

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Física II - 4302112 Lista de exercícios

(Quando necessário utilize $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Oscilador Amortecido

(*)12. Um pêndulo com fio de comprimento $1,00 \text{ m}$ é abandonado do repouso de um ângulo inicial de 15° . Após 1000 s , sua amplitude é reduzida para $5,5^\circ$. Qual é o valor da constante de amortecimento γ ?

R: $\gamma = 0,002 \text{ s}^{-1}$.

(*)13. Um ovo de $50,0 \text{ g}$ fervido durante muito tempo está preso na extremidade de uma mola cuja constante

é $k = 25,0 \text{ N/m}$. Seu deslocamento inicial é igual a $0,300 \text{ m}$. Uma força de amortecimento $F_x = -b_{vx}$ atua sobre o ovo e a amplitude do movimento diminui para $0,100 \text{ m}$ em $5,0 \text{ s}$. Calcule o módulo da constante de amortecimento b .

(**)14. Um oscilador harmônico amortecido consiste em um bloco ($m = 2 \text{ kg}$), uma mola ($k = 10,0 \text{ N/m}$) e uma força de amortecimento $F = -\rho v$. Inicialmente, ele oscila com amplitude de $25,0 \text{ cm}$; devido ao amortecimento, a amplitude é reduzida para três quartos do seu valor inicial, quando são completadas quatro oscilações.

- (a) Qual o valor de ρ ?
 (b) Quanta energia foi perdida? durante essas oscilações?

R: (a) $\rho = 0,102 \text{ kg/s}$ e (b) $\Delta E = 0,136 \text{ J}$.

(***)15. Em um sistema oscilatório com uma força de atrito temos:

$$F_{\text{mola}} + F_{\text{atrito}} = -kx - \rho \frac{dx}{dt},$$

onde k é a constante da mola e ρ é a constante de amortecimento. Logo, a equação de movimento fica:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + \rho \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Considere o oscilador como estando no regime subcrítico e resolva a equação diferencial para as condições iniciais $x(0) = 0$ e $v(0) = v_0$.

R: $x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\frac{\rho t}{2M}} \sin(\omega t)$, com $\omega = \sqrt{\frac{k}{M} - \frac{\rho^2}{4M^2}}$.

(**)16. (Poli 2007) Um corpo de massa $m = 40 \text{ g}$ está preso a uma mola de constante elástica $k = 100 \text{ N/m}$. Este sistema é colocado para oscilar e depois imerso num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é $\rho = 0,08 \text{ kg/s}$.

- (a) Determine a frequência natural do sistema.
 (b) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento, explicitando os valores numéricos dos coeficientes (indicando suas unidades).
 (c) Qual é o regime de oscilação? (justifique)
 (d) Qual é a frequência de oscilação?

R: (a) $\omega_0 = 50 \text{ rad/s}$, (b) $\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ com $\gamma = 2 \text{ s}^{-1}$ e $\omega_0^2 = 2500 \text{ rad}^2/\text{s}^2$, (c) Regime Subcrítico pois, $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$ e (d) $\omega = \sqrt{2499} \text{ rad/s}$.

(***)17. (Poli 2006) Um corpo de massa $m = 1,0 \text{ kg}$ oscila livremente, quando preso a uma mola, com

frequência angular $\omega_0 = 2,0 \text{ rad/s}$. Posteriormente este conjunto é colocado num líquido, cujo coeficiente de resistência viscosa é $\rho = 2\sqrt{3} \text{ kg/s}$.

- (a) Escreva a equação diferencial do movimento harmônico amortecido, e a sua solução com as condições iniciais $x(0) = 0,50 \text{ m}$ e $v(0) = 0$.
 (b) Determine o tempo necessário T para que a amplitude do movimento diminua de um fator $1/e$ em relação ao valor inicial.

R: (a) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\sqrt{3} \frac{dx}{dt} + 4x = 0$, $x(t) = e^{-\sqrt{3}t} \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ m}$ e (b) $T = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ s}$.

(**)18. Considere uma situação em que você está examinando as características do sistema de suspensão de um automóvel. A suspensão “cede” 10 cm , quando o peso do automóvel inteiro é colocado sobre ela. Além disso, a amplitude da oscilação diminui 50% durante uma oscilação completa. Estime os valores de k e ρ para o sistema de mola e amortecedor em uma roda, considerando que cada uma suporta 500 kg .

R: $k = 5,0 \times 10^4 \text{ N/m}$ e $\rho = 1,1 \times 10^3 \text{ kg/s}$.

(**)19. Um oscilador criticamente amortecido, partindo da posição de equilíbrio, recebe um impulso que lhe comunica uma velocidade inicial v_0 . Verifica-se que ele passa por seu deslocamento máximo, igual a $3,68 \text{ m}$, após 1 segundo.

- (a) Qual é o valor de v_0 ?
 (b) Se o oscilador tivesse um deslocamento inicial $x_0 = 2 \text{ m}$ com a mesma velocidade inicial v_0 , qual seria o valor de x no instante t ?

R: (a) $v_0 = 10 \text{ m/s}$ e (b) $x(t) = e^{-t}(2 + 12t)$.

(**)20. (Poli 2006) O gráfico de $x(t)$, mostrado na figura abaixo, representa a equação horária de um oscilador criticamente amortecido, para um sistema composto de um corpo de massa $m = 1,0 \text{ kg}$ preso a uma mola de constante elástica k e imerso em um líquido viscoso, de coeficiente de resistência viscosa ρ .

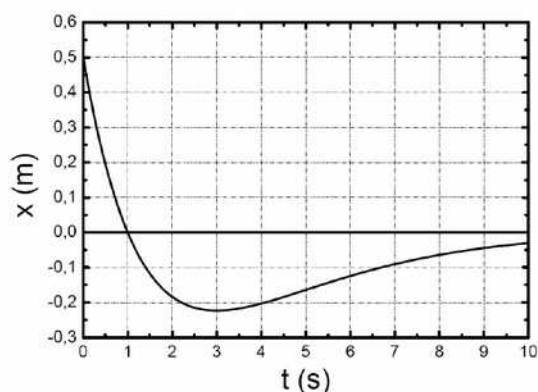
(a) Em que instante de tempo a velocidade do corpo será nula, no intervalo de tempo mostrado no gráfico?

(b) A equação horária $x(t)$ pode ser escrita como

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$$

Determine os valores de a e b da equação.

(c) Determine o coeficiente de resistência viscosa ρ e a constante elástica k da mola.



(d) Determine o valor da velocidade inicial do oscilador.

R: (a) $t = 3$ s, (b) $a = 0,5$ m e $b = 0,5$ m/s, (c) $\rho = 1$ kg/s e $\gamma = 1$ s⁻¹ e (d) $v_0 = -0,75$ m/s.

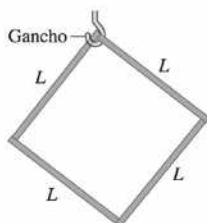
(**)21. Um corpo de massa $m = 1000$ kg cai de uma altura $H = 1$ m sobre uma plataforma de massa desprezível. Deseja-se projetar um sistema constituído por uma mola e um amortecedor sobre o qual se montará a plataforma de modo que ela fique em equilíbrio a uma distância $d = 2$ m abaixo de sua posição inicial, após o impacto. O equilíbrio deve ser atingido tão rápido quanto possível, sem oscilações.

- (a) Obtenha a constante k da mola e a constante de amortecimento ρ do amortecedor.
 (b) Obtenha a equação que descreve o movimento do bloco após entrar em contato com a plataforma.

R: (a) $k = 5 \times 10^3$ N/m e $\rho = 2\sqrt{5} \times 10^3$ kg/s e (b) $x(t) = 2(e^{-\sqrt{5}t} - 1)$ m.

Extras

(***)22. Um objeto quadrado de massa m é formado de quatro varetas finas idênticas, todas de comprimento L , amarradas juntas. Esse objeto é pendurado em um gancho pelo seu canto superior. Se ele for girado levemente para a esquerda e depois solto, em que frequência ele irá oscilar para a frente e para trás?



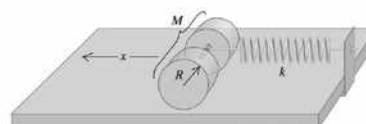
R: $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{5} \frac{g}{L}} = 0,921 \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \right)$.

(*)23. Uma mola de massa desprezível e constante $k = 400$ N/m está suspensa verticalmente, e um prato de $0,200$ kg está suspenso em sua extremidade inferior. Um açougueiro deixa cair sobre o prato, de uma altura de $0,40$ m, uma posta e carne de $2,2$ kg. A posta de carne produz uma colisão totalmente inelástica com o prato e faz o sistema executar um MHS. Calcule

- (a) a velocidade do prato de carne logo após a colisão;
 (b) a amplitude da oscilação subsequente;
 (c) o período do movimento.

R: (a) $2,6$ m/s ; (b) $0,21$ m ; (c) $0,49$ s.

(***)24. Dois cilindros homogêneos de raio R e massa total M são conectados ao longo de seu eixo comum por uma barra leve e curta, e estão em repouso sobre uma mesa horizontal. Um mola cuja constante é k possui uma extremidade presa na mesa por uma braçadeira e sua outra extremidade é ligada a um anel sem atrito no centro de massa dos cilindros, ver figura. Os cilindros são puxados para a esquerda esticando a mola até uma distância x , e a seguir são libertados. Existe entre o topo da mesa e os cilindros um atrito suficiente para fazer os cilindros rolarem sem deslizar. À medida que eles oscilam na extremidade da mola. Mostre que o movimento do centro de massa dos cilindros é um MHS, e calcule o seu período em termos de M e de k . (Sugestão: O movimento é harmônico simples quando a aceleração e a posição satisfazem $a = -\omega^2 x$ e o período é então dado por $T = 2\pi/\omega$)



R: $2\pi\sqrt{3M/2k}$.

(***)25. Muitas moléculas diatômicas são mantidas unidas por ligações covalentes que são muito mais fortes do que a interação de van der Waals. Exemplos dessas moléculas incluem H_2 , O_2 e N_2 . As experiências mostram que, em muitas dessas moléculas, a interação pode ser descrita por uma força da forma

$$F_r = A[e^{-2b(r-R_0)} - e^{-b(r-R_0)}]$$

onde A e b são constantes positivas, r é a distância entre os centros dos dois átomos e R_0 é a separação de equilíbrio. Para a molécula de hidrogênio, $A = 2,97 \times 10^{-8}$ N, $b = 1,95 \times 10^{10}$ m e $R_0 = 7,4 \times 10^{-11}$ m. Calcule a constante da força para pequenas oscilações em torno do equilíbrio. (Sugestão: utilize a série de Taylor da função e^x).