

Matemática Financeira 2 – Capitalização composta

Prof. Dr. Daphnis Theodoro da Silva Jr.

Regime de capitalização Composta

- No regime de capitalização simples somente o capital aplicado, ou principal, rende juros.
- No regime de capitalização composta, após cada período, os juros são incorporados ao capital proporcionando juros sobre juros

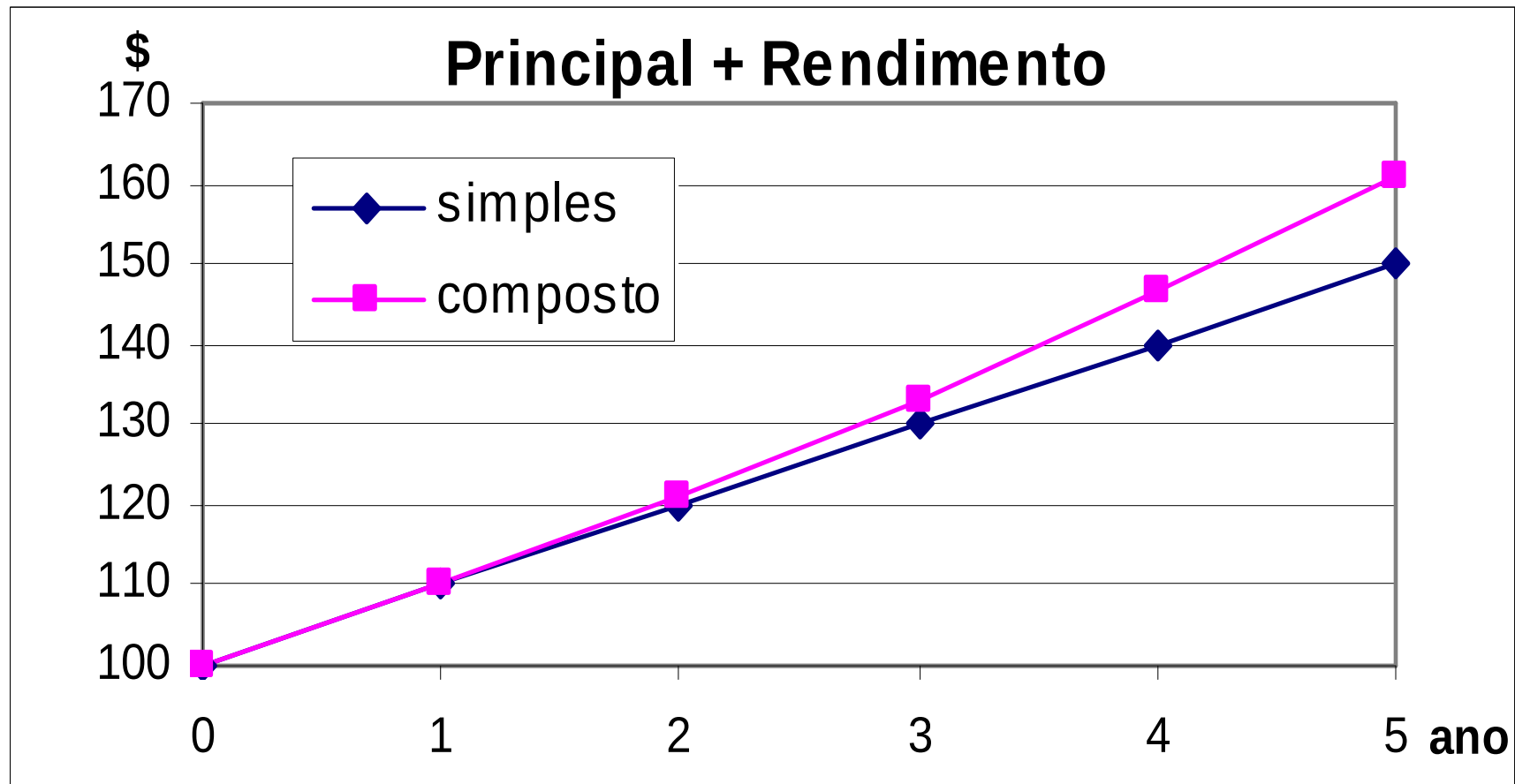
Comparação do crescimento do capital

\$ 100 aplicados à taxa de 10% ao ano

Final do Ano	Juros Simples		Juros Compostos	
	Montante Simples	Total	Montante Composto	Total
1	$100 + 0,1 \times 100 =$	110	$100 + 0,1 \times 100 =$	110,00
2	$110 + 0,1 \times 100 =$	120	$110 + 0,1 \times 110 =$	121,00
3	$120 + 0,1 \times 100 =$	130	$121 + 0,1 \times 121 =$	133,10
4	$130 + 0,1 \times 100 =$	140	$133,1 + 0,1 \times 133,1 =$	146,41
5	$140 + 0,1 \times 100 =$	150	$146,41 + 0,1 \times 146,41 =$	161,05

Comparação do crescimento do capital

\$ 100 aplicados à taxa de 10% ao ano



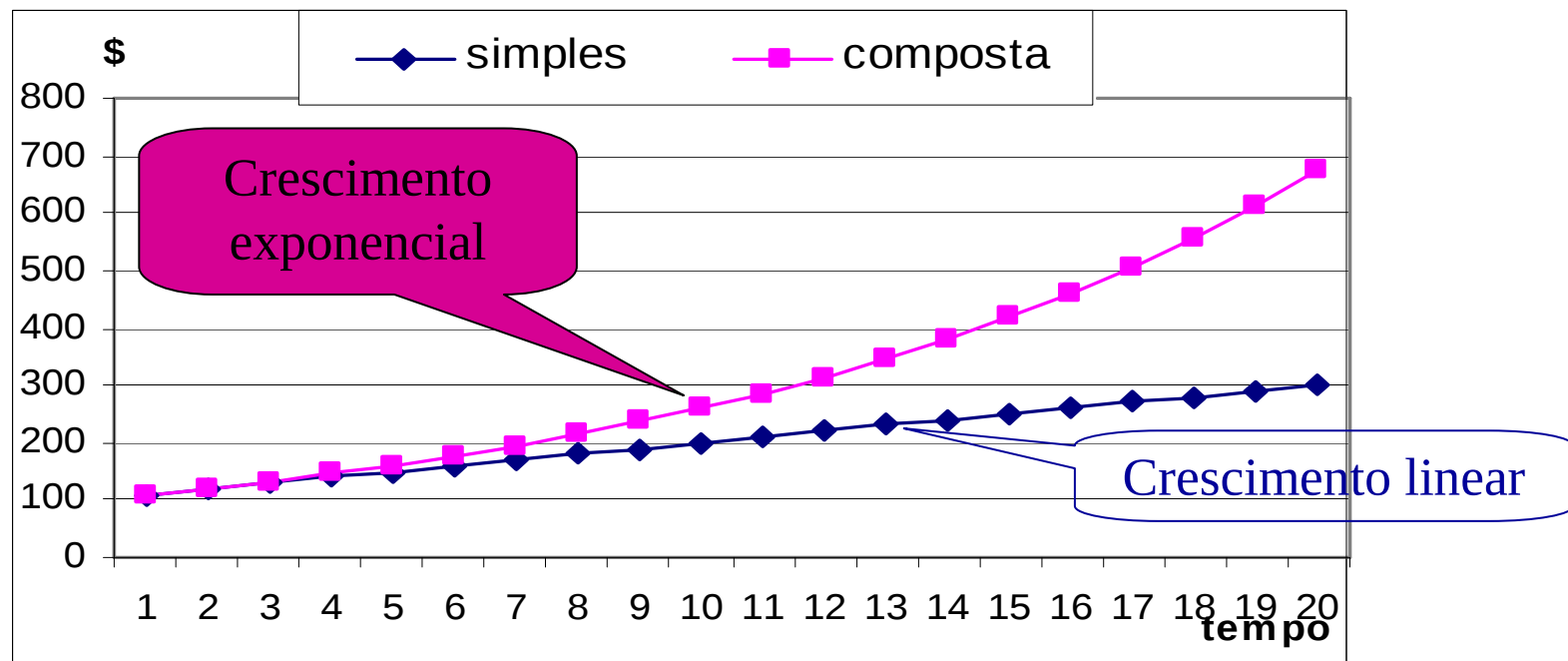
Capitalizações Simples x Composta

Simple

$$F = P(1 + n.i)$$

Composta

$$F = P(1 + i)^n$$



Valores calculados para $P = 100$ e $i = 10\%$ ao período

Regime de capitalização Composta

- Os juros relativos a um determinado período são gerados pelo capital existente no final do período anterior (capital inicial + juros acumulados)
- São formados na unidade de tempo expressa pela taxa i
 - no 1º intervalo $\Rightarrow j_1 = P.i$ e $F_1 = P + j_1 = P(1 + i)$
 - no 2º intervalo $\Rightarrow j_2 = F_1.i$ e $F_2 = F_1 + j_2 = P(1 + i)^2$
 - no 3º intervalo $\Rightarrow j_3 = F_2.i$ e $F_3 = F_2 + j_3 = P(1 + i)^3$
 - no n° intervalo $\Rightarrow j_n = F_{n-1}.i$ e $F_n = F_{n-1} + j_n = P(1 + i)^n$

Capitalização Composta

$$FV = PV(1+i)^n$$

de onde sai :

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

Capitalização Composta

$$FV = PV(1+i)^n$$

para se calcular o i a partir dos demais :

$$\frac{FV}{PV} = (1+i)^n \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{FV}{PV} \right)^{\frac{1}{n}} = (1+i)^{n \cdot \frac{1}{n}}$$

$$\left(\frac{FV}{PV} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 = i \quad \Leftrightarrow \quad i = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1$$

Capitalização Composta

$$FV = PV(1+i)^n$$

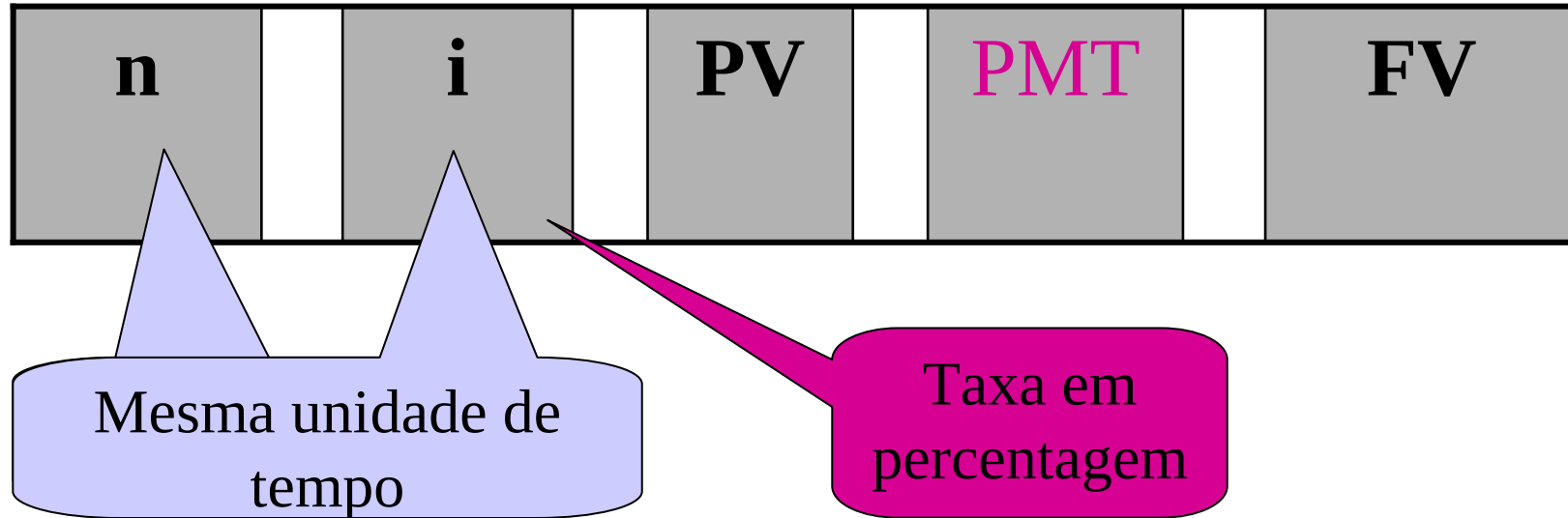
para se calcular o n a partir dos demais :

$$\frac{FV}{PV} = (1+i)^n \Rightarrow \text{tomando - se logaritmos :}$$

$$\ln\left(\frac{FV}{PV}\right) = \ln(1+i)^n \Rightarrow (\ln FV - \ln PV) = n \cdot \ln(1+i)$$

$$n = \frac{\ln FV - \ln PV}{\ln(1+i)}$$

Capitalização Composta com HP 12C



Como a fórmula tem 4 componentes

$$FV = PV(1+i)^n$$

dispondo de 3 a HP calcula o quarto

HP 12C exercícios

Qual é o montante produzido por um capital de \$ 10.000,00 que ficou aplicado durante um ano e dois meses à taxa de 2,5% a.m. de juros compostos?

HP 12C exercícios

Um investidor aplicou \$ 320.000,00 em títulos que lhe proporcionarão um resgate de \$ 397.535,00 após 90 dias de aplicação. A que taxa mensal de juros compostos está aplicado o seu capital?

HP 12C exercícios

Uma pessoa aplicou \$ 50.000,00 e retirou \$ 88.578,05 alguns meses depois. Sabendo que a taxa de juros é de 10% a.m., calcule quantos meses o dinheiro ficou aplicado.

HP 12C exercícios

Qual é o capital que, aplicado a 1% a.m., a juros compostos durante 12 meses, gera um montante de \$ 7.842,00?

HP 12C exercícios

Qual é o capital que, aplicado a 2% a.m., a juros compostos durante 6 meses, gera juros no total de \$ 7.842,00?

HP 12C exercícios

Calcule o item indicado por ? na tabela

n	i	PV	FV	Resposta
?	5% a.a.	100	200	
50	?	100	164,463	
7	2% a.d.	?	150	
500	1% a.s.	2	?	

Taxas equivalentes – Juros Compostos

Duas taxas de juros são equivalentes quando aplicadas ao mesmo capital, pelo mesmo período, produzem o mesmo montante.

Ex.: 213,84% ao ano e 10% ao mês são equivalentes

Sabendo-se que: $M = C(1 + i)^n$

Aplicação de 1 ano

$$M = C(1 + i_a)^1$$

Aplicação de 12 meses

$$M = C(1 + i_m)^{12}$$

Como os montantes têm que ser iguais, temos:

$$C(1 + i_a)^1 = C(1 + i_m)^{12}$$

$$(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12}$$

Taxas equivalentes – Juros Compostos

$$(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12}$$

Se tenho a taxa mensal e quero achar a taxa anual:

$$(1 + i_a)^1 = (1 + 0,1)^{12}$$

$$1 + i_a = (1 + 0,1)^{12}$$

$$i_a = (1 + 0,1)^{12} - 1$$

$$i_a = (1 + 0,1)^{12} - 1$$

$$i_a = 3,1384 - 1$$

$$i_a = 2,1384$$

$$i_a = 213,84 \%$$

Taxas equivalentes – Juros Compostos

$$(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12}$$

Se tenho a taxa anual e quero achar a taxa mensal :

$$(1 + 2,1384)^1 = (1 + i_m)^{12}$$

$$(1 + 2,1384)^{1 \times 1/12} = (1 + i_m)^{12 \times 1/12}$$

$$(1 + 2,1384)^{1/12} = 1 + i_m$$

$$(1 + 2,1384)^{1/12} - 1 = i_m$$

$$1,1 - 1 = i_m$$

$$0,1 = i_m$$

$$i_m = 10 \%$$

Taxas equivalentes – Juros Compostos

Portanto a fórmula que encontra a taxa equivalente é:

$$i_{\text{maior}} = (1 + i_{\text{menor}})^Z - 1$$

onde Z é dado por:

$$\text{período da taxa}_{\text{maior}} = Z \cdot \text{Período da taxa}_{\text{menor}}$$

ou

$$i_{\text{menor}} = (1 + i_{\text{maior}})^{1/Z} - 1$$

Taxas equivalentes – Exercícios

Qual é a taxa de juros compostos mensal equivalente a 25% ao ano?

Taxas equivalentes – Exercícios

Qual é a taxa de juros compostos trimestral equivalente a 40% ao ano?

Taxas equivalentes – Exercícios

Qual é a taxa de juros compostos anual equivalente a 4% ao bimestre?

Taxas equivalentes – Exercícios

Qual é a taxa de juros compostos semestral equivalente a 5% ao mês?

Taxas equivalentes – Exercícios

Qual é a taxa de juros compostos anual equivalente a 0,05% ao dia? (ano de 360 dias)

Taxas equivalentes – Exercícios

Qual é a taxa de juros compostos semanal equivalente a 50% ao ano? (ano de 56 semanas)

Taxas equivalentes – Exercícios

Qual é a taxa de juros compostos decenal equivalente a 1% ao mês?

Taxa nominal de juros

É a taxa de juros em que a unidade referencial de seu tempo não coincide com a unidade de tempo de seus períodos de capitalização.

Geralmente as taxas nominais são expressas em %/ano.

IMPORTANTE – Em cálculos de juros compostos somente podem ser utilizadas taxas efetivas.

Taxa nominal de juros - exemplos

Dado Taxa nominal	Obtida Taxa efetiva
12% a.a. capitalizados mensalmente	$12\% / 12 \text{ m} = 1\% \text{ a.m.}$
10% a.a. capitalizados semestralmente	$10\% / 2\text{sem} = 5\% \text{ a. sem.}$
40% a.a. capitalizados trimestralmente	$40\% / 4 \text{ trim} = 10\% \text{ a. trim.}$
36% a.a. capitalizados diariamente (ano de 360 dias)	$36\% / 360 \text{ dias} = 0,1\% \text{ a. dia}$

Taxa nominal de juros - exercícios

Identifique é a taxa efetiva mensal equivalente a uma taxa nominal de 12% a.a.

Identifique é a taxa efetiva mensal equivalente a uma taxa nominal de 24% ao trimestre.

Capitalização Composta

Fixação $\Leftrightarrow$ Para nota

Fazer a lista de exercícios sobre juros compostos para entrega no início da próxima aula.