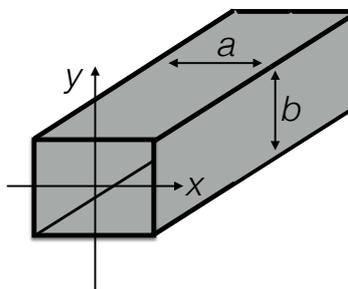


2ª Lista de Exercícios – Eletromagnetismo 1 – 2o/2016

Entrega: 31/08/2016

2.1 — Um guia de ondas retangular é um tubo muito longo, cuja seção é um retângulo de lados a e b , como indicado na figura abaixo. Há vacuo no interior do tubo.



- a) Suponha que as paredes inferior e superior (em $y = -b/2$ e $y = +b/2$, respectivamente) são ambas sujeitas a um potencial elétrico $\varphi_0 \sin(2\pi x/a)$; e que nas paredes esquerda e direita (em $x = -a/2$ e $x = +a/2$, respectivamente) o potencial vale $\varphi_0 \sin(2\pi y/b)$. Calcule o potencial elétrico no interior do tubo ($-a/2 \leq x \leq a/2$, $-b/2 \leq y \leq b/2$).
- b) Agora suponha que a parede inferior (em $y = -b/2$) é mantida a um potencial constante, φ_0 , enquanto as outras três paredes (esquerda, superior e direita) são mantidas a um potencial igual a zero. Calcule o potencial elétrico no interior do tubo neste caso. [Dica: comece encontrando uma fórmula geral para o caso de um potencial $\varphi(x)$ na parede inferior. Daí, calcule o potencial no caso $\varphi(x) = \varphi_0$.]

2.2 — Uma caixa cúbica de lado a tem aplicado, em todas as suas faces, um potencial φ_0 . Encontre o potencial elétrico dentro desse cubo.

2.3 — Em sala de aula foi dito que a expansão multipolar e os polinômios de Legendre podem ser obtidos através da expansão, em série de Taylor, de:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

Denotando $r = |\vec{x}|$, $r' = |\vec{x}'|$ e $\cos \theta = \hat{x} \cdot \hat{x}'$, podemos tomar, por exemplo, $r' \ll r$ e expandir essa expressão em uma série de Taylor para r'/r .

- a) Mostre que essa expansão leva a:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta),$$

onde $P_{\ell}(\cos \theta)$ são certos polinômios de $\cos \theta$

- b) Mostre para $\ell = 0, 1$ e 2 que esses polinômios são, de fato, os polinômios de Legendre.
- c) Qual deve ser a expansão em série de Taylor de $1/R$ que devemos adotar no caso em que $r' \gg r$?

2.4 — Uma casca esférica de raio R é submetida a um potencial $\varphi(\theta) = \varphi_0 \sin 2\theta$. Calcule (a) o potencial dentro e fora, assim como (b) a densidade de cargas superficiais dessa casca esférica. Se você obtiver uma soma de termos, pode parar de calcular quando chegar no segundo termo não-trivial.

2.5 — Uma casca esférica de raio R é feita da união de duas “calotas”, ou hemisférios – vamos chamá-los de Norte e Sul. Suponha que o hemisfério Norte possui uma densidade de carga superficial σ_0 , e o hemisfério Sul, a carga oposta, $-\sigma_0$. Calcule o potencial dentro e fora até o 4º termo da expansão multipolar (ou seja, até $\ell = 4$).

2.6 — Calcule o momento de dipolo elétrico dos dois hemisférios com cargas opostas do problema 2.5. Mostre que o campo gerado por esse dipolo coincide com o termo $\ell = 1$ da solução encontrada naquele problema.

2.7 — Calcule o monopolo ($\ell = 0$), dipolo ($\ell = 1$) e quadrupolo ($\ell = 2$) de uma densidade de cargas dada por $\rho(r, \theta) = \rho_0 e^{-r/R} \cos^2 \theta$, onde R é alguma constante com dimensão de distância. [Atenção: nesse problema você deve assumir que está medindo o campo numa região distante da origem ($r \gg R$).]