestas abas.

e) Caso particular: perfil simétrico - fig. III.17

$$I_{yi} = I_{ys} = \frac{I_y}{2}$$

$$\omega_s^c = -\omega_i^c = \frac{hx}{2} \rightarrow \omega_{\max}^c = \frac{bh}{4} \quad (51.a)$$

$$I_\omega^c = I_y \frac{h^2}{4} \quad (51.b)$$

$$S_{\omega \max}^c = \frac{htb^2}{16} \quad (51.c)$$

$$(y_c - y_A) = \frac{h}{2} \quad (51.d)$$

f) Caso particular: perfil T ($b_i = t_i = 0$) - fig. III.18

$$I_{yi} = 0, \quad \text{logo} \quad I_y = I_{ys} \quad \text{e} \quad (y_c = y_A) = h$$

Como o pólo principal coincide com o encontro aba-alma, os raios vetores r_n são nulos e, portanto, $\omega^c = 0$. Assim:

$$\omega^c = 0, \quad S_\omega^c = 0, \quad I_\omega^c = 0 \quad (52)$$

Logo, não ocorre flexo-torção no perfil com seção T ($M_\omega = 0$ e $T_\omega = 0$)



FIGURA III.17

FIGURA III.18

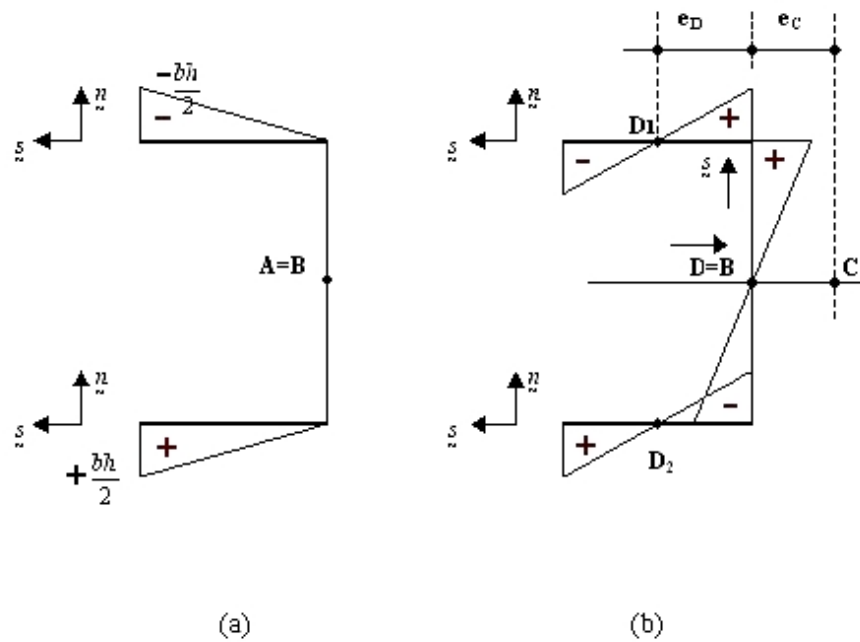


FIGURA III.20

- alma:

$$r_n = 0 \rightarrow \omega^A = 0$$

- aba superior:

$$r_n = +\frac{h}{2} \quad e \quad ds = -dx \rightarrow \omega^A = \int_0^s -r_n ds = +\frac{h}{2}(x-x_A)$$

- aba inferior:

$$r_n = -\frac{h}{2} \quad e \quad ds = -dx \rightarrow \omega^A = -\frac{h}{2}(x-x_A)$$

A posição do pólo principal pode ser obtida de

$$\begin{aligned} (x_C - x_A) = e_C &= -\frac{I_{\omega y}^A}{I_x} = -\frac{\int_A \omega^A y dA}{I_x} = \\ &= -\frac{1}{I_x} \left[\int_{x_A}^{(x_A-b)} + \frac{h}{2} (x - x_A) \frac{h}{2} t_f dx + \int_{x_A}^{(x_A-b)} -\frac{h}{2} (x - x_A) \left(-\frac{h}{2}\right) t_f dx \right] = \frac{h^2 t_f b^2}{4I_x} \end{aligned}$$

Substituindo-se o valor de I_x , tem-se:

$$e_C = \frac{3t_f b^2}{ht_w + 6bt_f} \quad (54)$$

b) Área setorial principal

Tomando-se agora o pólo principal C e a origem principal D coincidente com B (fig. III.20.b):

- alma:

$$r_n = -e_C \quad e \quad ds = dy \rightarrow \omega^C = e_C y \quad (55.a)$$

Para

$$y = \pm \frac{h}{2} \rightarrow \omega^C = \pm e_C \frac{h}{2} \quad (55.b)$$

- aba superior:

$$r_n = +\frac{h}{2} \quad e \quad ds = -dx$$

$$\omega^C = \omega^C(M_1) + \int_{M_1}^M -r_n ds = e_C \frac{h}{2} + \frac{h}{2} (x - x_A) = \frac{h}{2} (e_C - x_A + x) \quad (55.c)$$

Para

$$x = x_A - b \rightarrow \omega^C = \frac{h}{2} (e_C - b) \quad (55.d)$$

- aba inferior:

$$r_n = -\frac{h}{2} \quad e \quad ds = -dx$$

$$\omega^C = -e_c \frac{h}{2} - \frac{h}{2} (x - x_A) = -\frac{h}{2} (e_c - x_A + x) \quad (55.e)$$

Para

$$x = x_A - b \rightarrow \omega_c = -\frac{h}{2} (e_c - b) \quad (55.f)$$

Observações:

- O valor médio da área setorial ao longo da seção transversal é nulo $\left(\frac{1}{A} \int_A \omega^C dA = 0 \right)$.

Logo, de acordo com a expressão (26), D é a origem principal.

- A área setorial ω^C também se anula para os pontos D₁ e D₂ com abscissa $x = x_A - e_c$, ou seja, $e_{D1} = e_c$. Estes pontos também podem ser tomados como origens principais.

c) Momento de inércia setorial

$$\begin{aligned} I_{\omega}^c &= \int_A \omega^{C^2} dA = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} (e_c y)^2 t_w dy + 2 \int_{x_A}^{x_A-b} \left[\frac{h}{2} (e_c - x_A + x) \right]^2 t_f dx = \\ &= e_c^2 \left[\frac{t_w h^3}{12} + \frac{h^2 t_f b^2}{2} \right] + \frac{h^2 t_f b^2}{2} \left(\frac{b}{3} - e_c \right) = e_c^2 I_x + \frac{h^2 t_f b^2}{6} (b - 3e_c) \end{aligned} \quad (56)$$

d) Momento estático setorial

Tomando-se para origem M₀ de cálculo do momento estático setorial na aba superior a extremidade da mesma (logo $ds = dx$) tem-se:

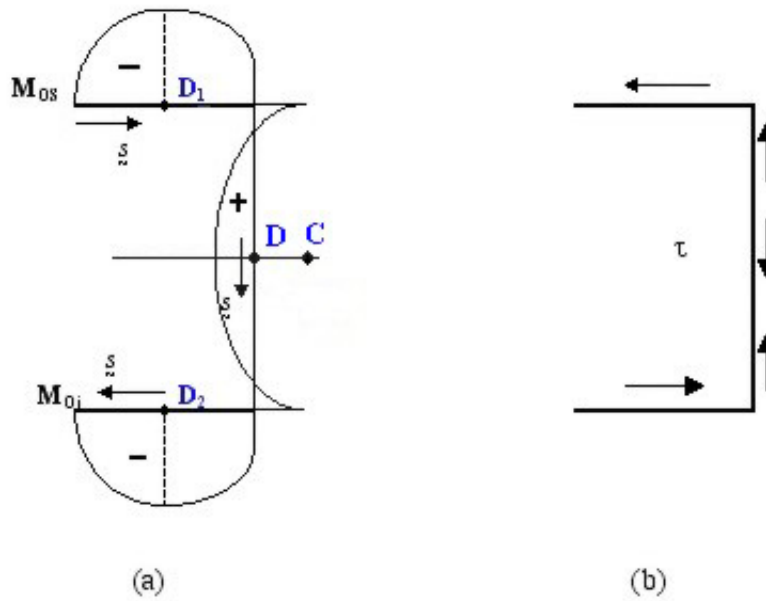


FIGURA III.21

$$S_{\omega}^c = \int_{M_{os}}^M \omega^c dA = \int_{x_A-b}^x \frac{h}{2} (e_C - x_A + x) t_f dx =$$

$$= \frac{ht_f}{2} \left\{ (e_C - x_A) \left[x - (x_A - b) \right] + \frac{1}{2} \left[x^2 - (x_A - b)^2 \right] \right\}$$

Para $x = (x_A - b)$, tem-se $S_{\omega}^c = 0$

$$\text{Para } x = x_A \rightarrow S_{\omega}^c = -\frac{ht_f b}{4} (b - 2e_C)$$

Substituindo-se a expressão de e_C , obtém-se finalmente:

$$S_{\omega}^c(x_A) = -\frac{h^2 t_w e_C}{12} \quad (57.a)$$

O momento estático tem seu valor máximo em módulo para ω^c nulo, ou seja, para o ponto D_1 , onde:

$$x_{D1} = (x_A - e_C) \rightarrow S_{\omega \max}^c = \frac{ht_f}{4} [b - e_C]^2 \quad (57.b)$$

Note-se que o momento estático setorial na aba superior é negativo para esta orientação do eixo s . Assim, para momentos de flexo-torção positivos, as tensões de cisalhamento têm sentido contrário a s .

Um procedimento análogo poderia ser adotado para a aba inferior. Tomando-se para origem de cálculo de S_{ω}^c o ponto M_{oi} , obter-se-ia o mesmo valor absoluto de S_{ω}^c mas com sinal positivo, ou seja, para momentos de flexo-torção positivos, as tensões de cisalhamento teriam o sentido deste novo eixo s .

Na alma, tem-se:

$$S_{\omega}^c = S_{\omega}^c(M_1) + \int_{M_1}^M \omega^c dA$$

Logo, para $ds = -dy$,

$$S_{\omega}^c = -\frac{ht_f b}{4}(b-2e_c) - \int_{h/2}^y e_c y t_w dy = -\frac{ht_f b}{4}(b-2e_c) - \frac{e_c t_w}{8}(4y^2 - h^2)$$

$$\text{Para } y=0 \rightarrow S_{\omega}^c = -\frac{ht_f b}{4}(b-2e_c) + e_c \frac{t_w h^2}{8} = +\frac{h^2 t_w e_c}{24} \quad (57.c)$$

O momento estático setorial no centro da alma é positivo, ou seja, no sentido s , logo ocorre uma inversão no fluxo das tensões de cisalhamento neste trecho.

III.8.3 - Seção Z ponto-simétrica

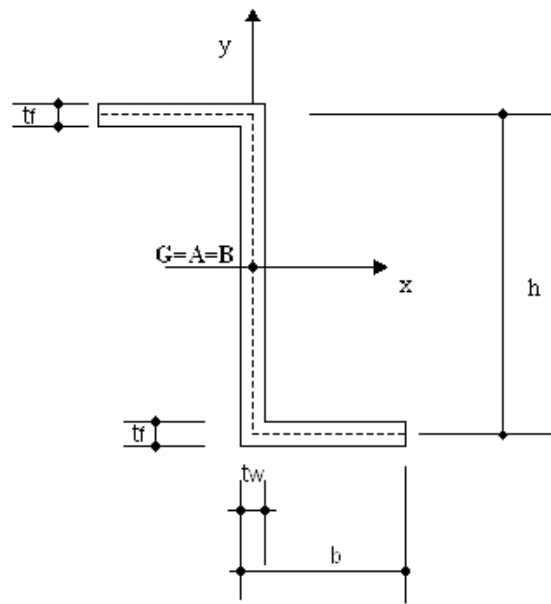


FIGURA III.22

$$A = 2bt_f + ht_w \quad (58.a)$$

$$I_x = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{bt_f h^2}{2} \quad (58.b)$$

$$I_y = \frac{2t_f b^3}{3} \quad (58.c)$$

$$I_{xy} = \frac{ht_f b^2}{2} \quad (58.d)$$

a) Determinação do pólo principal C

O perfil Z não apresenta nenhum eixo de simetria (perfil ponto-simétrico). Escolhendo-se inicialmente o pólo auxiliar A e a origem B coincidentes com o centro de gravidade, obtém-se a área setorial ω_B^A da fig. III.23.a:

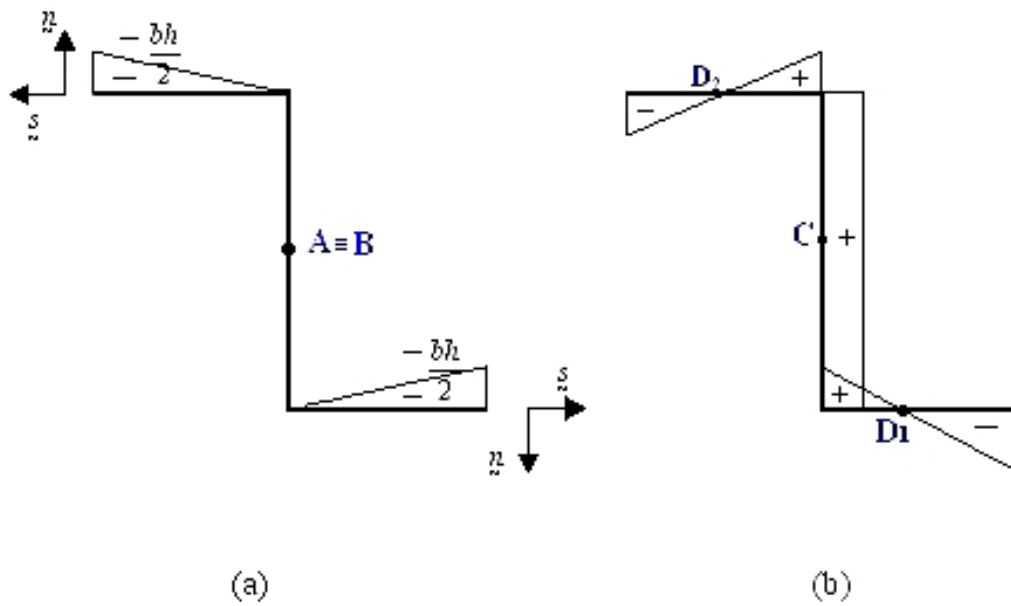


FIGURA III.23

- alma:

$$r_n = 0 \rightarrow \omega_B^A = 0$$

- aba superior:

$$r_n = +\frac{h}{2} \quad e \quad ds = -dx \rightarrow \omega_B^A = -\int_0^s r_n ds = +\frac{h}{2}x \quad (-b \leq x \leq 0)$$

- aba inferior:

$$r_n = +\frac{h}{2} \quad e \quad ds = dx \rightarrow \omega_B^A = -\frac{h}{2}x \quad (0 \leq x \leq b)$$

Os produtos de inércia setoriais são dados por:

$$I_{\omega y}^A = \int_A \omega_B^A y dA = \int_{-b}^0 \frac{h}{2} x \frac{h}{2} t_f dx + \int_0^b \left(-\frac{h}{2} x \right) \frac{h}{2} t_f dx = 0$$

analogamente:

$$I_{\omega x}^A = \int_A \omega_B^A x dA = \int_{-b}^0 \frac{h}{2} x^2 t_f dx + \int_0^b -\frac{h}{2} x^2 t_f dx = 0$$

Logo, com o uso das expressões 22, obtém-se $(x_c - x_A) = 0$ e $(y_c - y_A) = 0$, e portanto o pólo principal C coincide com G.

b) Área setorial principal

Da expressão (26), obtém-se:

$$\omega^c(s_B, s_D) = \frac{1}{A} \int_A \omega_B^c(s_B, s) dA = \frac{1}{A} \left[\int_{-b}^0 \frac{h}{2} x t_f dx + \int_0^b \left(-\frac{h}{2} x \right) t_f dx \right] = -\frac{h t_f b^2}{2A} \neq 0$$

Logo, como o valor médio da área setorial ω_B^c não é nulo, B não é a origem principal. A área setorial principal ω_D^c pode ser obtida da expressão (24), onde

$$\omega_D^c = \omega^c(s_D, s) = \omega^c(s_B, s) - \omega^c(s_B, s_D) = \omega_B^c + \frac{h t_f b^2}{2A}$$

de onde resulta (fig. III.23.b)

- alma:

$$\omega_D^c = \frac{h t_f b^2}{2A} \quad (59.a)$$

- aba superior:

$$\omega_D^c = \frac{h}{2} \left(\frac{t_f b^2}{A} + x \right) \quad (59.b)$$

Para $x = -b$, tem-se:

$$\omega_D^c = \frac{hb}{2} \left(\frac{A_f}{A} - 1 \right) \quad (59.c)$$

- aba inferior:

$$\omega_D^c = \frac{h}{2} \left(\frac{t_f b^2}{A} - x \right) \quad (59.d)$$

Para $x = +b$, tem-se:

$$\omega_D^c = \frac{hb}{2} \left(\frac{A_f}{A} - 1 \right) \quad (59.e)$$

As origens principais D_1 e D_2 , nas quais $\omega_D^c = 0$, têm como abscissas

$$x_{D2} = -x_{D1} = -\frac{t_f b^2}{A} \quad (60)$$

c) Momento de inércia setorial

Tomando-se as áreas setoriais principais ω_D^c , tem-se:

$$\begin{aligned} I_\omega^c &= \int_A \omega_D^{c2} dA = 2 \int_0^b \left[\frac{h}{2} \left(\frac{t_f b^2}{A} - x \right) \right]^2 t_f dx + \int_{-h/2}^{+h/2} \left[\frac{ht_f b^2}{2A} \right]^2 t_\omega dy = \\ &= \frac{h^2 t_f b^3}{12A} (t_f b + 2ht_\omega) \end{aligned} \quad (61)$$

Observação:

O momento de inércia setorial para a origem principal pode também ser obtido daquele calculado para a origem B, pois:

$$I_{\omega}^c(s_B) = \int_A \omega_B^c dA = \int_A \left[\omega_D^c - 2\omega_D^c \frac{ht_f b^2}{2A} + \left(\frac{ht_f b^2}{2A} \right)^2 \right] dA = I_{\omega}^c + \left(\frac{ht_f b^2}{2A} \right)^2 A$$

d) Momento estático setorial

- aba superior:

Tomando-se para origem M_o de cálculo do momento estático setorial na aba superior a extremidade da mesma (logo $ds = dx$), tem-se:

$$S_{\omega}^c = \int_{M_o}^M \omega^c dA = \frac{h}{2} \int_{-b}^x \left(\frac{t_f \cdot b^2}{A} + x \right) t_f \cdot dx = \frac{h \cdot t_f}{2} \left[\frac{t_f b^2}{A} x + \frac{x^2}{2} + \frac{t_f b^3}{A} - \frac{b^2}{2} \right]$$

Para $x = 0$ tem-se:

$$S_{\omega}^c = -\frac{h^2 t_{\omega} t_f b^2}{4A} \quad (62.a)$$

e para $x = x_{D2} = -\frac{t_f \cdot b^2}{A}$, tem-se:

$$S_{\omega \min}^c = -\frac{h^2 t_f b^2}{4A^2} (t_f b + ht_{\omega})^2 \quad (62.b)$$

O momento estático setorial tem seu valor máximo em módulo para D_2 , onde ω^c é nulo; é negativo em toda a aba, ou seja, o fluxo das tensões de cisalhamento é oposto a s para momentos de flexo-torção positivos.

- aba inferior:

O cálculo do momento estático para a aba inferior é análogo ao da aba superior.

- alma:

O momento estático setorial na alma é dado pelo valor do mesmo no encontro aba superior - alma adicionado do termo correspondente ao trecho de alma. Sendo $ds = -dy$, vem que:

$$S_{\omega}^c = -\frac{h^2 \cdot t_{\omega} \cdot t_f \cdot b^2}{4A} - \int_{+h/2}^y \frac{ht_f b^2}{2A} t_{\omega} dy = -\frac{ht_f t_{\omega} b_f^2}{2A} y \quad (62.c)$$

Para $y = 0$, $S_{\omega}^c = 0$

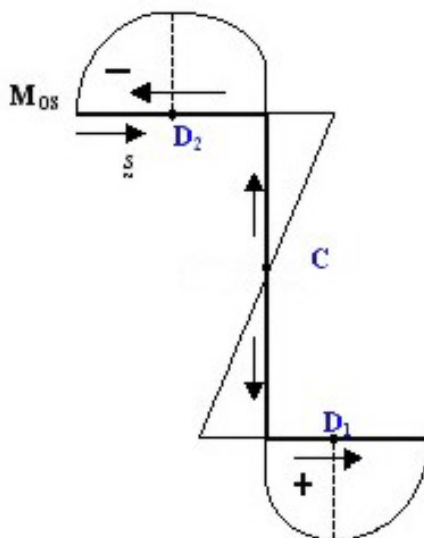


FIGURA III.24

III.9 - INTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO PARA MOMENTOS EM TORNO DE z

A equação de equilíbrio em torno de z, para eixos passando pelo centro de gravidade e pólo e origem principais é dada por:

$$\varphi_z^{IV} - k^2 \varphi_z'' = \frac{m_z}{EI_{\omega}} = -\frac{T'}{EI_{\omega}} \quad (63.a)$$

onde

$$k^2 = \frac{GI_t}{EI_\omega} \quad (63.b)$$

A equação homogênea

$$\varphi_h^{IV} - k^2 \varphi_h'' = 0$$

tem como solução $\varphi_h = ce^{rz}$, logo

$$r^4 e^{rz} - k^2 r^2 e^{rz} = 0 \rightarrow r^2 (r^2 - k^2) = 0$$

cujas raízes são

$$r_1 = r_2 = 0; \quad r_3 = -r_4 = k$$

Como um termo linear sempre satisfaz a equação homogênea, tem-se:

$$\varphi_h = C_1 + C_2 z + \bar{C}_3 e^{kz} + \bar{C}_4 e^{-kz}$$

Notando-se que

$$e^{kz} = \cosh(kz) + \sinh(kz)$$

$$e^{-kz} = \cosh(kz) - \sinh(kz)$$

e definindo-se as novas constantes $C_3 = \bar{C}_4 + \bar{C}_3$ e $C_4 = \bar{C}_3 - \bar{C}_4$ obtém-se finalmente:

$$\varphi_h = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh(kz) + C_4 \cosh(kz) \quad (64)$$

A solução geral é a soma da homogênea com a particular φ_p

$$\varphi_z = \varphi_h + \varphi_p \quad (65)$$

Os esforços solicitantes correspondentes são dados por:

$$M_z = GI_t \varphi_z' = GI_t [C_2 + C_3 k \cosh(kz) + C_4 k \sinh(kz) + \varphi_p'] \quad (66.a)$$

$$M_{\omega} = EI_{\omega} \varphi_z'' = GI_t \left[C_3 \sinh(kz) + C_4 \cosh(kz) + \frac{\varphi_p''}{k^2} \right] \quad (66.b)$$

$$T_{\omega} = -M_{\omega}' = -GI_t \left[C_3 k \cosh(kz) + C_4 k \sinh(kz) + \frac{\varphi_p'''}{k^2} \right] \quad (66.c)$$

$$T = M_z + T_{\omega} = GI_t \left[C_2 + \varphi_p' + \frac{\varphi_p'''}{k^2} \right] \quad (66.d)$$

Para o caso usual de m_z constante, a equação particular φ_p tem como solução

$$\varphi_p = -\frac{m_z}{2EI_{\omega}k^2}z^2 = -\frac{m_z}{2GI_t}z^2 \quad (67.a)$$

logo

$$\varphi_p' = -\frac{m_z}{GI_t}z \quad (67.b)$$

$$\varphi_p'' = -\frac{m_z}{GI_t} \quad (67.c)$$

$$\varphi_p''' = 0 \quad (67.d)$$

Neste caso, os esforços solicitantes passam a ser escritos como:

$$M_z = GI_t \left[C_2 + C_3 k \cosh(kz) + C_4 k \sinh(kz) - \frac{m_z}{GI_t} z \right] \quad (68.a)$$

$$M_{\omega} = GI_t \left[C_3 \sinh(kz) + C_4 \cosh(kz) - \frac{m_z}{GI_t k^2} \right] \quad (68.b)$$

$$T_{\omega} = -M_{\omega}' = -kGI_t [C_3 \cosh(kz) + C_4 \sinh(kz)] \quad (68.c)$$

$$T = M_z + T_\omega = GI_t \left[C_2 - \frac{m_z}{GI_t} z \right] \quad (68.d)$$

Os coeficientes constantes C_1 a C_4 são obtidos impondo-se as condições de contorno do problema. Para as condições de contorno usuais, tem-se:

a) Extremidade livre

Esta condição é típica para extremidades de vigas em balanço sem restrição à rotação ($\varphi_z \neq 0$) e ao empenamento ($w = \psi(x, y)$ $\varphi_z \neq 0$).

Como as tensões normais correspondentes ao empenamento são nulas, tem-se $M_\omega = 0$ e portanto $\varphi_z'' = 0$.

b) Extremidade simplesmente apoiada

Esta condição é idealizada para ligações tipo dupla cantoneira de alma e apoios em cantoneira (fig. III.25).

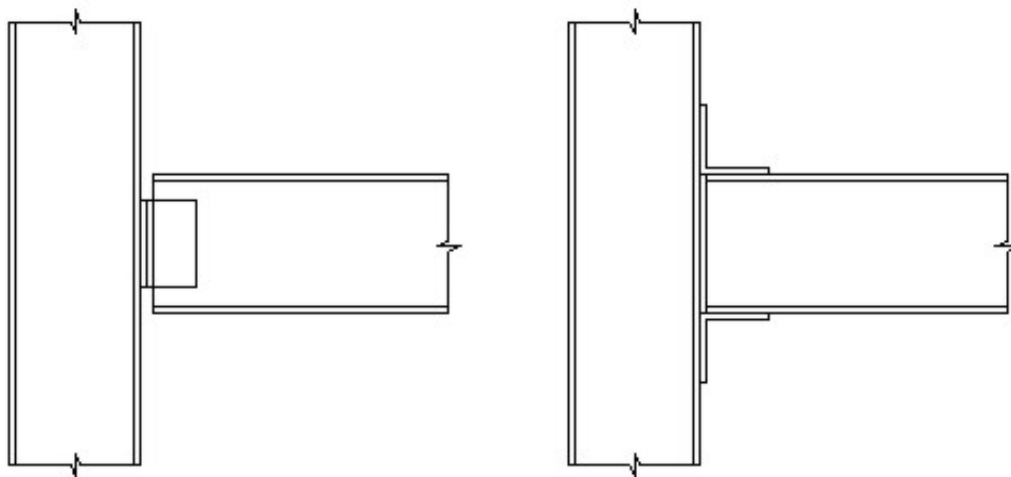


FIGURA III.25

O vínculo impede rotação em torno de z ($\varphi_z = 0$) mas não restringe o empenamento ($\varphi_z' \neq 0$ e $\varphi_z'' = 0$, $M_\omega = 0$).

c) Extremidade engastada

Para engaste perfeito, tem-se impedimento à rotação ($\varphi_z = 0$) e ao empenamento ($\varphi_z' = 0$), logo as tensões normais correspondentes ao bi-momento não são nulas ($M_\omega \neq 0$, $\varphi_z'' \neq 0$).

Esta condição é de difícil realização, dada a pequena rigidez à torção dos perfis de seção aberta usualmente utilizados nas peças de apoio. Para obtê-la, são empregados pilares de seção fechada ou enrijecidos na região da ligação (fig. III.26.a), nervuras longitudinais nas vigas (figura III.26.b) ou vigas de travamento transversais (fig. III.26.c).

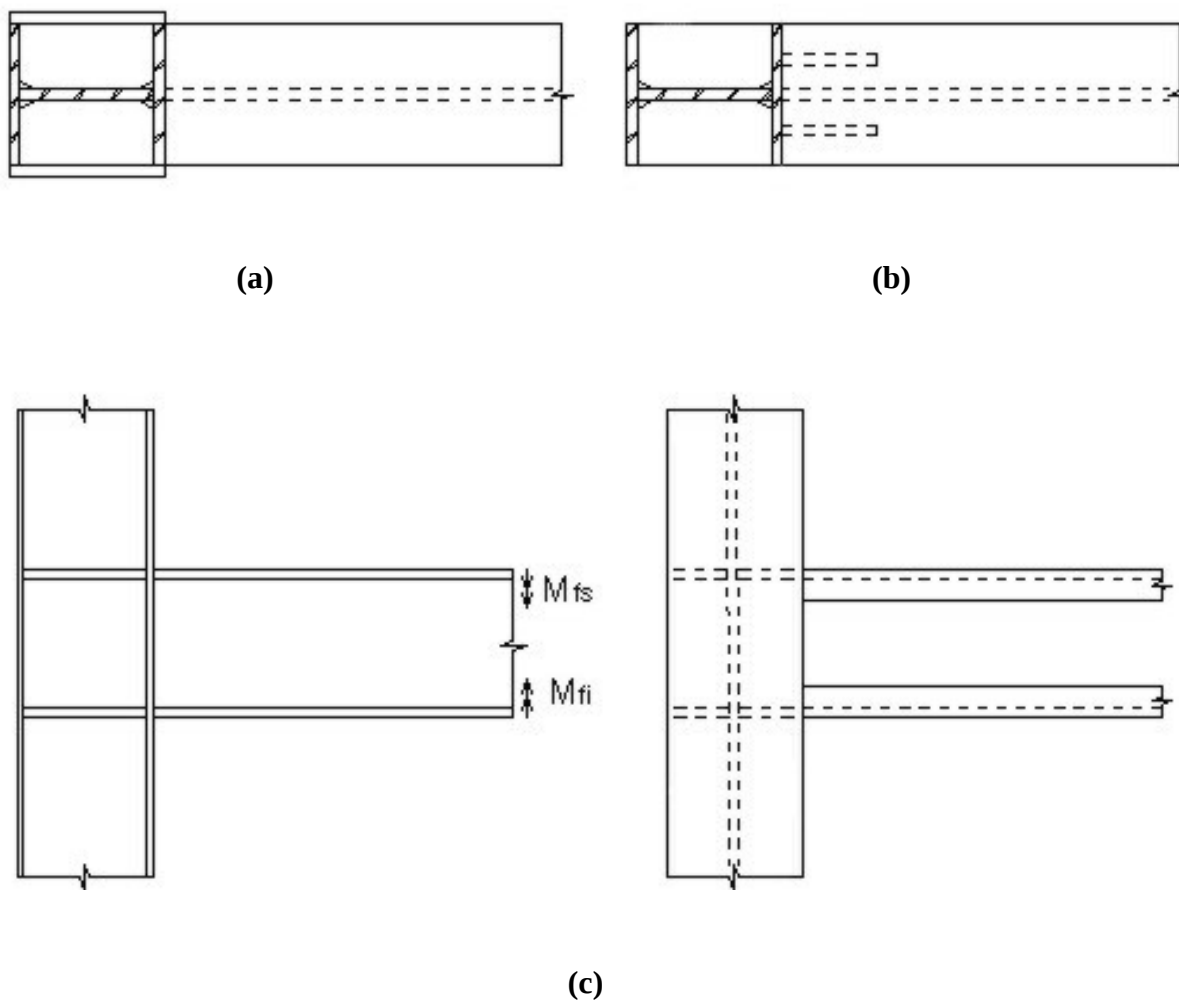


FIGURA III.26

III.9.1. Exemplos

Exemplo 1

Analisar o comportamento da viga da fig. III.27, constituída de aço MR-250, para os perfis de seção transversal tipo I : I 254 x 52,1 e CS 250 x 52

aço MR-250 $E = 20500 \text{ kN/cm}^2$; $G = 8000 \text{ kN/cm}^2$; $f_y = 25 \text{ kN/cm}^2$

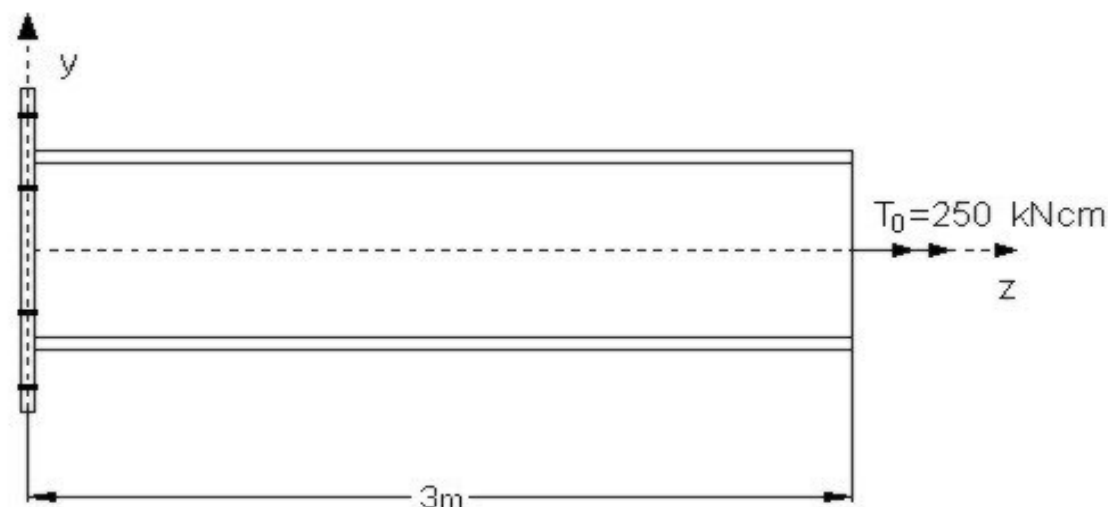


FIGURA III.27

a) Propriedades geométricas das seções transversais

I 254 x 52,1

$b_f = 12,56 \text{ cm}$; $t_{fm} = 1,25 \text{ cm}$; $d = 25,4 \text{ cm}$; $t_w = 1,51 \text{ cm}$

$$I_t = \sum \frac{b_i t_i^3}{3} = 53,7 \text{ cm}^4; \quad I_x = 6120 \text{ cm}^4; \quad I_y = 348 \text{ cm}^4$$

$$I_\omega = \frac{I_y \cdot h^2}{4} = 50752 \text{ cm}^6; \quad \omega_{\max}^c = \frac{b_f \cdot h}{4} = 80 \text{ cm}^2$$

$$S_{\omega_{\max}}^c = \frac{ht_f b_f^2}{16} = 313 \text{ cm}^4; \quad k = \sqrt{\frac{G I_t}{E I \omega}} \cong 0,02 \text{ cm}^{-1}$$

CS 250 x 52

$$b_f = d = 25 \text{ cm}; \quad t_f = 0,95 \text{ cm}; \quad t_w = 0,8 \text{ cm}$$

$$I_t = 18 \text{ cm}^4; \quad I_x = 7694 \text{ cm}^4; \quad I_y = 2475 \text{ cm}^4$$

$$I_{\omega} = 357887 \text{ cm}^6; \quad \omega_{\max}^c = 156,2 \text{ cm}^2$$

$$S_{\omega_{\max}}^c = 928 \text{ cm}^4; \quad k = 0,0044 \text{ cm}^{-1}$$

Pode-se observar que a rigidez à torção do perfil laminado I 254 é muito superior à do perfil soldado, pelo fato das espessuras serem maiores. O inverso acontece com o momento de inércia setorial, pelo fato da aba ser estreita. Embora os perfis em questão tenham mesma altura e mesma massa, espera-se um comportamento muito distinto para a resistência à flexo-torção.

b) Condições de contorno e determinação das rotações

O momento de torção distribuído m_z é nulo, logo $\varphi_p = 0$. As quatro condições de contorno que levam à determinação das constantes C_1 a C_4 são indicadas a seguir:

$$z = l \rightarrow T = T_0 \quad \therefore \quad C_2 = \frac{T_0}{G I_t}$$

$$z = 0 \rightarrow \varphi_z = 0 \quad \therefore \quad C_1 + C_4 = 0$$

$$z = 0 \rightarrow \varphi_z' = 0 \quad (M_z = 0) \quad \therefore \quad \frac{T_0}{G I_t} + C_3 k = 0 \rightarrow C_3 = -\frac{T_0}{G I_t k}$$

$$z = l \rightarrow M_{\omega} = 0 \quad \therefore \quad C_3 \sinh(kl) + C_4 \cosh(kl) = 0 \rightarrow C_4 = \frac{T_0}{G I_t k} \tanh(kl)$$

Logo:

$$\varphi_z = \frac{T_0}{GI_t} \left[z - \frac{1}{k} \operatorname{tgh}(kl) + \frac{1}{k} \operatorname{tgh}(kl) \cosh(kz) - \frac{1}{k} \sinh(kz) \right] =$$

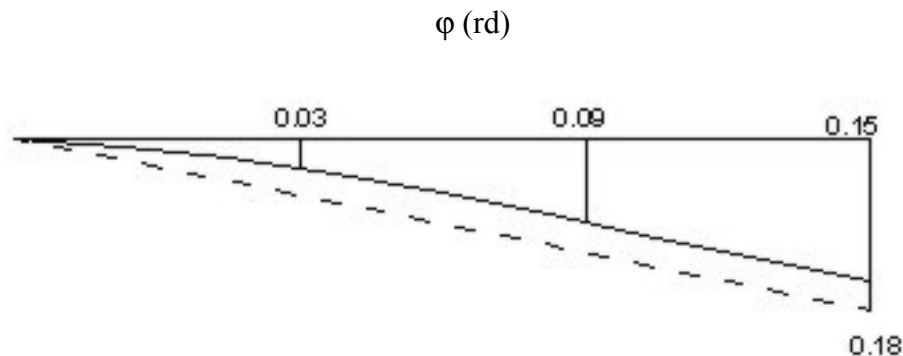
$$= \frac{T_0}{GI_t} \left\{ z + \frac{1}{k \cosh(kl)} [\sinh k(l-z) - \sinh(kl)] \right\}$$

Caso a ligação ao pilar não possa restringir o empenamento, ou seja, $\varphi_z'' = 0$ e $M_\omega = 0$ para $z = 0$, resulta de (68.b) $C_4 = 0$. Como para $z = l$ tem-se também $\varphi_z'' = 0$, C_3 também é nulo, logo M_ω é nulo ao longo de toda a viga.

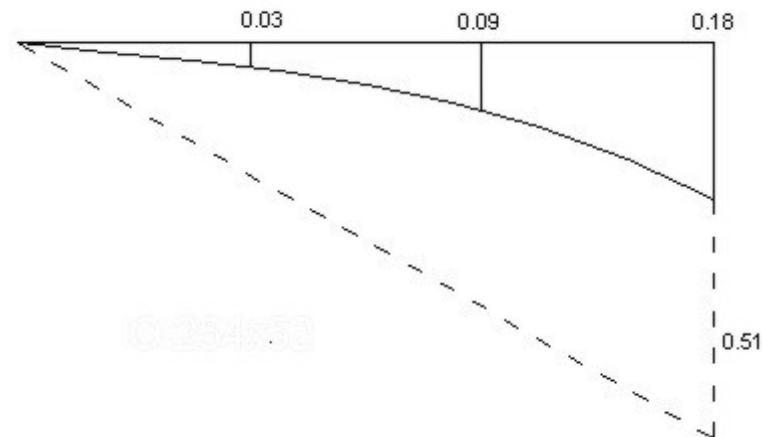
Desprezando-se portanto a resistência por flexo-torção, tem-se apenas torção uniforme, e assim:

$$\varphi_z = \frac{T_0}{GI_t} z$$

Substituindo-se os valores das propriedades geométricas para os perfis I e CS, obtêm-se os seguintes diagramas para as rotações φ_z , onde em tracejado são indicados os diagramas para torção uniforme:



(a) I 254 x 52.1



(b) CS 250 x 52

FIGURA III.28

c) Esforços solicitantes

Substituindo-se as constantes k obtidas no item anterior nas expressões de M_z , M_ω e T_ω :

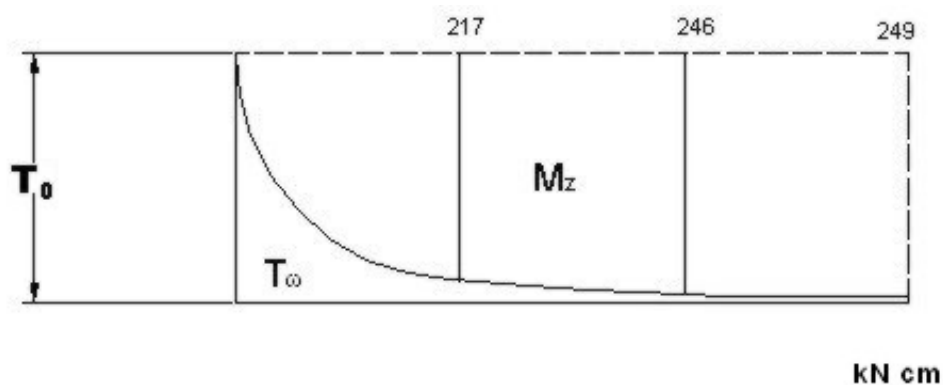
$$M_z = T_0 \left[1 - \frac{\cosh k(l-z)}{\cosh(kl)} \right]$$

$$M_\omega = \frac{T_0}{k} \frac{\sinh k(l-z)}{\cosh(kl)}$$

onde:

$$T_0 = 250 \text{ kNcm} \quad \text{e} \quad T_\omega = T_0 - M_z$$

Obtêm-se os diagramas correspondentes indicados na fig. III.29.



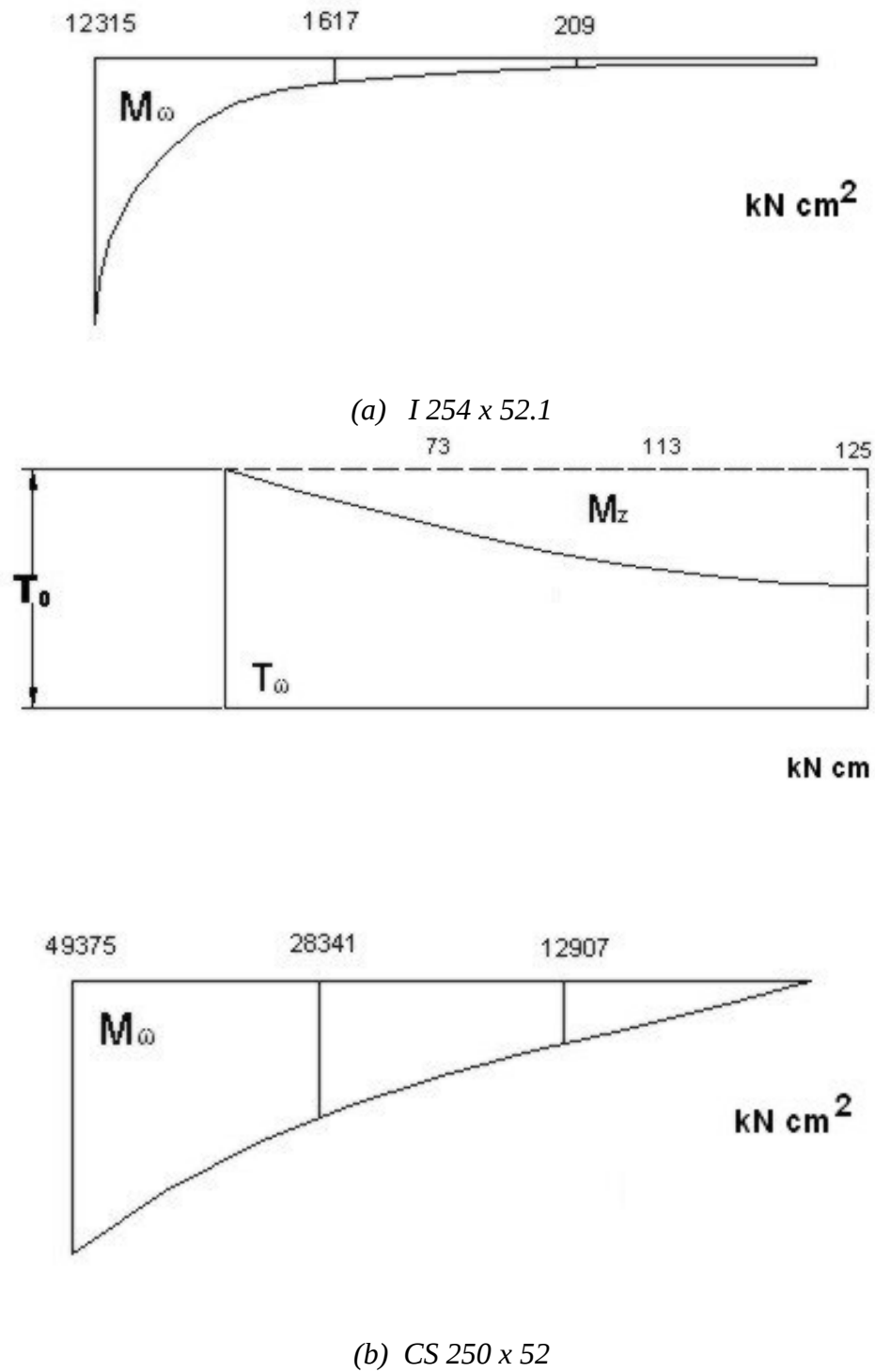


FIGURA III.29

d) Tensões normais

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\omega}}{I_{\omega}} \omega_{\max}$$

- Perfil I: $\sigma_{\max} = \frac{12315}{50752} 80 = 19,4 \text{ kN/cm}^2$

- Perfil CS : $\sigma_{\max} = \frac{49375}{357887} 156,2 = 21,6 \text{ kN/cm}^2$

Note-se que as tensões normais são próximas da tensão de escoamento e não podem ser desconsideradas.

Visualizando-se o bi-momento como dois momentos de sentidos opostos atuando nas abas tem-se:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_f}{I_{y/2}} \frac{b_f}{2}$$

logo:

$M_f = 540 \text{ kN cm}$ e $M_f = 2140 \text{ kN cm}$, respectivamente, para os perfis I e CS. Estes esforços devem ser resistidos na ligação aba-pilar.

e) Tensões de cisalhamento

$$\tau = \tau_{\omega} + \tau_t = \frac{T_{\omega}}{t I_{\omega}^c} S_{\omega}^c(s) + \frac{M_z}{I_t} t$$

$\tau_{\max}$ ocorre na aba no encontro aba-alma, visto que S_{ω}^c é máximo neste ponto e a aba tem espessura maior que a alma.

$$\tau_{aba} = \frac{S_{\omega}^c \max}{t_f I_{\omega}^c} T_{\omega} + \frac{t_f}{I_t} M_z$$

Para $z = l$, tem-se:

$$\text{- Perfil I : } \tau_{\max} = \frac{313}{1,25 \cdot 50752} 1,0 + \frac{1,25}{53,7} 249,0 = 0,01 + 5,8 = 5,81 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{- Perfis CS : } \tau_{\max} = \frac{928}{0,95 \cdot 357887} 125,0 + \frac{0,95}{18,0} 125,0 = 0,34 + 6,6 = 6,94 \text{ kN/cm}^2$$

Pode-se observar que as tensões de cisalhamento resultantes da flexo-torção são desprezáveis diante das de torção uniforme. No entanto, desprezar o momento de flexo-torção pode estar muito a favor da segurança para o cálculo das tensões de cisalhamento, em especial para perfis soldados. Para o perfil CS 250 x 52, obter-se-ia:

$$\tau_{\max} = \frac{T_0}{I_t} t = 13,2 \text{ kN/cm}^2, \text{ próximo de } \tau_y = \frac{f_y}{\sqrt{3}} \cong 15 \text{ kN/cm}^2$$

Visualizando-se a resultante das tensões de cisalhamento nas abas como duas forças cortantes de sentidos opostos, tem-se para ambos os perfis:

$$V_f = \int_{-bf/2}^{+bf/2} \frac{T_\omega}{t_f} \frac{S_\omega}{I_\omega} t_f dx \quad \text{ou diretamente} \quad V_f = \frac{T_\omega}{h} \cong 10 \text{ kN}.$$

Estas forças devem ser resistidas na ligação aba-pilar.

Exemplo 2

Uma viga bi-apoiada CS 250 x 52, de 5m de vão, serve de apoio a uma alvenaria de 0,20m de espessura e 5,0m de altura, que possui um revestimento externo de 0,05m de espessura. Analisar o comportamento da viga, sendo dados:

$$\text{Alvenaria : } d_1 = 0,2\text{m; } h = 5,0\text{m; } \gamma_1 = 16 \text{ kN/m}^3; \quad g_1 = 16 \times 0,2 \times 5,0 = 16,0 \text{ kN/m}$$

Revestimento: $d_2 = 0,05\text{m}$; $h = 5,0\text{m}$; $\gamma_2 = 22 \text{ kN/m}^3$; $g_2 = 22 \times 0,05 \times 5,0 = 5,5 \text{ kN/m}$

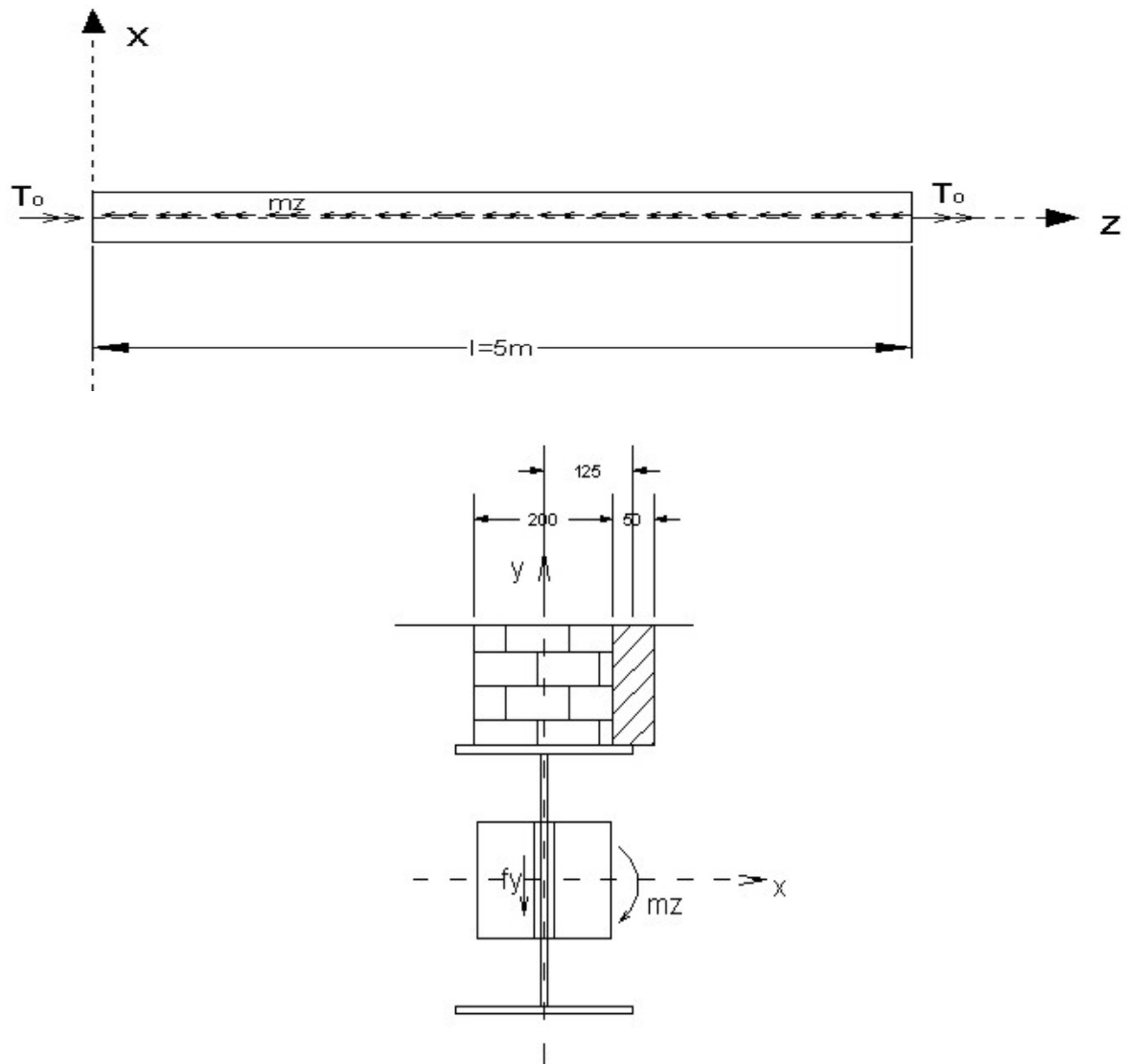


FIGURA III.30

a) Propriedades geométricas da seção transversal

As propriedades geométricas do perfil CS 250 x 52 podem ser tomadas do exemplo anterior, a saber:

$$k = 0,0044 \text{ cm}^{-1}; \quad I_{\omega} = 357887 \text{ cm}^6; \quad I_x = 7694 \text{ cm}^4$$

$$\omega_{\max} = 156,2 \text{ cm}^2; \quad I_t = 18 \text{ cm}^4; \quad S_{\omega \max} = 928 \text{ cm}^2$$

b) Ações

$$f_y = -0,16 - 0,055 = -0,215 \text{ kN/cm}$$

$$m_z = -0,055 \cdot 12,5 = -0,688 \frac{\text{kNcm}}{\text{cm}}$$

c) Esforços solicitantes

O momento fletor máximo no centro do vão e a força cortante e o momento de torção máximos, nos apoios podem ser obtidos diretamente de:

$$M_{x \max} = \frac{f_y l^2}{8} = -\frac{0,215 \cdot 500^2}{8} = -6720 \text{ kNcm}; \quad V_{y \max} = f_y \frac{l}{2} = 0,215 \cdot \frac{500}{2} = 53,75 \text{ kN}$$

$$T_0 = -m_z \cdot \frac{l}{2} = 0,688 \cdot \frac{500}{2} = 172 \text{ kNcm}$$

Os demais esforços solicitantes são obtidos a partir das seguintes condições de contorno

$$z=0 \rightarrow \varphi_z = 0 \quad \therefore C_1 + C_4 = 0$$

$$z=0 \rightarrow M_{\omega} = 0 \quad \therefore C_4 = -\frac{\varphi_p''}{k^2} = \frac{m_z}{GI_t k^2} = \frac{m_z}{EI_{\omega} k^4}$$

$$z = \frac{l}{2} \rightarrow T = 0 \quad \therefore C_2 = -\varphi_p' = \frac{m_z l}{2GI_t} = \frac{m_z l}{2k^2 EI_{\omega}}$$

$$z = \frac{l}{2} \rightarrow M_z = 0 \quad \therefore C_3 = -C_4 \operatorname{tgh}\left(\frac{k l}{2}\right)$$

logo:

$$\varphi_z = \frac{m_z}{E I_{\omega} k^4} \left[-\operatorname{tgh}\left(\frac{kl}{2}\right) \sinh(kz) + \cosh(kz) - \frac{k^2 z^2}{2} + \frac{k^2 lz}{2} - 1 \right]$$

$$M_z = \frac{m_z}{k} \left[-\operatorname{tgh}\left(\frac{kl}{2}\right) \cosh(kz) + \operatorname{senh}(kz) - kz + \frac{kl}{2} \right]$$

$$M_\omega = \frac{m_z}{k^2} \left[-\operatorname{tgh}\left(\frac{kl}{2}\right) \operatorname{senh}(kz) + \cosh(kz) - 1 \right]$$

$$T_\omega = \frac{m_z}{k} \left[\operatorname{tgh}\left(\frac{kl}{2}\right) \cosh(kz) - \operatorname{senh}(kz) \right] = -M'_\omega$$

Para $z = 0$, tem-se:

$$M_z = -47 \text{ kNcm} ; \quad T_\omega = -125 \text{ kNcm} ; \quad M_\omega = 0$$

e para $z = l/2$,

$$M_z = 0 ; \quad T_\omega = 0 ; \quad M_\omega = 14215 \text{ kNcm}^2$$

d) Tensões normais máximas ($z=l/2$)

$$\sigma_b = \pm \frac{M_x}{W_x} = \frac{6720}{616} = 10,9 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\sigma_{ft} = \pm \frac{M_\omega}{I_\omega} \omega_{\max} = \frac{14215}{357887} 156,2 = 6,2 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\therefore \sigma_{\max} = 17,1 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

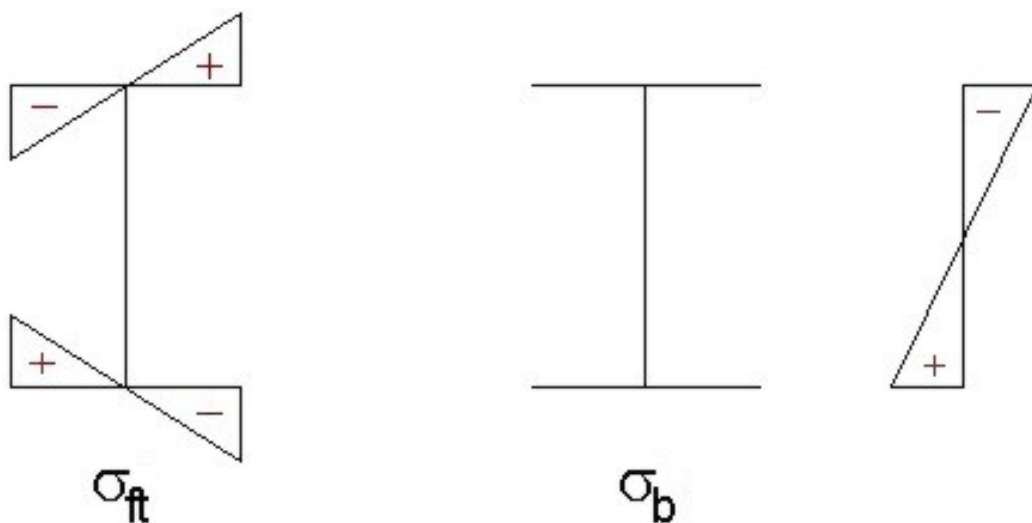


FIGURA III.31

e) Tensões de cisalhamento máximas

As tensões de cisalhamento máximas nas abas e na alma, devidas à força cortante, ocorrem respectivamente nos encontros aba-alma e no centro de gravidade. Para $z = 0$, tem-se:

$$\tau_b = \frac{V_y S(s)}{t I_x}$$

$$\tau_{abas} = \frac{53,75 (12,5 \cdot 0,95) 12,0}{0,95 \cdot 7694} = 1,1 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\tau_{alma} = \frac{53,75 \left[(25 \cdot 0,95) 12 + \frac{0,8 \cdot 11,5^2}{2} \right]}{0,8 \cdot 7694} = 3,0 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

Para o momento de torção M_z em $z = 0$, tem-se:

$$\tau_t = \pm \frac{M_z}{I_t} t$$

$$\tau_{abas} = \frac{47}{18} 0,95 = 2,5 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\tau_{alma} = \frac{47}{18} 0,8 = 2,1 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

E para o momento de flexo-torção T_{ω}

$$\tau_{\omega} = \frac{T_{\omega} S_{\omega \max}}{t_f I_{\omega}}$$

$$\tau_{abas} = \frac{125.928}{0,95.357887} = 0,3 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\tau_{alma} = 0$$

As tensões de cisalhamento máximas são, portanto,

$$\tau_{aba} = 1,1 + 2,5 + 0,3 = 3,9 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\tau_{alma} = 3,0 + 2,1 + 0 = 5,1 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

Pode-se observar novamente que a parcela τ_{ω} é desprezável diante das demais.

Nota:

Desprezando-se a flexo-torção e admitindo-se que todo o momento m_z é resistido apenas por torção da peça, obter-se-ia:

$$\tau_t = \frac{T_0}{I_t} t_f = \frac{172}{8} 0,95 = 9,0 \text{ kN} / \text{cm}^2 \text{ (aba)}$$

$$\tau_t = \frac{T_0}{I_t} t_{\omega} = \frac{172}{18} 0,8 = 7,6 \text{ kN} / \text{cm}^2 \text{ (alma)}$$

logo:

$$\tau_{aba} = 1,1 + 9,0 = 10,1 \text{ kN} / \text{cm}^2 \quad (\text{aba})$$

$$\tau_{alma} = 3,0 + 7,6 = 10,6 \text{ kN} / \text{cm}^2 \quad (\text{alma})$$

Estes valores são muito superiores aos reais

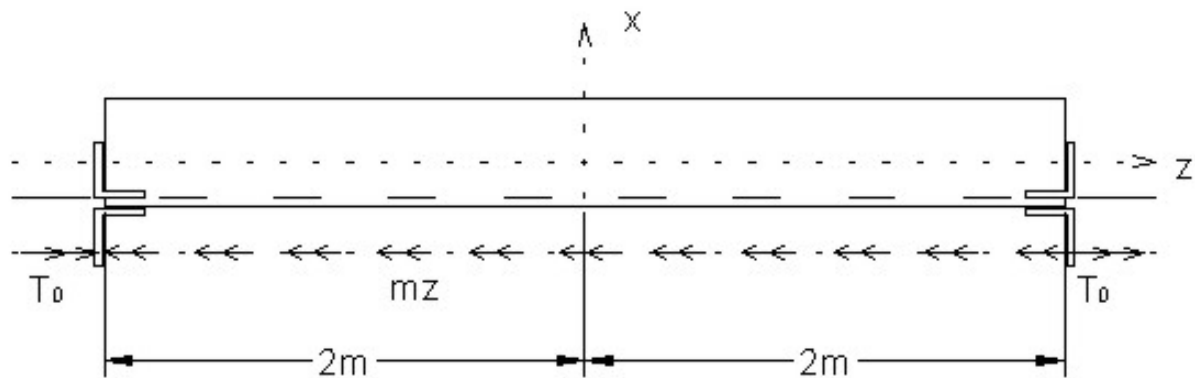
f) Rotações

$$z=0 \rightarrow \varphi_z = 0$$

$$z=\frac{1}{2} \rightarrow \varphi_z = 0,05\text{rd} = 2,86^\circ$$

Exemplo 3

Determinar as tensões máximas em um perfil tipo C 150 x 70 x 4,76, de 4m de vão e bi-apoiado, submetido a uma força distribuída no plano da alma de 3 kN/m.



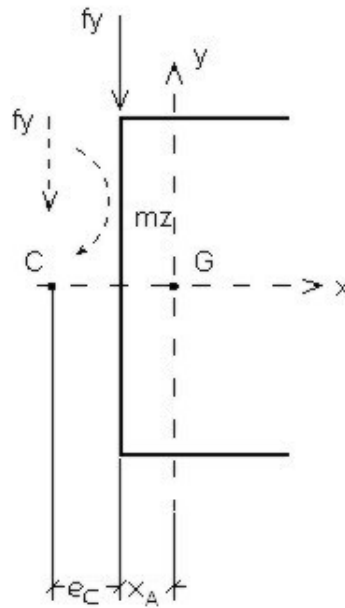


FIGURA III.32

a) Propriedades geométricas da seção transversal

$$t_f = t_w = 0,476 \text{ cm} \quad ; \quad b_f = 7,0 \text{ cm} \quad ; \quad h = 15,0 \text{ cm}$$

$$x_A = \frac{t_f b_f^2}{h t_w + 2 b_f t_f} = 1,7 \text{ cm}$$

$$I_x = \frac{t_w h^3}{12} + \frac{h^2 b_f t_f}{2} = 509 \text{ cm}^4$$

$$e_c = \frac{3 t_f b_f^2}{h t_w + 6 b_f t_f} = 2,6 \text{ cm}$$

$$\omega_1^c = \frac{h}{2} (b_f - e_c) = 33 \text{ cm}^2 \quad (\text{extremidade da aba})$$

$$\omega_2^c = \frac{h}{2} e_c = 19,5 \text{ cm}^2 \quad (\text{encontro aba-alma})$$

$$S_{\omega \max}^c = \frac{ht_f}{4} [b_f - e_c]^2 = 34,9 \text{ cm}^4 \quad (\text{aba})$$

$$S_{\omega 1}^c = \frac{ht_f b_f}{4} (b_f - 2e_c) = 22,5 \text{ cm}^4 \quad (\text{encontro aba-alma})$$

$$S_{\omega 2}^c = -\frac{S_{\omega 1}^c}{2} \cong -11,5 \text{ cm}^4 \quad (\text{centro da alma})$$

$$I_{\omega}^c = e_c^2 I_x + \frac{h^2 t_f b_f^2}{6} (b_f - 3e_c) = 2741 \text{ cm}^6$$

$$I_t = \sum \frac{bt^3}{3} = 1,04 \text{ cm}^4$$

$$k = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_{\omega}}} = \sqrt{\frac{8000 \cdot 1,04}{20500 \cdot 2741}} = 0,0122 \text{ cm}^{-1}$$

b) Ações

$$f_y = -3 \text{ kN} / \text{m}$$

$$m_z = -0,03 \cdot 2,6 = -0,077 \text{ kNcm} / \text{cm}$$

c) Esforços solicitantes

$$M_{x \max} = f_y \frac{l^2}{8} = -\frac{0,03 \cdot 400^2}{8} = -600 \text{ kNcm} \quad (z=0)$$

$$V_{y \max} = \frac{3,0 \cdot 4,0}{2} = 6 \text{ kN} \quad \left(z = \frac{l}{2} \right)$$

$$T = -m_z z = 0,077 z \text{ kNcm} \therefore T_0 = -m_z \frac{l}{2} = 15,5 \text{ kNcm} \quad \left(z = \frac{l}{2} \right)$$

Os demais esforços solicitantes são obtidos a partir das seguintes condições de vínculo:

$$z=0 \rightarrow T_{\omega}=0 \quad \therefore C_3=0$$

$$z=\frac{l}{2} \rightarrow M_{\omega}=0 \quad \therefore C_4=\frac{\frac{m_z}{GI_t k^2}}{\cosh \frac{kl}{2}}$$

$$M_{\omega}=\frac{m_z}{k^2} \left[\frac{\cosh kz}{\cosh \frac{kl}{2}} - 1 \right], \text{ logo}$$

$$z=0 \rightarrow M_{\omega}=442 \text{ kNcm}^2$$

$$z=\frac{l}{2} \rightarrow M_{\omega}=0$$

$$T_{\omega}=-\frac{m_z}{k} \frac{\sinh kz}{\cosh k \frac{l}{2}}, \text{ logo:}$$

$$z=0 \rightarrow T_{\omega}=0; \quad M_z=0; \quad T=0$$

$$z=\frac{l}{2} \rightarrow T_{\omega}=6,2 \text{ kNcm} \quad \therefore \quad M_z=15,5-6,2=9,3 \text{ kNcm}$$

$$z=\frac{l}{4} \rightarrow T_{\omega}=1,7 \text{ kNcm} \quad \therefore \quad M_z=\frac{15,5}{2}-1,7 \cong 6,1 \text{ kNcm}$$

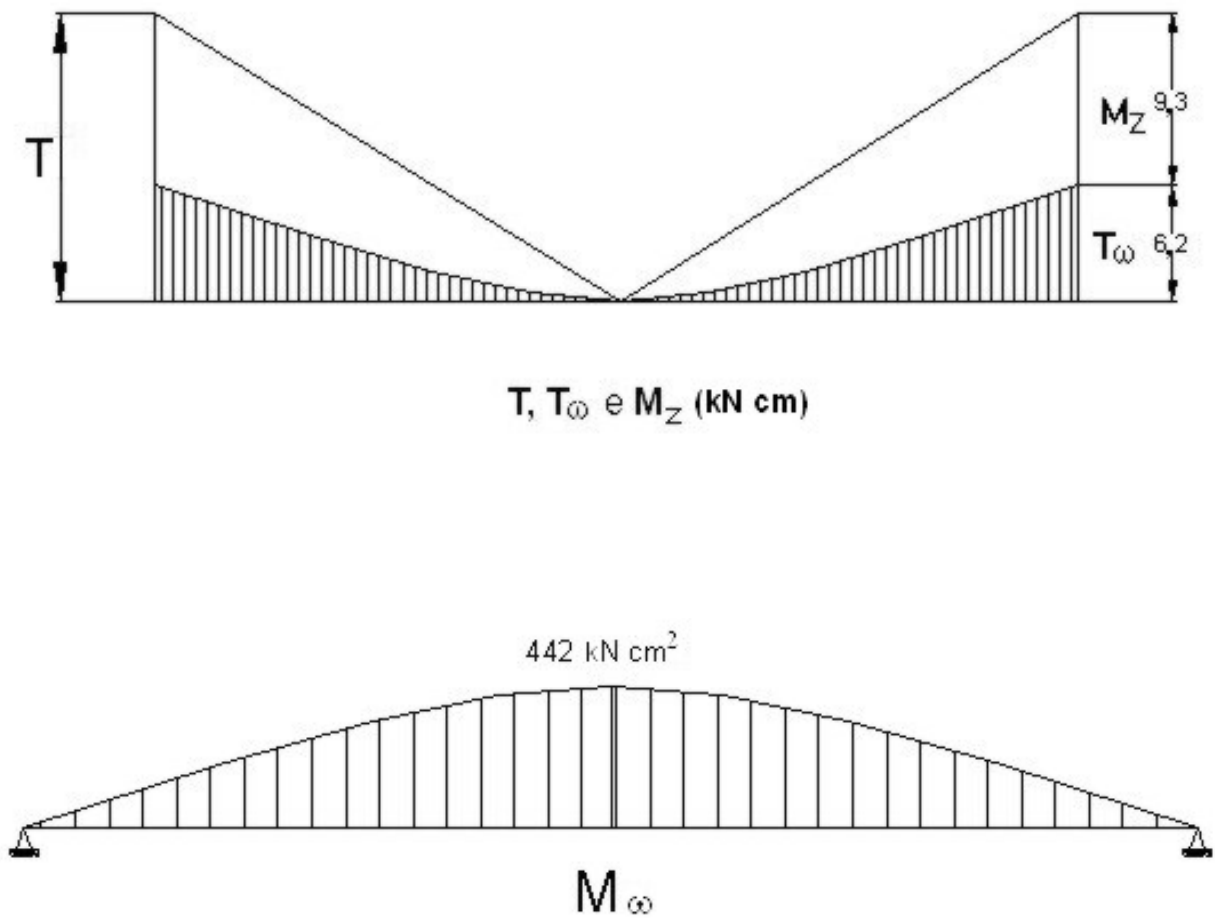


FIGURA III.33

d) Tensões normais máximas ($z = 0$, $y = +h/2$)

$$\sigma_b = \frac{M_x}{I_x} \frac{h}{2} = \frac{600}{509} 7,5 = -8,9 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{ft} = \frac{M_\omega}{I_\omega} \omega_2^c = \frac{442}{2741} (-19,5) = -3,1 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\max} = -8,9 - 3,1 = -12,0 \text{ kN/cm}^2$$

e) Tensões de cisalhamento máximas

$$\tau_b = \frac{V_y \cdot S(s)}{t \cdot I_x} \quad \left(z = \frac{l}{2} \rightarrow V_y = 6 \text{ kN} \right)$$

Para os pontos 1, 2 e 3 da seção transversal indicados na figura III.34, tem-se:

$$S_{x1} = 4,4 \cdot 0,476 \cdot 7,5 = 15,7 \text{ cm}^3 \rightarrow \tau_{b1} = \frac{6,015,7}{0,476 \cdot 509} = -0,40 \text{ kN/cm}^2$$

$$S_{x2} = 7,0 \cdot 0,476 \cdot 7,5 = 25,0 \text{ cm}^3 \rightarrow \tau_{b2} = -0,61 \text{ kN/cm}^2$$

$$S_{x3} = 25,0 + \frac{0,476}{2} \cdot 7,5^2 = 38,4 \text{ cm}^3 \rightarrow \tau_{b3} = -0,95 \text{ kN/cm}^2$$

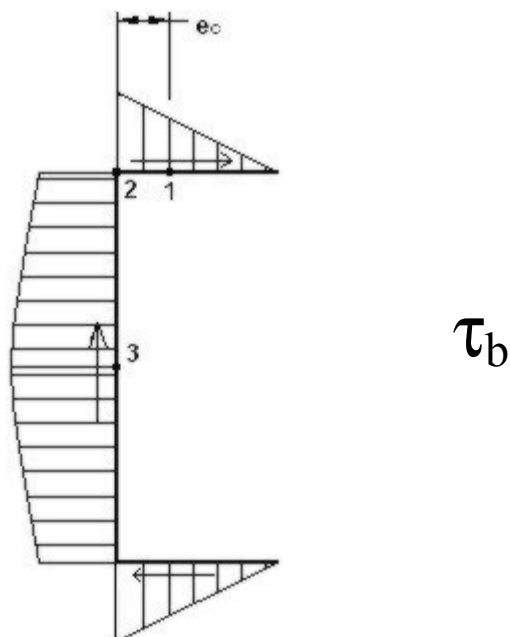


FIGURA III.34

$$\tau_t = \pm \frac{M_z}{I_t} t \left(z = \frac{l}{2} \rightarrow M_z = 9,3 \text{ kNcm} \right)$$

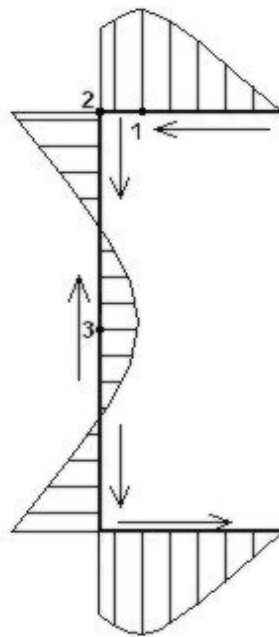
$$\therefore \tau_t = \pm \frac{9,3}{1,04} \cdot 0,476 = \pm 4,30 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\tau_\omega = \frac{T_\omega}{t I_\omega} \cdot S_\omega^c(s) \quad \left(z = \frac{l}{2} \rightarrow T_\omega = 6,2 \text{ kNcm} \right)$$

$$\tau_{\omega 1} = \frac{6,2}{0,476 \cdot 2741} \cdot 34,9 = + 0,17 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\tau_{\omega 2} = \frac{6,2}{0,476 \cdot 2741} \cdot 23,0 = + 0,11 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\tau_{\omega 3} = - \frac{\tau_{\omega 2}}{2} = - 0,05 \text{ kN} / \text{cm}^2$$



τ_ω

FIGURA III.35

Logo:

$$\tau_{1\max} = - 0,40 - 4,30 + 0,17 = - 4,53 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\tau_{2\max} = -0,61 - 4,30 + 0,11 = -4,8 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\tau_{3\max} = -0,95 - 4,30 - 0,05 = -5,3 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

Desprezando-se a resistência à flexo-torção, ou seja, admitindo-se que o momento m_z é resistido apenas por torção da peça, ter-se-ia:

$$M_z = 15,5 \text{ kNcm} \quad \rightarrow \quad \tau_t = \pm 7,1 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

Como a parcela de torção de Saint Venant é condicionante neste caso, as tensões máximas resultantes seriam muito superiores às reais ($\tau_{\max} = -0,95 - 7,1 = -8,05 \text{ kN/cm}^2$).

Exemplo 4

Determinar as tensões máximas no tirante de 3m de comprimento em perfil Z 100x50x3,0 indicado na fig. III.36.

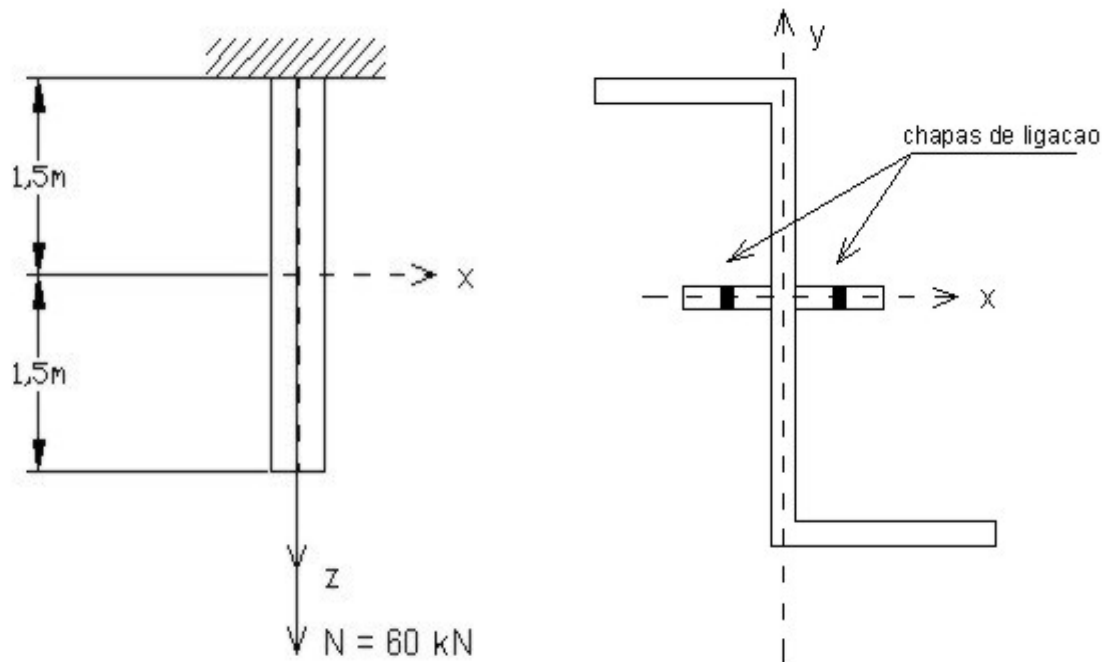


FIGURA III.36

a) Propriedades geométricas da seção transversal

$$t_f = t_w = 0,3 \text{ cm} \quad h = 10,0 \text{ cm} \quad b_f = 5,0 \text{ cm}$$

$$A = 20 \cdot 0,3 = 6 \text{ cm}^2; \quad I_t = 20 \cdot 0, \frac{0,3^3}{3} = 0,18 \text{ cm}^4$$

$$I_x = 100 \text{ cm}^4; \quad I_y = 25 \text{ cm}^4; \quad I_{xy} = 37,5 \text{ cm}^4$$

$$x_{D2} = -\frac{t_f b_f^2}{A} = -1,25 \text{ cm}$$

$$\omega_2^c = \frac{h t_f b_f^2}{2A} = 6,25 \text{ cm}^2 \quad (\text{alma})$$

$$\omega_1^c = \frac{h}{2} \left(\frac{t_f b_f^2}{A} - b_f \right) = -18,75 \text{ cm}^2 \quad (\text{extremidade das abas})$$

$$I_{\omega}^c = \frac{h^2 t_f b_f^3}{12A} (t_f b_f + 2ht_{\omega}) = 391 \text{ cm}^6$$

$$S_{\omega \max}^c (D = D_1) = \frac{ht_f b_f^2}{4A^2} (t_f b_f + ht_{\omega})^2 = 10,55 \text{ cm}^4$$

$$k = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_{\omega}}} = \sqrt{\frac{8000 \cdot 0,18}{20500 \cdot 391}} = 0,0134 \text{ cm}^{-1}$$

b) Ações ($z = \pm l/2$)

$$N = 60 \text{ kN}$$

$$M_{\omega 0} = \int_A \sigma \omega^c dA = N \omega_2^c = 60 \times 6,25 = 375 \text{ kN cm}^2$$

c) Esforços solicitantes

Além da força normal constante tem-se, como consequência de $m_z = 0$ ao longo da peça:

$$T = 0$$

$$M_{\omega} = GI_t [C_3 \sinh(kz) + C_4 \cosh(kz)]$$

Impondo-se $M_{\omega} = M_{\omega 0}$ para $z = \pm l/2$, obtém-se:

$$C_3 = 0 \quad ; \quad C_4 = \frac{M_{\omega 0}}{GI_t \cosh\left(\frac{kl}{2}\right)}, \text{ logo}$$

$$z = \pm \frac{l}{2} \rightarrow M_{\omega} = M_{\omega 0} = 375 \text{ kNcm}^2$$

$$z = 0 \rightarrow M_{\omega} = \frac{M_{\omega 0}}{\cosh\left(\frac{kl}{2}\right)} = 82 \text{ kNcm}^2$$

$$-M_z = T_{\omega} = -M'_{\omega} = -\frac{k M_{\omega 0}}{\cosh\left(\frac{kl}{2}\right)} \sinh(kz)$$

$$z=0 \rightarrow M_z = T_\omega = 0$$

$$z = \frac{l}{2} \rightarrow T_\omega = -3,2 \text{ kNcm} = -M_z$$

d) Tensões normais máximas (x = l/2)

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_\omega}{I_\omega} \omega^c$$

- tração

A máxima tensão de tração ocorre na alma e vale

$$\sigma_t = + \frac{60}{6} + \frac{375}{391} \cdot 6,25 = 10,0 + 6,0 = 16,0 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

- compressão

A máxima tensão de compressão ocorre na extremidade da aba e vale

$$\sigma_c = + \frac{60}{6} - \frac{375}{391} \cdot 18,75 = 10,0 - 18,0 = -8,0 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

e) Tensões de cisalhamento máximas (z = l/2)

$$\tau_t = \pm \frac{M_z}{I_t} \cdot t = \pm \frac{3,2}{0,18} \cdot 0,3 = \pm 5,3 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\tau_{\omega \max} = \frac{T_\omega}{t \cdot I_\omega^c} \cdot S_{\omega \max}^c = \frac{3,2}{391 \cdot 0,3} \cdot 10,55 = 0,3 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

$$\therefore \tau_{\max} = 5,6 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

f) Rotação ϕ_z

$$\frac{1}{2}\phi_z = \int_0^{l/2} \phi_z' dz = \int_0^{l/2} \frac{M_z}{GI_t} dz = \frac{kM_{\omega_0}}{GI_t \cosh \frac{kl}{2}} \int_0^{l/2} \sinh(kz) dz = \frac{M_{\omega_0}}{GI_t} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{kl}{2}\right) - 1}{\cosh \frac{kl}{2}} = 0,2rd = 11,8^*$$

Observação:

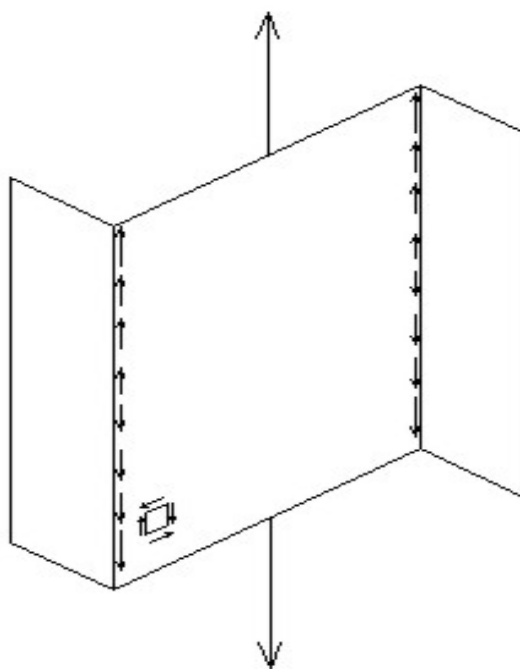


FIGURA III.37

O comportamento do tirante em perfil Z submetido à tração centrada é aparentemente surpreendente, em vista das tensões de compressão e da rotação resultantes.

Deve-se notar, no entanto, que este comportamento pode ser visualizado como decorrente do espraio das tensões normais, concentradas no ponto de aplicação de carga, para o restante do perfil.

As tensões de cisalhamento resultantes são excêntricas em relação ao centro de gravidade das abas e por isso provocam flexão das mesmas em sentidos opostos, o que gera tensões de compressão nas abas e rotação do perfil. Este efeito vai se diluindo nas seções que se afastam do ponto da aplicação das cargas.

IV. TEORIA DE VLASOV - ANÁLISE DE ESTABILIDADE

IV.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Nas deduções apresentadas no capítulo III, admite-se que os esforços solicitantes na seção transversal independem dos deslocamentos. São desprezados portanto os esforços solicitantes adicionais decorrentes dos deslocamentos da barra produzidos tanto pelas tensões normais e de cisalhamento na seção transversal quanto pelo carregamento externo. Estes efeitos são agora considerados, de forma aproximada, para a análise de estabilidade da mesma.

Admite-se para o que segue que, ao atingir a carga crítica, a barra passa da configuração de equilíbrio básica para uma outra próxima a esta, de modo que os incrementos dos deslocamentos e das tensões sejam pequenos.

Permanecem válidas, para a configuração final, as equações de equilíbrio sob a forma das expressões deduzidas para a configuração básica sem o efeito de segunda ordem (expressões 27, capítulo III). Não são também consideradas modificações nos esforços solicitantes devidas ao efeito de segunda ordem.

Para a configuração básica, o estado de tensões correspondente está em equilíbrio com o carregamento externo. Assim, para os deslocamentos adicionais resultantes da perda de estabilidade da barra, admite-se que o incremento das tensões está em equilíbrio com um carregamento externo fictício, a ser determinado, dado pelas forças transversais f_{XN} e f_{YN} e pelo momento de torção m_{ZN} .

Os deslocamentos anteriores à perda de estabilidade são desprezados nesta análise, ou seja, admite-se que u , v , w e ϕ_Z são os incrementos dos deslocamentos na mudança da configuração de equilíbrio.

Este procedimento simplificado permite determinar um valor aproximado de carga crítica, mas não dá nenhuma indicação quanto à configuração pós-crítica. As imprecisões resultantes desta análise só podem ser discutidas à luz de uma teoria não- linear geometricamente exata.

IV.2 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

As equações definidas de equilíbrio a serem utilizadas para a análise de estabilidade da barra são as mesmas já deduzidas no capítulo III, substituindo-se as forças transversais f_X e f_Y e o momento de torção m_Z respectivamente pelas forças e pelos momentos de torção fictícios f_{XN} , f_{YN} e m_{ZN} , a serem deduzidos a seguir:

IV.2.1 - Forças transversais adicionais

Considere-se um elemento ABCD, de comprimento dz e largura ds , conforme indicado na fig.IV.1. Os deslocamentos do ponto $M(z,s)$ nas direções x e y são dados pelas expressões III-1. Adotando-se como pólo o centro de torção, tem-se:

$$u_M = u - (y - y_c)\varphi_z \quad (1.a)$$

$$v_M = v + (x - x_c)\varphi_z \quad (1.b)$$

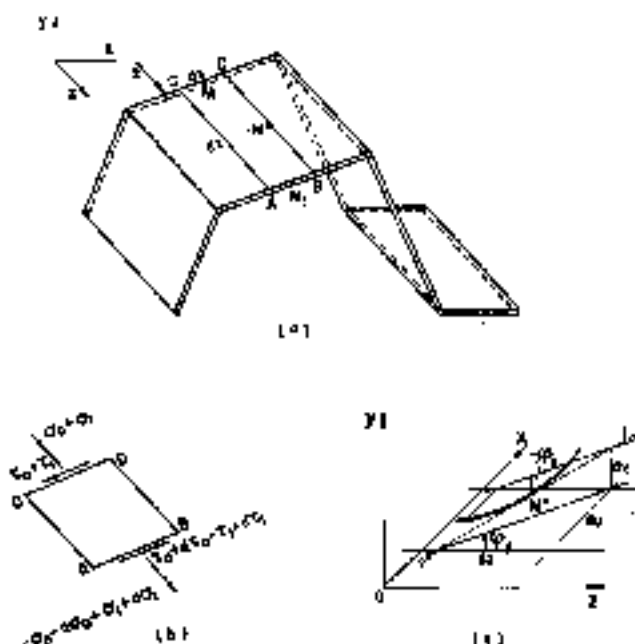


FIGURA IV.1

Após a deformação, a geratriz da superfície média passando por M , inicialmente reta e paralela a z , transforma-se numa curva espacial. Os ângulos que as projeções da tangente a esta curva nos planos O_{XZ} e O_{YZ} formam com o eixo z são dados, aproximadamente, por:

$$-\varphi_x = v'_M = v' + (x - x_c)\varphi'_z = v' - x_c\varphi'_z + x\varphi'_z \quad (2.a)$$

$$\varphi_y = u'_M = u' - (y - y_c)\varphi'_z = u' + y_c\varphi'_z - y\varphi'_z \quad (2.b)$$

Para um ponto situado na seção $z + dz$, estes ângulos são $(\varphi_Y + d\varphi_Y)$ e $-(\varphi_X + d\varphi_X)$.

Sejam (σ_0, τ_0) as tensões normais e de cisalhamento calculadas sem considerar o efeito de segunda ordem e (σ_1, τ_1) as tensões adicionais decorrentes deste efeito. As forças resultantes das tensões normais nas seções AB e CD se inclinam em relação ao eixo z após deformação.

Considerando-se por simplicidade que os deslocamentos e as rotações são pequenos o bastante para que os senos de φ_X e φ_Y sejam confundidos com os ângulos φ_X e φ_Y , as projeções destas forças nos eixos x e y podem ser expressas, respectivamente, por:

– face CD, projeção em x

$$-(\sigma_0 + \sigma_1)t ds \varphi_Y$$

– face CD, projeção em y

$$-(\sigma_0 + \sigma_1)t ds (-\varphi_X)$$

– face AB, projeção em x

$$(\sigma_0 + d\sigma_0 + \sigma_1 + d\sigma_1)t ds (\varphi_Y + d\varphi_Y) \cong [(\sigma_0 + \sigma_1 + d\sigma_0)\varphi_Y + \sigma_0 d\varphi_Y]t ds$$

– face AB, projeção em y

$$(\sigma_0 + d\sigma_0 + \sigma_1 + d\sigma_1)t ds (-\varphi_X - d\varphi_X) \cong [-(\sigma_0 + \sigma_1 + d\sigma_0)\varphi_X - \sigma_0 d\varphi_X]t ds$$

Para a face AB, são considerados desprezáveis, nestas expressões, os produtos de $d\sigma_1$ pelos ângulos φ_X e φ_Y e os produtos de $d\varphi_X$ e $d\varphi_Y$ pelos incrementos $d\sigma_0$ e $d\sigma_1$ e pelas tensões adicionais σ_1 .

Estas aproximações são aceitáveis para o cálculo da carga crítica por uma análise de estabilidade de Euler, na qual se consideram apenas pequenas perturbações em torno da configuração de equilíbrio inicial. Não são adequadas, no entanto, para um estudo mais preciso das barras sob não-linearidade geométrica.

A resultante destas forças, é estaticamente equivalente a uma força transversal distribuída p_1 na superfície média $dsdz$, cujas componentes nas direções x e y são dadas respectivamente por:

$$p_{x1} dz ds = (\varphi_Y d\sigma_0 + \sigma_0 d\varphi_Y) t ds$$

$$p_{y1} dz ds = (-\varphi_X d\sigma_0 - \sigma_0 d\varphi_X) t ds$$

ou

$$p_{x1} = \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_0 \varphi_Y) t \quad (3.a)$$

$$p_{y1} = -\frac{\partial}{\partial z} (\sigma_0 \varphi_X) t \quad (3.b)$$

Procedendo-se de maneira análoga com as tensões de cisalhamento nas faces AB e CD, pode-se determinar a componente das forças delas resultantes na direção normal à superfície média inicial, visto que a seção gira de um ângulo φ_Z . Tem-se então:

– face AB :

$$(\tau_0 + d\tau_0 + \tau_1 + d\tau_1) t ds (\varphi_Z + d\varphi_Z) \cong [(\tau_0 + \tau_1 + d\tau_0) \varphi_Z + \tau_0 d\varphi_Z] t ds$$

– face CD:

$$-(\tau_0 + \tau_1) t ds \varphi_Z$$

A força transversal distribuída equivalente p_2 vale, portanto,

$$p_2 = \frac{\partial}{\partial z} (\tau_0 \varphi_Z) t$$

e as componentes nas direções x e y são dadas por:

$$p_{x2} = -p_2 \sin \theta_M = -\frac{\partial}{\partial z} (\tau_0 \varphi_Z) t \sin \theta_M \quad (4.a)$$

$$p_{y2} = p_2 \cos \theta_M = \frac{\partial}{\partial z} (\tau_0 \varphi_Z) t \cos \theta_M \quad (4.b)$$

As forças transversais totais por unidade de superfície p_{XN} e p_{YN} podem ser obtidas somando-se as parcelas p_1 e p_2 .

$$p_{XN} = \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_0 \varphi_Y) t - \frac{\partial}{\partial z}(\tau_0 \varphi_Z) t \sin \theta_M \quad (5.a)$$

$$p_{YN} = \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_0 \varphi_X) t + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_0 \varphi_Z) t \cos \theta_M \quad (5.b)$$

Integrando-se estas forças ao longo do contorno da seção, obtém-se as forças transversais fictícias totais num elemento de barra dz , cujos componentes nas direções x e y são dados por:

$$f_{XN} = \int_{S_i}^{S_f} p_{XN} ds = \int_A \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_0 \varphi_Y - \tau_0 \varphi_Z \sin \theta_M) dA \quad (6.a)$$

$$f_{YN} = \int_{S_i}^{S_f} p_{YN} ds = \int_A \frac{\partial}{\partial z}(-\sigma_0 \varphi_X + \tau_0 \varphi_Z \cos \theta_M) dA \quad (6.b)$$

Note-se que as forças fictícias dependem apenas das tensões σ_0 e τ_0 . Assim, a aproximação adotada equivale a se admitir que os esforços solicitantes da barra correspondentes ao carregamento crítico, determinados através da teoria linear, não se alteram com os deslocamentos pós-críticos, como já citado.

Substituindo-se nas expressões de f_N os valores de σ_0 e τ_0 (expressões III-34 e III-39) e os de φ_X e φ_Y (2), e utilizando-se as relações entre os esforços solicitantes deduzidas no item III-6, pode-se obter:

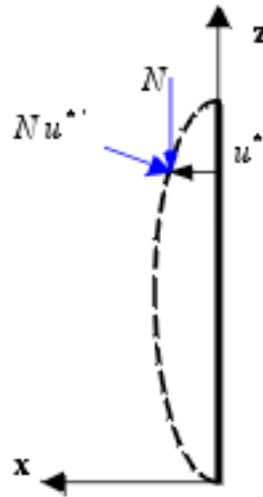
$$f_{XN} = [N(u' + y_C \varphi_Z')] - [M_X \varphi_Z'] - [V_Y \varphi_Z] = [N(u' + y_C \varphi_Z')] - [M_X \varphi_Z] \quad (7.a)$$

$$f_{YN} = [N(v' - x_C \varphi_Z')] - [M_Y \varphi_Z'] + [V_X \varphi_Z] = [N(v' - x_C \varphi_Z')] - [M_Y \varphi_Z] \quad (7.b)$$

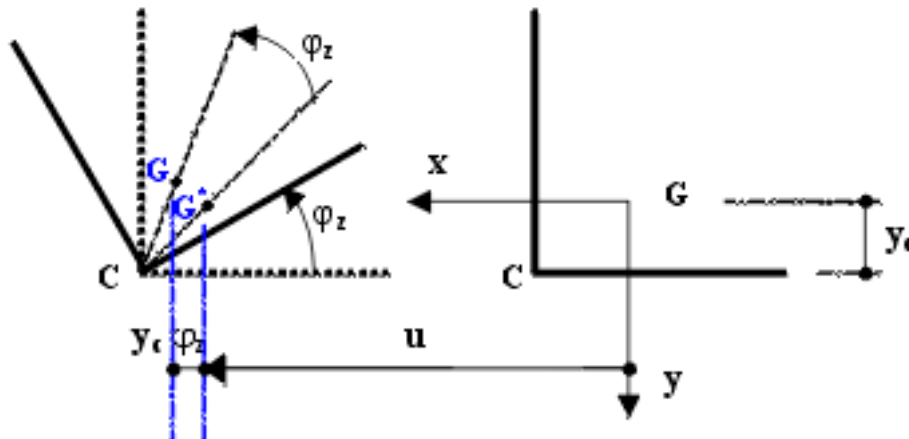
Observações:

- a) As tensões de cisalhamento τ_t devidas à torção uniforme não resultam em forças transversais adicionais, visto que a força resultante das mesmas no elemento $ds dz$ é nula.

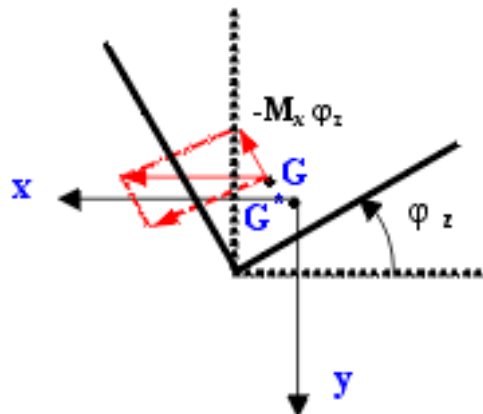
- b) As forças transversais fictícias podem ser obtidas também a partir de considerações geométricas, escrevendo-se as equações de equilíbrio na configuração deformada. Tomando-se por simplicidade uma barra de seção transversal $\perp$ e o equilíbrio na direção x (fig. IV.2):



(a)



(b)



(c)

FIGURA IV.2

O deslocamento u^* do centro de gravidade compõe-se de um termo proveniente da translação da barra e outro da rotação da seção transversal. A força cortante fictícia na direção x decorrente da forma normal N vale, de acordo com a figura IV.2.a e notando-se que a força normal da figura é de compressão, logo negativa,

$$-Nu^* = -N(u' + y_C \phi'_z)$$

A força transversal fictícia correspondente é dada portanto (expressão III-43.b) pelo primeiro termo da expressão 7.a.

Analogamente, o momento fletor M_x tem um componente decorrente da rotação da seção transversal de valor $-M_x \phi_z$. A força transversal fictícia correspondente é dada, portanto, com o uso das expressões III-40.a e III-43.b, pelo segundo termo da expressão 7.a.

IV.2.2 - Momento de torção adicional

As forças transversais fictícias p_{xN} e p_{yN} que passam a atuar no elemento $dsdz$ na mudança de configuração de equilíbrio produzem um momento de torção em torno do eixo passando pelo centro de torção. Desprezando-se os deslocamentos dos pontos de aplicação de p_{xN} e p_{yN} e substituindo-se (2) em (5), este momento de torção é dado por

$$\begin{aligned} dm_{z1} dz &= [p_{yN}(x - x_C) - p_{xN}(y - y_C)] ds dz = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} [-\sigma_0 u'(y - y_C) + \sigma_0 v'(x - x_C)] t ds dz + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \phi'_z [\sigma_0 (x - x_C)^2 + \sigma_0 (y - y_C)^2] \right\} t ds dz + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \phi_z [\tau_0 \cos \theta_M (x - x_C) + \tau_0 \sin \theta_M (y - y_C)] \right\} t ds dz \end{aligned} \quad (8.a)$$

Deve-se notar ainda que, com o deslocamento do elemento da seção transversal tds para a configuração deformada, o ponto de aplicação tanto das forças tangenciais τtds quanto das forças transversais externas p_x e p_y se desloca, resultando numa variação do momento de torção (fig. IV.3).

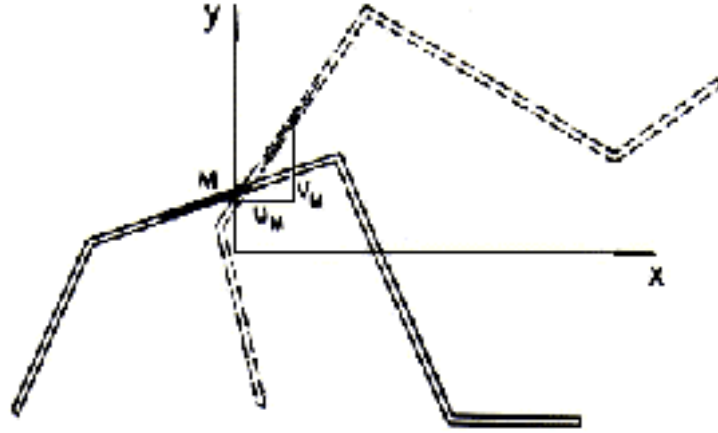


FIGURA IV.3

O incremento $dm_{z2} dz$ decorrente do deslocamento das forças tangenciais é dado pela diferença entre os momentos de torção nas seções $z+dz$ e z e vale, para o elemento tds ,

$$\begin{aligned}
 dm_{z2} dz &= \left(u_M + \frac{\partial u_M}{\partial z} dz \right) \left[\tau_0 + \tau_1 + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_0 + \tau_1) dz \right] \sin \theta_M t ds - \\
 &- u_M [\tau_0 + \tau_1] \sin \theta_M t ds + v_M [\tau_0 + \tau_1] \cos \theta_M t ds - \\
 &- \left(v_M + \frac{\partial v_M}{\partial z} dz \right) \left[\tau_0 + \tau_1 + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_0 + \tau_1) dz \right] \cos \theta_M t ds \cong \\
 &\cong \left[\frac{\partial (\tau_0 \sin \theta_M u_M)}{\partial z} - \frac{\partial (\tau_0 \cos \theta_M v_M)}{\partial z} \right] t ds dz
 \end{aligned} \tag{8.b}$$

Substituindo-se os valores de u_M e v_M de (1) e desprezando-se os termos de ordem superior, tem-se

$$\begin{aligned}
 dm_{z2} dz &= \frac{\partial}{\partial z} [u \tau_0 \sin \theta_M - v \tau_0 \cos \theta_M] t ds dz - \\
 &- \frac{\partial}{\partial z} [\varphi_z \tau_0 \sin \theta_M (y - y_C) + \varphi_z \tau_0 \cos \theta_M (x - x_C)] t ds dz
 \end{aligned}$$

O incremento dm_{z3} dz decorrente do deslocamento das forças de superfície p_x e p_y vale:

$$dm_{z3} dz = [p_y u_M - p_x v_M] ds dz = [p_y u - p_x v - \varphi_z p_y (y - y_C) - \varphi_z p_x (x - x_C)] ds dz \quad (8.c)$$

O momento de torção adicional por unidade de comprimento pode ser obtido somando-se e integrando-se estas três parcelas na seção transversal, obtendo-se então:

$$\begin{aligned} m_{zN} = & \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -u' \int_A \sigma_0 (y - y_C) dA + v' \int_A \sigma_0 (x - x_C) dA + \varphi_z' \int_A [\sigma_0 (x - x_C)^2 + \sigma_0 (y - y_C)^2] dA \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[u \int_A \tau_0 \sin \theta_M dA - v \int_A \tau_0 \cos \theta_M dA \right] + u \int_{S_i}^{S_f} p_y ds - v \int_{S_i}^{S_f} p_x ds - \\ & - \varphi_z \left[\int_{S_i}^{S_f} p_x (x - x_C) ds + \int_{S_i}^{S_f} p_y (y - y_C) ds \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Pode-se observar que a parcela dm_{z2} contempla as tensões tangenciais antes e depois da mudança de configuração de equilíbrio. Em vista disto, os termos decorrentes de dm_{z2} são cancelados com termos de dm_{z1} e dm_{z3} , como pode ser visto nos termos finais das expressões 8.a e 8.b e nas deduções que se seguem.

Substituindo-se σ_0 de III-34, tomando-se os eixos x e y passando pelo centro de gravidade e calculando-se as propriedades setoriais em relação ao centro de torção, as três primeiras integrais da expressão (9), que representam a contribuição das tensões normais para o momento de torção adicional, podem ser escritas como:

$$\int_A \sigma_0 (y - y_C) dA = -y_C N + M_x \quad (10.a)$$

$$\int_A \sigma_0 (x - x_C) dA = -x_C N - M_y \quad (10.b)$$

$$\begin{aligned} \int_A [\sigma_0 (x - x_C)^2 + \sigma_0 (y - y_C)^2] dA = & \frac{I_0^C}{A} N + \left[\frac{I_y H_x - I_{xy} H_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} - 2y_C \right] M_x - \\ & - \left[\frac{I_{xy} H_x - I_x H_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} - 2x_C \right] M_y + \frac{H_\omega}{I_\omega} M_\omega = \\ = & r_0^2 N + 2r_{0y} M_x - 2r_{0x} M_y + r_{0\omega} M_\omega \end{aligned} \quad (10.c)$$

I_0^C é o momento polar de inércia da seção em torno do centro de torção, dado por:

$$I_0^C = I_X + I_Y + A(x_C^2 + y_C^2) \quad (11.a)$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{I_0^C}{A}} \quad \text{é o raio polar de inércia da seção em torno do centro de torção} \quad (11.b)$$

H_X , H_Y e H_ω são parâmetros de assimetria da seção dados por:

$$H_X = \int_A y (x^2 + y^2) dA \quad (12.a)$$

$$H_Y = -\int_A x (x^2 + y^2) dA \quad (12.b)$$

$$H_\omega = \int_A \omega (x^2 + y^2) dA \quad (12.c)$$

H_X e H_Y se anulam respectivamente para seções simétricas em torno dos eixos x e y. Por analogia com r_0 , os termos em M_X , M_Y e M_ω são designados com $2r_{0y}$, $2r_{0x}$ e $r_{0\omega}$, embora só os dois primeiros tenham efetivamente como dimensão um comprimento.

As duas integrais correspondentes à contribuição das tensões de cisalhamento são dadas por:

$$\int_A \tau_0 \sin \theta_M dA = \int_A \tau_0 t dy = V_Y = M'_X \quad (13.a)$$

$$\int_A \tau_0 \cos \theta_M dA = \int_A \tau_0 t dx = V_X = -M'_Y \quad (13.b)$$

Quanto à contribuição das forças externas de superfície, tem-se:

$$\int_{S_i}^{S_f} p_Y ds = f_Y \quad (14.a)$$

$$\int_{S_i}^{S_f} p_X ds = f_X \quad (14.b)$$

$$\int_{S_i}^{S_f} p_X (x - x_C) ds + \int_{S_i}^{S_f} p_Y (y - y_C) ds = f_X (e_X - x_C) + f_Y (e_Y - y_C) \quad (14.c)$$

onde e_X e e_Y são as coordenadas do ponto de aplicação das cargas transversais f_X e f_Y . Este termo se anula se as forças transversais são aplicadas no pólo, admitido nesta dedução coincidente com o centro de torção.

Substituindo-se estas expressões em (9), obtém-se:

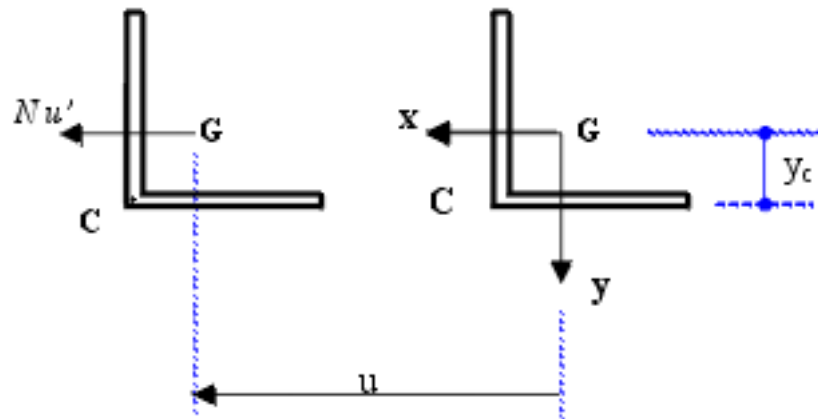
$$\begin{aligned} m_{ZN} = & y_C [N u'] - x_C [N v'] - [u' M_X] - [v' M_Y] + \\ & + [(r_0^2 N + 2r_{0Y} M_X - 2r_{0X} M_Y + r_{0\omega} M_\omega) \phi_Z'] + [u M_X' + v M_Y'] \\ & + u f_Y - v f_X - \phi_Z [f_X (e_X - x_C) + f_Y (e_Y - y_C)] \end{aligned}$$

Levando-se em conta que

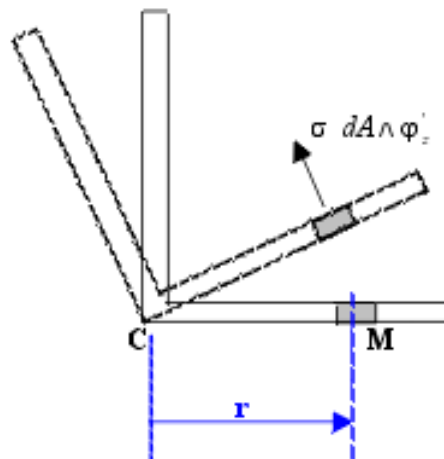
$$f_X = -V_X' = M_Y'' \text{ e } f_Y = -V_Y' = -M_X'', \text{ tem-se:}$$

$$\begin{aligned} m_{ZN} = & y_C [N u'] - x_C [N v'] - u'' M_X - v'' M_Y + \\ & + [(r_0^2 N + 2r_{0Y} M_X - 2r_{0X} M_Y + r_{0\omega} M_\omega) \phi_Z'] - \phi_Z [f_X (e_X - x_C) + f_Y (e_Y - y_C)] \end{aligned} \quad (15)$$

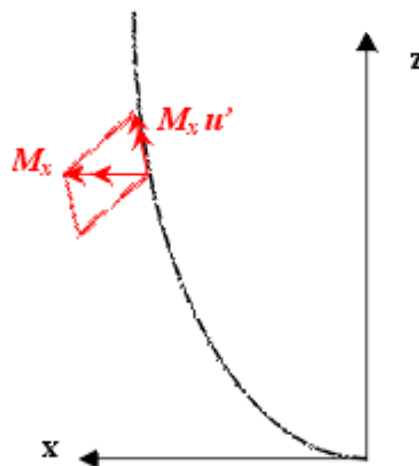
Os termos da expressão do momento de torção fictício podem ser obtidos também a partir de considerações geométricas. Tomando-se novamente por simplicidade uma barra de seção transversal $\perp$ (fig. IV.4):



(a)



(b)



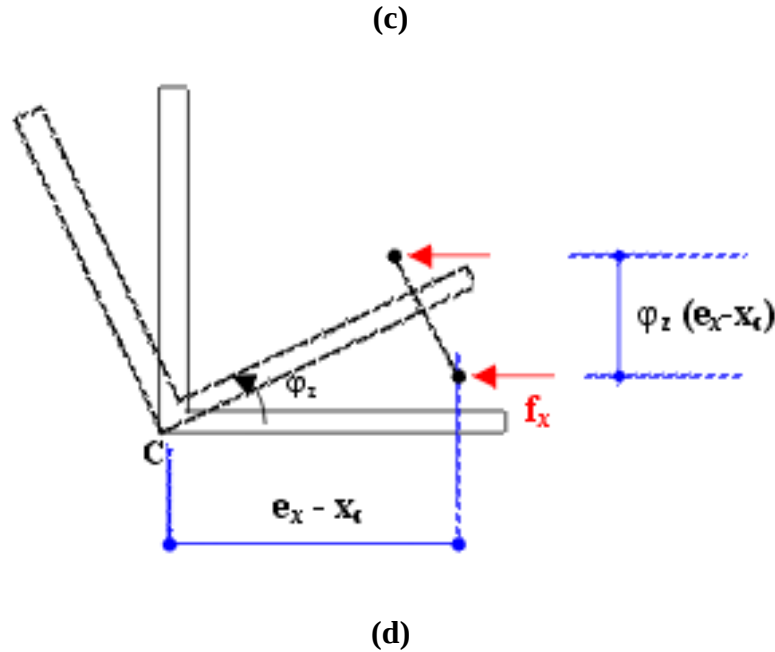


FIGURA IV.4

- a) A força cortante fictícia na direção x correspondente à força normal N e decorrente do deslocamento u vale Nu' , como já visto na fig. IV.2. O momento de torção fictício resulta da excentricidade desta força em relação ao centro de torção e a diferença entre os valores do momento de torção nas seções z e $z + dz$ é o primeiro termo de m_{ZN} , ou seja, $y_C [Nu']$. De maneira análoga, pode-se obter o segundo termo de m_{ZN} , decorrente dos deslocamentos v .
- b) A força transversal fictícia num elemento dA correspondente à força normal N e decorrente da rotação ϕ_z vale $(r\phi'_z)(\sigma dA)$, como já visto na fig. IV.2. O momento de torção resultante é $r^2\phi'_z \sigma dA$, que integrado ao longo da seção transversal resulta em $\phi'_z \int \sigma r^2 dA$.

Notando-se que, para uma seção qualquer, r é dado por:

$$r^2 = (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2$$

concluiu-se que esta integral é idêntica à da expressão (10.c). A diferença entre os valores do momento de torção nas seções z e $z + dz$ resulta no termo indicado na expressão (15). A parcela correspondente à força normal foi estudada inicialmente por H. Wagner. Embora a expressão contenha termos em M_X , M_Y e M_{ω} , este termo será aqui denominado como termo de Wagner.

- c) Como resultado da curvatura da barra no plano xz, o momento fletor M_x passa a ter um componente na direção da barra de valor M_{xu} . A variação deste momento ao longo do comprimento dz, desprezando-se termos de ordem superior, é M'_{xu} .
- d) O deslocamento na direção y do ponto de aplicação das forças transversais f_x decorrente da rotação ϕ_z vale $\phi_z (e_x - x_c)$. Este deslocamento resulta num momento de torção adicional dado pelo último termo da expressão (15).

Nas aplicações da expressão (15) ao cálculo da carga crítica de uma barra, é usual que a força normal seja o único esforço solicitante e que as forças transversais passem pelo centro de torção. Neste caso, tem-se:

$$m_{ZN} = y_c [Nu']' - x_c [Nv']' + [r_0^2 N\phi_z']' \quad (16)$$

IV.2.3 - Equações diferenciais de equilíbrio

As equações diferenciais de equilíbrio a serem utilizadas para a análise de estabilidade da barra podem ser obtidas das equações de equilíbrio III-27, deduzidas para a análise linear, substituindo-se as forças transversais e o momento de torção pelas forças e momentos fictícios aqui deduzidos.

Adicionando-se ainda as forças e momentos de torção provenientes de eventuais apoios elásticos (expressões III-45), resultam as seguintes expressões:

$$EAw_0'' = 0 \quad (17.a)$$

$$EI_Y u^{IV} - EI_{XY} v^{IV} - [N(u' + y_c \phi_z')] + [M_x \phi_z]'' + \beta_x [u - (y_H - y_c) \phi_z] = 0 \quad (17.b)$$

$$-EI_{XY} u^{IV} + EI_X v^{IV} - [N(v' - x_c \phi_z')] + [M_y \phi_z]'' + \beta_y [v + (x_H - x_c) \phi_z] = 0 \quad (17.c)$$

$$\begin{aligned}
 &EI_{\omega} \varphi_Z^{IV} - GI_t \varphi_Z'' - y_C [Nu'] + x_C [Nv'] + u'' M_X + v'' M_Y - \\
 &- \left[(r_0^2 N + 2r_{0Y} M_X - 2r_{0X} M_Y + r_{0\omega} M_{\omega}) \varphi_Z' \right]' + \beta_{\varphi} \varphi_Z - \beta_X (y_H - y_C) u + \\
 &+ \beta_Y (x_H - x_C) v + \left[\beta_X (y_H - y_C)^2 + \beta_Y (x_H - x_C)^2 \right] \varphi_Z + \\
 &+ [f_X (e_X - y_C) + f_Y (e_Y - y_C)] \varphi_Z = 0
 \end{aligned}
 \tag{17.d}$$

Recorde-se que os deslocamentos u e v , assim como as propriedades setoriais da seção transversal e o parâmetro r_0 , são calculados em relação ao centro de torção. Os momentos e o produto de inércia, os momentos fletores e os parâmetros de assimetria H_X , H_Y e H_{ω} , dos quais resultam r_{0X} , r_{0Y} e $r_{0\omega}$, são calculados para os eixos passando pelo centro de gravidade da seção transversal.

IV.3 - O MÉTODO ENERGÉTICO

A condição necessária para o equilíbrio de um sistema estrutural elástico sob carregamento conservativo numa determinada configuração é que a energia potencial total do sistema passe por um extremo, isto é, que a primeira variação da energia potencial total seja nula.

Designando-se por Δ os deslocamentos generalizados de uma seção transversal, a condição para que a configuração seja de equilíbrio pode ser expressa como:

$$\delta U \left(\Delta, \delta \Delta \right) = 0 \quad \forall \delta \Delta
 \tag{18.a}$$

Por outro lado, o teorema de Lagrange-Dirichlet estabelece que uma condição suficiente para a estabilidade do equilíbrio em uma determinada configuração é que a energia potencial total seja mínima nesta configuração, isto é, que a segunda variação da energia potencial total seja positiva definida, o que pode ser expresso como:

$$\delta^2 U \left(\Delta, \delta \Delta \right) > 0 \quad \forall \delta \Delta \neq 0
 \tag{18.b}$$

A transição de estabilidade para instabilidade se dá para uma configuração para a qual a expressão (18.b) deixa de ser satisfeita. Esta condição pode ser expressa como:

$$\exists \delta \Delta \neq 0 \quad / \quad \delta^2 U(\Delta, \delta \Delta) = 0 \quad (18.c)$$

O carregamento para o qual isto ocorre é denominado carregamento crítico.

O estudo do comportamento do sistema estrutural pode então ser feito a partir do conhecimento da expressão da segunda variação da energia potencial total.

Uma análise acurada do problema só pode ser feita com base em uma teoria de barras não-linear geometricamente exata, válida em situações de grandes deslocamentos e rotações. Esta formulação permite determinar o comportamento das barras antes e depois de se atingir o carregamento crítico.

Pode-se determinar um valor aproximado do carregamento crítico por meio de uma análise linearizada de estabilidade, denominada análise de Euler, na qual as hipóteses indicadas em IV.1 são introduzidas na expressão exata da segunda variação da energia potencial, ou seja:

- Os esforços internos são calculados pela teoria linear
- A configuração crítica é confundida com a inicial $(\Delta_{cr} = 0)$

Como já visto, este procedimento não dá nenhuma indicação a respeito da configuração pós-crítica. No entanto, conduz a uma grande simplificação na expressão da segunda variação da energia potencial total. A aplicação deste procedimento é comentada no item 3.2.

Observe-se que, desenvolvendo $U(\Delta)$ em séries de Taylor em torno da configuração crítica Δ_{cr} , tem-se:

$$U(\Delta_K) = U(\Delta_{KCR} + \delta \Delta_K) = U(\Delta_{KCR}) + U_{,i}(\Delta_{KCR}) \delta \Delta_i + \frac{1}{2} U_{,ij}(\Delta_{KCR}) \delta \Delta_i \delta \Delta_j + \dots$$

Sendo Δ_{cr} uma configuração de equilíbrio, resulta $U_{,i}(\Delta_{KCR}) = 0$, pois a primeira variação da energia potencial total é nula para uma configuração de equilíbrio. Assim,

$$\Delta U = U(\Delta_K) - U(\Delta_{KCR}) \cong \frac{1}{2} \delta^2 U(\Delta_{KCR}) \quad (19.a)$$

Procedendo-se de maneira análoga com $U_{,i}(\Delta)$, tem-se:

$$U_{,i}(\Delta_K) = U_{,i}(\Delta_{KCR}) + U_{,ij}(\Delta_{KCR})\delta\Delta_j + \dots$$

Assim, sendo novamente $U_{,i}(\Delta_{KCR}) = 0$, e Δ uma configuração de equilíbrio,

$$U_{,i}(\Delta_K) \cong U_{,ij}(\Delta_{KCR})\delta\Delta_j = 0 \quad (19.b)$$

Conclui-se portanto de (19.a) que um valor aproximado da carga crítica pode ser determinado utilizando-se a diferença de energia potencial entre a configuração deformada e a imediatamente anterior à flambagem, no lugar da segunda variação da energia potencial; de (19.b) conclui-se que pode ser utilizada também a expressão da primeira variação da energia potencial.

O valor aproximado da carga crítica pode ser obtido também a partir de expressões aproximadas de ΔU ou δU . Estas expressões são determinadas impondo-se as hipóteses simplificadoras na formulação das equações diferenciais de equilíbrio, como foi feito no item 2, e não na expressão de segunda variação da energia potencial total. Esta prática é adotada neste texto e é tradicional na literatura técnica, mas apresenta imprecisões que são discutidas em pormenor no final deste item.

IV.3.1 - Aplicação do princípio dos trabalhos virtuais. Obtenção do funcional U

As equações diferenciais de equilíbrio (17.a) a (17.d) são automaticamente satisfeitas para os deslocamentos exatos $\Delta(x,y,z)$. Quando um valor aproximado dos deslocamentos é substituído nas equações de equilíbrio, resulta um resíduo ε em cada equação, que corresponde a uma força ou momento não equilibrado.

No método energético, os valores extremos do funcional da energia potencial total podem ser determinados por meio do método direto do cálculo das variações, entre os quais os de Ritz e de Galerkin são os mais utilizados. O campo de deslocamentos é representado, nestes métodos, por funções do tipo:

$$\Delta_j = \Delta_j(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \Delta_{ji} g_{ji}(x, y, z) \quad j = 1 \dots m \quad (20)$$

onde Δ_j corresponde aos m deslocamentos generalizados (no caso quatro, sendo três deslocamentos u, v, w e a rotação ϕ_z), Δ_{ji} são coeficientes constantes e $g_{ji}(x,y,z)$ formam uma sucessão de funções cinematicamente admissíveis para o problema, denominadas funções coordenadas.

No método de Galerkin, em particular, os resíduos resultantes da substituição de Δ_j nas equações de equilíbrio são ponderados pelas funções coordenadas g_{ji} ou diretamente pelos deslocamentos virtuais correspondentes, já que também são funções cinematicamente admissíveis. A condição de equilíbrio se exprime impondo-se que a soma dos trabalhos virtuais das forças sob os deslocamentos virtuais dados assim obtidos é nula, ou seja,

$$\sum_{j=1}^m \int_0^L \varepsilon_j(\Delta_K) \delta \Delta_j(x, y, z) dz = 0$$

Multiplicando-se assim o primeiro termo das equações diferenciais de equilíbrio (17.a) a (17.d) respectivamente pelos deslocamentos virtuais δw_0 , δu , δv e $\delta \varphi_z$, somando-se as expressões assim obtidas e integrando-se ao longo do comprimento da barra, obtém-se a expressão da primeira variação da energia potencial total.

Tomando-se como exemplo a expressão (17.a) correspondente ao equilíbrio de forças na direção z, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^L EA w_0'' \delta w_0 dz &= EA w_0' \delta w_0 \Big|_0^L - EA \int_0^L w_0' \delta w_0' dz = EA w_0' \delta w_0 \Big|_0^L - EA \int_0^L \delta \left(\frac{1}{2} w_0'^2 \right) dz = \\ &= \bar{N} \delta w_0 \Big|_0^L - EA \int_0^L \delta \left(\frac{1}{2} w_0'^2 \right) dz \end{aligned} \quad (21)$$

Multiplicando-se o primeiro termo da expressão (17.b) correspondente ao equilíbrio de forças na direção x pelo deslocamento virtual δu , e integrando-se ao longo do comprimento da barra, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^L EI_Y u^{IV} \delta u dz - \int_0^L EI_{XY} v^{IV} \delta u dz - \int_0^L [N(u' + y_C \varphi_z')] \delta u dz + \int_0^L [M_X \varphi_z''] \delta u dz + \\ + \int_0^L \beta_X [u - (y_H - y_C) \varphi_z] \delta u dz \end{aligned} \quad (22)$$

Integrando-se por partes cada termo desta expressão, vem que:

$$\begin{aligned} \int_0^L EI_Y u^{IV} \delta u dz &= EI_Y \left\{ u''' \delta u \Big|_0^L - \int_0^L u''' \delta u' dz \right\} = EI_Y \left\{ u''' \delta u \Big|_0^L - u'' \delta u' \Big|_0^L + \int_0^L u'' \delta u'' dz \right\} = \\ &= EI_Y \left\{ u''' \delta u \Big|_0^L - u'' \delta u' \Big|_0^L + \int_0^L \delta \left[\frac{1}{2} u''^2 \right] dz \right\} \end{aligned}$$

(23.a)

$$\int_0^L EI_{XY} v^{IV} \delta u dz = EI_{XY} \left\{ v''' \delta u \Big|_0^L - v'' \delta u' \Big|_0^L + \int_0^L v'' \delta u'' dz \right\} \quad (23.b)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L [N(u' + y_C \phi_Z')] \delta u dz &= N(u' + y_C \phi_Z') \delta u \Big|_0^L - \int_0^L N(u' + y_C \phi_Z') \delta u' dz = \\ &= N(u' + y_C \phi_Z') \delta u \Big|_0^L - \int_0^L N y_C \phi_Z' \delta u' dz - \int_0^L N \delta \left[\frac{1}{2} u'^2 \right] dz \end{aligned} \quad (23.c)$$

$$\int_0^L \beta_X [u - (y_H - y_C) \phi_Z] \delta u dz = \int_0^L \beta_X \delta \left(\frac{1}{2} u^2 \right) dz - \int_0^L \beta_X (y_H - y_C) \phi_Z \delta u dz \quad (23.d)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L [M_X \phi_Z]'' \delta u dz &= [M_X \phi_Z]' \delta u \Big|_0^L - \int_0^L [M_X \phi_Z]' \delta u' dz = \\ &= [M_X \phi_Z]' \delta u \Big|_0^L - \int_0^L M_X' \phi_Z \delta u' dz - \int_0^L M_X \phi_Z' \delta u' dz \end{aligned} \quad (23.e)$$

Substituindo-se (23) em (22) e indicando-se em separado os termos correspondentes às condições de contorno tem-se:

$$\begin{aligned} EI_Y \int_0^L \delta \left(\frac{1}{2} u'^2 \right) dz - EI_{XY} \int_0^L v'' \delta u'' dz + \int_0^L N \delta \left(\frac{1}{2} u'^2 \right) dz + \int_0^L N y_C \phi_Z' \delta u' dz - \\ - \int_0^L M_X' \phi_Z \delta u' dz - \int_0^L M_X \phi_Z' \delta u' dz + \int_0^L \beta_X \delta \left(\frac{1}{2} u^2 \right) dz - \int_0^L \beta_X (y_H - y_C) \phi_Z \delta u dz \end{aligned} \quad (24.a)$$

$$\begin{aligned} (EI_Y u''' - EI_{XY} v''') \delta u \Big|_0^L + [(M_X \phi_Z)'] - N(u' + y_C \phi_Z') \delta u \Big|_0^L - (EI_Y u'' - EI_{XY} v'') \delta u' \Big|_0^L = \\ = \left(V_{XN} - \bar{V}_X \right) \delta u \Big|_0^L - \bar{M}_Y \delta u' \Big|_0^L \end{aligned} \quad (24.b)$$

Procedendo-se de maneira análoga com a equação de equilíbrio (17.c) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^L EI_X v^{IV} \delta v dz - \int_0^L EI_{XY} u^{IV} \delta v dz - \int_0^L \left[N(v' - x_C \phi_Z') \right] \delta v dz + \int_0^L \left[M_Y \phi_Z' \right] \delta v dz + \\ & + \int_0^L \beta_Y \left[v + (x_H - x_C) \phi_Z \right] \delta v dz \end{aligned} \quad (25.a)$$

de onde resultam os termos:

$$\begin{aligned} & EI_X \int_0^L \delta \left(\frac{1}{2} v'^2 \right) dz - EI_{XY} \int_0^L u'' \delta v'' dz + \int_0^L N \delta \left(\frac{1}{2} v'^2 \right) dz - \int_0^L N x_C \phi_Z' \delta v' dz - \\ & - \int_0^L M_Y' \phi_Z \delta v' dz - \int_0^L M_Y \phi_Z' \delta v' dz + \int_0^L \beta_Y \delta \left(\frac{1}{2} v^2 \right) dz + \int_0^L \beta_Y (x_H - x_C) \phi_Z \delta v dz \end{aligned} \quad (25.b)$$

e

$$\begin{aligned} & \left(EI_X v''' - EI_{XY} u''' \right) \delta v \Big|_0^L + \left[(M_Y \phi_Z)' - N(v' - x_C \phi_Z') \right] \delta v \Big|_0^L - (EI_X v'' - EI_{XY} u'') \delta v' \Big|_0^L = \\ & = \left(V_{YN} - \bar{V}_Y \right) \delta v \Big|_0^L + \bar{M}_X \delta v' \Big|_0^L \end{aligned} \quad (25.c)$$

De (17.d) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^L EI_\omega \phi_Z^{IV} \delta \phi_Z dz - \int_0^L GI_t \phi_Z'' \delta \phi_Z dz - \int_0^L y_C [Nu']' \delta \phi_Z dz + \int_0^L x_C [Nv']' \delta \phi_Z dz + \\ & + \int_0^L u'' M_X \delta \phi_Z dz + \int_0^L v'' M_Y \delta \phi_Z dz - \int_0^L \left[(r_0^2 N + 2r_{0y} M_X - 2r_{0y} M_Y + r_{0\omega} M_\omega) \phi_Z' \right] \delta \phi_Z dz + \\ & + \int_0^L \left\{ \beta_\phi \phi_Z - \beta_X (y_H - y_C) u + \beta_Y (x_H - x_C) v + \left[\beta_X (y_H - y_C)^2 + \beta_Y (x_H - x_C)^2 \right] \phi_Z \right\} \delta \phi_Z dz + \\ & + \int_0^L \left[f_X (e_X - x_C) + f_Y (e_Y - y_C) \right] \phi_Z \delta \phi_Z dz \end{aligned} \quad (26.a)$$

de onde resultam:

$$\begin{aligned}
 & EI_{\omega} \int_0^L \delta \left(\frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right) dz + GI_t \int_0^L \delta \left(\frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right) dz + y_C \int_0^L N u' \delta \varphi_z' dz - x_C \int_0^L N v' \delta \varphi_z' dz - \\
 & - \int_0^L M_x u' \delta \varphi_z' dz - \int_0^L M_x' u' \delta \varphi_z dz - \int_0^L M_y v' \delta \varphi_z' dz - \int_0^L M_y' v' \delta \varphi_z dz + \\
 & + \int_0^L [r_0^2 N + 2r_{0Y} M_x - 2r_{0X} M_y + r_{0\omega} M_{\omega}] \delta \left(\frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right) dz + \int_0^L \beta_{\varphi} \delta \left(\frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right) dz - \\
 & - \int_0^L \beta_x (y_H - y_C) u \delta \varphi_z dz + \int_0^L \beta_y (x_H - x_C) v \delta \varphi_z dz + \\
 & + \int_0^L [\beta_x (y_H - y_C)^2 + \beta_y (x_H - x_C)^2] \delta \left(\frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right) dz + \int_0^L \left[f_x (e_x - x_C) + f_y (e_y - y_C) \right] \delta \left(\frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right) dz
 \end{aligned} \tag{26.b}$$

$$\begin{aligned}
 & (EI_{\omega} \varphi_z''' - GI_t \varphi_z') \delta \varphi_z \Big|_0^L - EI_{\omega} \varphi_z'' \delta \varphi_z' \Big|_0^L - \\
 & - \left[-u' (-y_C N + M_x) + v' (-x_C N - M_y) + (r_0^2 N + 2r_{0Y} M_x - 2r_{0X} M_y + r_{0\omega} M_{\omega}) \varphi_z' \right] \delta \varphi_z \Big|_0^L = \\
 & = \left(T_N^* - \bar{T} \right) \delta \varphi_z \Big|_0^L - \bar{M}_{\omega} \delta \varphi_z' \Big|_0^L
 \end{aligned} \tag{26.c}$$

Somando-se os termos que independem das condições de contorno, combinando-se os termos comuns e utilizando-se as relações (13), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \delta U = & EA \int_0^L \delta \left[\frac{1}{2} w_0'^2 \right] dz + EI_Y \int_0^L \delta \left(\frac{1}{2} u''^2 \right) dz + EI_X \int_0^L \delta \left(\frac{1}{2} v''^2 \right) dz - EI_{XY} \int_0^L \delta (u'' v'') dz + \\
 & + EI_{\omega} \int_0^L \delta \left(\frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right) dz + GI_t \int_0^L \delta \left(\frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right) dz + \int_0^L N \delta \left(\frac{1}{2} u'^2 \right) dz + \int_0^L N \delta \left(\frac{1}{2} v'^2 \right) dz + \int_0^L N y_C \delta (u' \varphi_z') dz - \\
 & - \int_0^L N x_C \delta (v' \varphi_z') dz - \int_0^L M_x \delta (u' \varphi_z') dz - \int_0^L M_y \delta (v' \varphi_z') dz - \int_0^L V_y \delta (u' \varphi_z) dz + \int_0^L V_x \delta (v' \varphi_z) dz + \\
 & + \int_0^L [r_0^2 N + 2r_{0Y} M_x - 2r_{0X} M_y + r_{0\omega} M_{\omega}] \delta \left(\frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right) dz + \int_0^L \beta_x \delta \left(\frac{1}{2} u^2 \right) dz + \int_0^L \beta_y \delta \left(\frac{1}{2} v^2 \right) dz + \\
 & + \int_0^L \beta_{\varphi} \delta \left(\frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right) dz - \int_0^L \beta_x (y_H - y_C) \delta (u \varphi_z) dz + \int_0^L \beta_y (x_H - x_C) \delta (v \varphi_z) dz + \\
 & + \int_0^L [\beta_x (y_H - y_C)^2 + \beta_y (x_H - x_C)^2] \delta \left(\frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right) dz + \int_0^L [f_x (e_x - x_C) + f_y (e_y - y_C)] \delta \left(\frac{1}{2} \varphi_z'^2 \right) dz
 \end{aligned} \tag{27}$$

Tendo em vista que as forças externas e os esforços solicitantes não se alteram com os deslocamentos virtuais aplicados à barra, a expressão acima pode ser considerada a primeira variação do seguinte funcional:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[E A w_0'^2 + E I_Y u''^2 + E I_X v''^2 - 2 E I_{XY} u'' v'' + E I_\omega \phi_Z''^2 + G I_t \phi_Z'^2 \right] dz + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L N \left(u'^2 + v'^2 + 2 y_C u' \phi_Z' - 2 x_C v' \phi_Z' \right) dz - \int_0^L \phi_Z' (M_X u' + M_Y v') dz + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L \phi_Z'^2 \left[r_0^2 N + 2 r_{0Y} M_X - 2 r_{0X} M_Y + r_{0\omega} M_\omega \right] dz + \int_0^L \phi_Z (V_X v' - V_Y u') dz + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \beta_X [u - (y_H - y_C) \phi_Z]^2 + \beta_Y [v + (x_H - x_C) \phi_Z]^2 + \beta_\phi \phi_Z^2 \right\} dz + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L \left[f_X (e_X - x_C) + f_Y (e_Y - y_C) \right] \phi_Z^2 dz
 \end{aligned} \tag{28}$$

A primeira integral é denominada termo constitutivo, as quatro seguintes correspondem ao efeito geométrico dos esforços internos e a última ao efeito geométrico dos esforços externos.

Embora corresponda à diferença da energia potencial entre a configuração deformada e a configuração reta imediatamente anterior à flambagem, este funcional é referido na literatura como sendo o da própria energia potencial total do sistema. Da condição $\delta U = 0$ pode ser obtido, como já visto, o carregamento crítico.

Os esforços $\bar{N}$, $\bar{V}_X$, $\bar{V}_Y$, $\bar{M}_X$, $\bar{M}_Y$, $\bar{T}$ e $\bar{M}_\omega$ são os esforços solicitantes devidos à mudança de configuração da barra a partir da configuração básica. Isto pode ser facilmente constatado comparando-se os termos correspondentes a estes esforços nas expressões 21, 24.b, 25.b e 26.b com as expressões 32, 37 e 41 do capítulo III.

V_{XN} e V_{YN} são as forças cortantes decorrentes das forças transversais fictícias f_{XN} e f_{YN} , deduzidas no item 2.1. Tomando-se por exemplo a expressão (7.a), pode-se escrever:

$$V_{XN}' = -f_{XN} = - \left[N(u' + y_C \phi_Z') - (M_X \phi_Z)' \right] \tag{29}$$

T_N^* é a parcela do momento de torção total devida às forças fictícias decorrentes das tensões normais. Isto pode ser constatado tomando-se o desenvolvimento do primeiro termo entre chaves da expressão (9), aqui designado por m_{ZN}^* , que é o momento de torção fictício por unidade de comprimento proveniente das tensões normais.

$$T_N^* = m_{ZN}^* = \left[-u'(-y_C N + M_X) + v'(-x_C N - M_Y) + \varphi'_Z(r_0^2 N + 2r_{0Y} M_X - 2r_{0Y} M_Y + r_{0\omega} M_\omega) \right]' \quad (30)$$

As condições de contorno se anulam se os deslocamentos virtuais são nulos nas extremidades (condições de contorno essenciais) ou se os termos correspondentes aos esforços solicitantes são nulos nas extremidades (condições de contorno naturais). Tomando-se como exemplo a expressão (24.b), as condições de contorno são satisfeitas se:

- O deslocamento virtual δu é nulo nas extremidades, ou seja, apoio indeslocável, ou a força cortante nas extremidades devida à mudança de configuração de equilíbrio decorre apenas das forças transversais fictícias, e ainda;
- O momento fletor $\bar{M}_Y$ é nulo ou a rotação virtual $\delta u'$ é nula nas extremidades, ou seja, extremidade articulada ou engastada.

Analogamente para a expressão (26.c), as condições de contorno são satisfeitas se:

- O bimomento é nulo nas extremidades (extremidade livre ou simplesmente apoiada) ou o empenamento é impedido (engaste perfeito), e ainda;
- A rotação é impedida nas extremidades ou o momento de torção nas extremidades que resulta da mudança de configuração decorre apenas da parcela do momento de torção fictício m_{ZN}^* proveniente das tensões normais, o que ocorre na ausência de carga transversal.

Observação:

As expressões do funcional da energia potencial total e das condições de contorno provenientes da aplicação do método descrito no item anterior dependem da forma de integração por partes adotada.

Tomem-se como exemplo os termos em M_X das expressões (22) e (26.a). Para a obtenção do funcional (28), optou-se por integrar uma vez cada termo, o que resultou em:

$$\begin{aligned} \int_0^L (M_X \varphi_Z)' \delta u dz + \int_0^L u'' M_X \delta \varphi_Z dz &= (M_X \varphi_Z)' \delta u \Big|_0^L - \int_0^L M_X \varphi_Z' \delta u' dz - \int_0^L M_X' \varphi_Z \delta u' dz + \\ + u' M_X \delta \varphi_Z \Big|_0^L - \int_0^L u' M_X \delta \varphi_Z' dz - \int_0^L u' M_X' \delta \varphi_Z dz &= (M_X \varphi_Z)' \delta u \Big|_0^L + u' M_X \delta \varphi_Z \Big|_0^L - \\ - \int_0^L M_X \delta(u' \varphi_Z') dz - \int_0^L M_X' \delta(u' \varphi_Z) dz \end{aligned}$$

de onde resultam:

a parcela do funcional da energia potencial total:

$$-\int_0^L M_x \varphi_z' u' dz - \int_0^L V_y \varphi_z u' dz$$

e os termos em M_x das condições de contorno 24.b e 26.b.

Por outro lado, caso se opte por integrar duas vezes o termo proveniente de (22) e não integrar o termo de (26.a), vem que:

$$\begin{aligned} \int_0^L (M_x \varphi_z)'' \delta u dz + \int_0^L u'' M_x \delta \varphi_z dz &= -M_x \varphi_z \delta u \Big|_0^L + (M_x \varphi_z)' \delta u \Big|_0^L + \\ + \int_0^L M_x \varphi_z \delta u'' dz + \int_0^L u'' M_x \delta \varphi_z dz &= -M_x \varphi_z \delta u \Big|_0^L + (M_x \varphi_z)' \delta u \Big|_0^L + \int_0^L M_x \delta (\varphi_z u'') dz \end{aligned}$$

de onde resulta uma parcela do funcional da energia potencial total sob a forma:

$$+ \int_0^L M_x \varphi_z u'' dz \quad (31)$$

ou seja, não comparece a força cortante. Um termo sob esta forma é encontrado em Timoshenko, Gere (1961) para análise de flambagem lateral de vigas.

Deve-se notar que as condições de contorno 24.b e 26.c, que decorrem da forma de integração adotada no texto, são de fácil interpretação física, embora sejam função das forças fictícias. Já o procedimento aqui indicado resulta nas condições de contorno

$$\left(V_{xN} - \bar{V}_x \right) \delta u \Big|_0^L = 0 \quad (32.a)$$

$$\left(\bar{M}_y + M_x \varphi_z \right) \delta u' \Big|_0^L = 0 \quad (32.b)$$

$$\left(T_N - \bar{T} \right) \delta \varphi_z \Big|_0^L = 0 \quad (32.c)$$

$$\bar{M}_\omega \delta \varphi_z' \Big|_0^L = 0 \quad (32.d)$$

onde:

$$T'_N = m_{ZN}^* + \left[u' M_X + v' M_Y \right] \quad (32.e)$$

As condições (32.a) e (32.d) são as mesmas obtidas anteriormente. A expressão (32.b) indica não mais $\bar{M}_Y = 0$ mas sim $\bar{M}_Y = -M_X \varphi_Z$, ou seja, a rotação da barra resulta num momento $\bar{M}_Y$ na extremidade proveniente do momento de primeira ordem M_X .

A expressão (32.e) indica que o momento de torção nas extremidades que resulta da mudança de configuração decorre apenas da parcela do momento de torção fictício m_{ZN}^* proveniente das tensões normais mas descontando-se os efeitos dos momentos flettores associados às rotações. Estas condições são, portanto, de difícil interpretação física.

Como consequência do acima exposto, encontram-se na literatura diferentes expressões para o funcional da energia potencial total, onde em particular os termos que contém as forças cortantes e os momentos flettores diferem bastante. Considera-se fundamental, portanto, estabelecer a expressão da energia potencial total a partir de uma teoria não-linear geometricamente exata, e então se adotar as simplificações que permitam, através de uma análise linearizada de estabilidade, determinar um valor aproximado do carregamento crítico.

IV.3.2 - Aplicação de uma teoria não-linear geometricamente exata

O funcional da segunda variação da energia potencial total pode ser obtido introduzindo-se as hipóteses da análise linearizada de Euler na expressão completa da segunda variação da energia potencial total, obtida a partir de uma teoria não-linear geometricamente exata. Não é objetivo deste texto abordar em pormenor esta teoria, mas apenas apresentar os aspectos relevantes e comparar os resultados com os obtidos no item anterior, onde se parte das equações diferenciais de equilíbrio. Maiores detalhes podem ser mostrados em Fruchtengarten (1995) e Campello (2000).

As deformações são definidas, na teoria não-linear citada, a partir do gradiente das velocidades; o tensor das tensões é o primeiro tensor de Piolla–Kirchhoff, energeticamente conjugado com o gradiente das velocidades. Definindo-se de forma conveniente os vetores dos esforços e das deformações generalizadas, assim como o dos esforços externos generalizados, pode-se obter, com o emprego do Teorema dos Trabalhos Virtuais, a expressão da segunda variação de energia potencial total, que sob forma matricial é dada por:

$$\delta^2 U = \int_L \left[\begin{pmatrix} D & B & H \end{pmatrix} \delta \Delta \right] \cdot \begin{pmatrix} B & H \end{pmatrix} \delta \Delta + \begin{pmatrix} G & H \end{pmatrix} \delta \Delta \cdot \begin{pmatrix} H \end{pmatrix} \delta \Delta - \begin{pmatrix} L^e \end{pmatrix} \delta \Delta \cdot \delta \Delta \right] dz \quad (33)$$

onde:

$\underline{D}$ é a matriz dos coeficientes de rigidez tangente da seção transversal, que é a parcela constitutiva do operador.

$\underline{G}$ é a matriz que caracteriza os efeitos geométricos dos esforços internos.

$\underline{L}^e$ é a matriz que caracteriza os efeitos geométricos dos esforços externos.

$\underline{B}$ e $\underline{H}$ são matrizes auxiliares.

$\delta \underline{\Delta}$ são deslocamentos generalizados virtuais, dados por três deslocamentos, três rotações e a intensidade do empenamento.

$$\delta \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta \varphi \\ \delta p \end{bmatrix} \quad (34)$$

Nesta teoria, as rotações independem da declividade ($\varphi_x \neq -v'$ e $\varphi_y \neq u'$) e a intensidade do empenamento independe da rotação específica ($\varphi_z \neq p$).

As condições de contorno são muito simples, e reduzem-se a impor que os deslocamentos generalizados e os esforços generalizados no contorno sejam iguais aos valores prescritos.

Tomando-se a configuração de equilíbrio inicial como a imediatamente anterior à flambagem (logo $\delta \underline{\Delta} = \underline{\Delta}$) e admitindo-se muito pequeno o gradiente dos deslocamentos na configuração crítica, esta expressão pode ser bastante simplificada, como mostrado a seguir.

a) Termo geométrico dos esforços internos

Impondo-se para eixo da barra o eixo passando pelo centro de torção e impondo-se o vínculo de Bernoulli-Euler ($\varphi_x = -v'$ e $\varphi_y = u'$) e o vínculo de Vlasov ($p = \varphi_z$) no centro de torção mas referindo-se os esforços solicitantes ao centro de gravidade, para permitir a comparação com a teoria de Vlasov, o termo geométrico dos esforços internos da expressão (33) pode ser escrito como:

$$\frac{1}{2} \int_0^L N \left[u'^2 + v'^2 + y_C (u' \varphi_z' - u'' \varphi_z) - x_C (v' \varphi_z' - v'' \varphi_z) \right] dz -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_0^L \left[M_x (u' \varphi_z' - u'' \varphi_z) + M_y (v' \varphi_z' - v'' \varphi_z) \right] dz + \frac{1}{2} \int_0^L T [u'' v' - u' v''] dz + \\
 & + \int_0^L \frac{\varphi_z}{2} (V_x v' - V_y u') dz - \int_0^L w_c' (V_x u' + V_y v') dz
 \end{aligned} \quad (35.a)$$

onde w_c é o deslocamento longitudinal do centro de torção.

Procedendo-se de maneira análoga para o eixo da barra passando pelo centro da gravidade, obtém-se para o termo geométrico dos esforços internos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^L N [u'^2 + v'^2 + 2y_c u' \varphi_z' - 2x_c v' \varphi_z'] dz - \frac{1}{2} \int_0^L \left[M_x (u' \varphi_z' - u'' \varphi_z) + M_y (v' \varphi_z' - v'' \varphi_z) \right] dz + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L T [u'' v' - u' v''] dz + \int_0^L \frac{\varphi_z}{2} (V_x v' - V_y u') dz - \int_0^L w_g' (V_x u' + V_y v') dz - \\
 & - \int_0^L \varphi_z \varphi_z' (V_x x_c + V_y y_c) dz - \frac{1}{2} \int_0^L (V_x y_c - V_y x_c) (v' u'' - u' v'') dz
 \end{aligned} \quad (35.b)$$

onde w_g é o deslocamento longitudinal do centro de gravidade.

Estes termos podem agora ser comparados aos obtidos na expressão (28) (segunda, terceira e quinta integrais). Note-se que a imposição das condições de contorno em pontos diferentes da seção transversal (C e G) conduz a expressões também diferentes. Na teoria de Vlasov, as condições de centro são referidas ao centro de torção.

O termo da força normal curiosamente só coincide com o de Vlasov para o eixo no centro de gravidade.

Os termos de força cortante são diferentes dos de Vlasov em ambas as situações. O termo φ_z é metade do de Vlasov; aparecem ainda termos adicionais em w referentes à projeção da força cortante na direção z (em ambas as expressões), assim como termos que contemplam momentos de torção adicionais referentes à excentricidade entre o centro de gravidade e o centro de torção.

É interessante observar que o momento de torção produz um efeito geométrico, não detectado na expressão (28).

O termo correspondente aos momentos fletores não varia com a posição do eixo, merecendo então um destaque especial. Nas expressões (28) e (31) aparecem respectivamente termos sob a forma $-M_x u' \varphi_z$ ou $+M_x u'' \varphi_z$, enquanto que nas expressões (35) ambos os termos aparecem combinados, sob a forma $-\frac{1}{2} M_x (u' \varphi_z' - u'' \varphi_z)$.

b) Termo geométrico dos esforços externos

Impondo-se o vínculo de Vlasov ($p = \phi'_z$) e os vínculos de Bernoulli-Euler para os eixos passando pelo centro de torção, o termo geométrico dos esforços externos pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_0^L \phi_z^2 [f_x (e_x - x_c) + f_y (e_y - y_c)] dz + \int_0^L \phi'_z [v' w f_y + u' w f_x] dz - \\
 & -\frac{1}{2} \int_0^L u' v' [f_y (e_x - x_c) + f_x (e_y - y_c)] dz - \frac{1}{2} \int_0^L \phi_z f_z [v' (e_x - x_c) - u' (e_y - y_c)] dz - \\
 & -\frac{1}{2} \int_0^L [u'^2 f_x (e_x - x_c) + v'^2 f_y (e_y - y_c)] dz
 \end{aligned} \tag{36}$$

O termo geométrico da expressão (28) (última integral) se resume ao primeiro termo da expressão (36). Os valores $(e_x - x_c)$, $(e_y - y_c)$ e w são os correspondentes ao ponto de aplicação do esforço externo que está sendo considerado.

Em geral, estas forças são aplicadas no mesmo ponto. Note-se que o termo geométrico dos esforços externos se anula se as forças passam pelo centro de torção, já que $w = 0$ neste ponto.

c) Termo constitutivo

A matriz de rigidez constitutiva D é obtida, na teoria não-linear, associando-se linearmente o segundo tensor das tensões de Piolla-Kirchhoff com o tensor das deformações de Green (material de Saint-Venant).

Esta associação resulta em tensões com termos até quarta ordem nas deformações generalizadas.

Uma solução aproximada pode ser obtida tomando-se apenas os termos até segunda ordem nas deformações generalizadas e desprezando-se os termos de segunda ordem em G . Obtém-se então a matriz constitutiva como a soma de uma parcela constante, que é a usual na teoria linear, e outra linear nas deformações generalizadas. Substituindo-se a matriz D no termo constitutivo da expressão (33), impondo-se os vínculos de Bernoulli-Euler e de Vlasov no eixo da barra passando pelo centro de torção e utilizando-se as propriedades geométricas referidas ao centro de gravidade, pode-se observar que:

- O termo constante de D resulta na primeira integral da expressão (28):

$$\frac{1}{2} \int_0^L \left[GI_t \phi_z'^2 + EI_\omega \phi_z''^2 + EAw_0'^2 + EI_x v''^2 - 2EI_{xy} u'' v'' + EI_y u''^2 \right] dz$$

- O termo linear de D resulta não só na quarta integral da expressão (28) (termo de Wagner) como também num grande número de outros termos constitutivos não-lineares envolvendo o momento de torção uniforme:

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} \int_0^L \phi_z'^2 \left[r_0^2 N + 2r_{0y} M_x - 2r_{0x} M_y + r_{0\omega} M_\omega \right] dz + \\ & + \int_0^L \frac{EM_z}{GI_t} \phi_z' \left[u'' (H_y + 2x_C I_y - 2y_C I_{xy}) - v'' (H_x + x_C I_{xy} - y_C I_x) \right] dz + \\ & + \int_0^L \frac{EM_z}{GI_t} \phi_z' \left[\phi_z'' H_\omega + w_0' I_0 \right] dz \end{aligned}$$

Usualmente, nos perfis de seção delgada, o momento de torção uniforme não é um esforço solicitante significativo.

Finalmente, o funcional da segunda variação da energia potencial total a ser utilizado para a análise de Euler, obtido por meio da linearização proposta por Fruchtengarten (1995), é dado por:

$$\begin{aligned} \delta^2 U = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[GI_t \phi_z'^2 + EI_\omega \phi_z''^2 + EAw_0'^2 + EI_x v''^2 - 2EI_{xy} u'' v'' + EI_y u''^2 \right] dz + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L N \left[u'^2 + v'^2 + y_C (u' \phi_z' - u'' \phi_z) - x_C (v' \phi_z' - v'' \phi_z) \right] dz + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \left[\phi_z (V_x v' - V_y u') + 2(-w_0' + x_C u'' + y_C v'') (V_x u' + V_y v') \right] dz - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^L \left[M_x (\phi_z' u' - \phi_z u'') + M_y (\phi_z' v' - \phi_z v'') - T(u'' v' - u' v'') \right] dz + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L \phi_z'^2 \left[r_0^2 N + 2r_{0y} M_x - 2r_{0x} M_y + r_{0\omega} M_\omega \right] dz + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^L \frac{EM_z}{GI_t} \varphi'_z \left[u'' (H_y + 2x_C I_y - 2y_C I_{xy}) - v'' (H_x + x_C I_{xy} - y_C I_x) \right] dz + \\
 & + \int_0^L \frac{EM_z}{GI_t} \varphi'_z \left[\varphi''_z H_\omega + w_0' I_0 \right] dz + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \beta_x [u - (y_H - y_C) \varphi_z]^2 + \beta_y [v - (x_H - x_C) \varphi_z]^2 + \beta_\varphi \varphi_z^2 \right\} dz - \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^L u' v' \left[f_y (e_x - x_C) + f_x (e_y - y_C) \right] dz - \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^L v' \varphi_z [f_z (e_x - x_C)] dz + \frac{1}{2} \int_0^L u' \varphi_z [f_z (e_y - y_C)] dz - \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^L v'^2 [f_y (e_y - y_C)] dz - \frac{1}{2} \int_0^L u'^2 [f_x (e_x - x_C)] dz - \\
 & - \frac{1}{2} \int_0^L \varphi_z^2 [f_x (e_x - x_C) + f_y (e_y - y_C)] dz + \int_0^L \varphi'_z (v' \omega f_y + u' \omega f_x) dz
 \end{aligned}$$

Por simplicidade, omitiram-se os índices c e G na equação acima. Os deslocamentos u e v ; os momentos de torção T e M_z ; e as propriedades geométricas I_t , I_ω , I_0 , H_ω , r_0 e $r_{0\omega}$ são tomados em relação ao centro de torção. Os deslocamentos w_0 ; as coordenadas do centro de torção x_C e y_C ; os momentos fletores M_x e M_y ; e as propriedades geométricas I_x , I_y , I_{xy} , H_x , H_y , r_{0x} e r_{0y} são tomados em relação ao centro de gravidade.