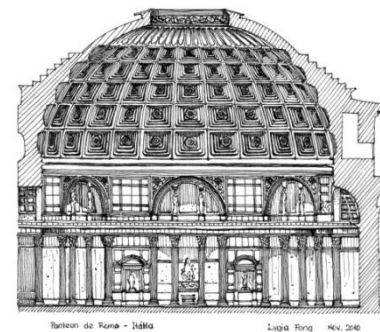


Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas

Teorema dos Esforços Virtuais



$$\underbrace{\int_{\text{estr}} \delta N u' ds + \int_{\text{estr}} \delta M_y (-w'') ds}_{\delta \tau_i^*} =$$

$$\underbrace{\int_{\text{estr}} \delta q_x u ds + \int_{\text{estr}} \delta q_z w ds + \sum_i \delta P_i U_i + \sum_j \delta R_j \hat{D}_j}_{\delta \tau_e^*}$$

Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas

Idéias básicas

- Teorema dos esforços virtuais na forma generalizada

- Deslocamentos cinematicamente admissíveis

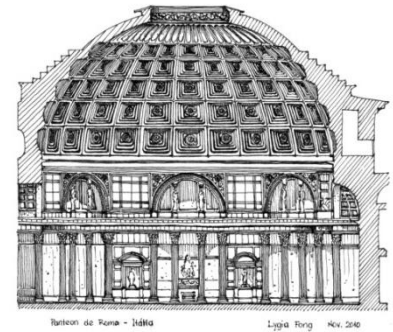
=

Deslocamentos da solução real

- Esforços virtuais

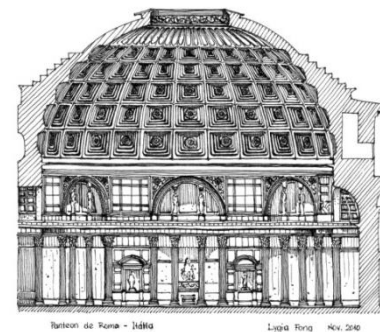
=

esforços resultantes da aplicação de um esforço virtual externo ativo, δE_j , em geral unitário, tal que a parcela do trabalho virtual externo, δT_e^* , devida à δE_j seja igual a $\delta E_j U_j$, onde U_j é o deslocamento que se deseja calcular



Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas

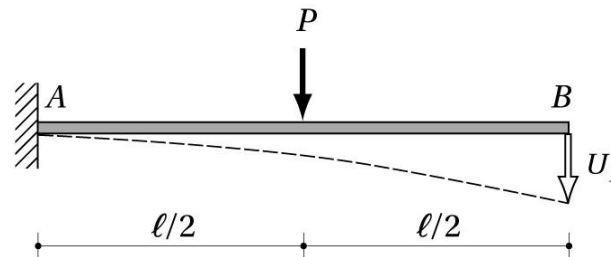
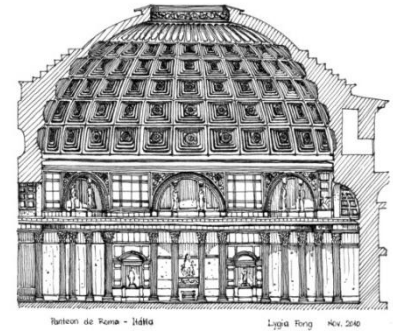
Teorema dos Esforços Virtuais



$$\underbrace{\int_{\text{estr}} \delta N u' ds + \int_{\text{estr}} \delta M_y (-w'') ds}_{\delta \tau_i^*} = \underbrace{\delta E U_1}_{{\delta \tau_e^*}}$$

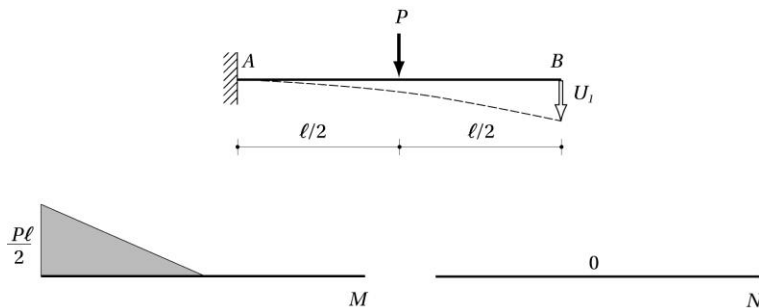
Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas

Exemplo 3.1 Calcular o deslocamento U_1 na extremidade livre B da viga engastada solicitada por força concentrada. A viga é prismática com seção transversal de momento de inércia I e é constituída de material com módulo de elasticidade E



Solução

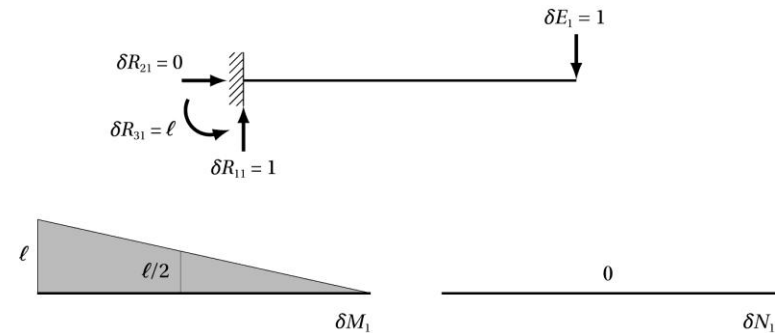
Deslocamentos e deformações reais



$$w'' = -\frac{M}{EI}$$

$$u' = \frac{N}{EA}$$

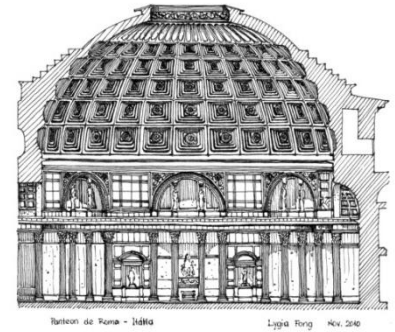
Esforços virtuais para o cálculo de U_1



Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas

Exemplo 3.1

Cálculo de U_1



$$\delta T_e^* = \delta E_1 U_1 = U_1 \qquad \delta T_i^* = \int_0^\ell \delta M_1 \frac{M}{EI} dx + \int_0^\ell \delta N_1 \frac{N}{EA} dx$$

$$\delta T_e^* = \delta T_i^*$$

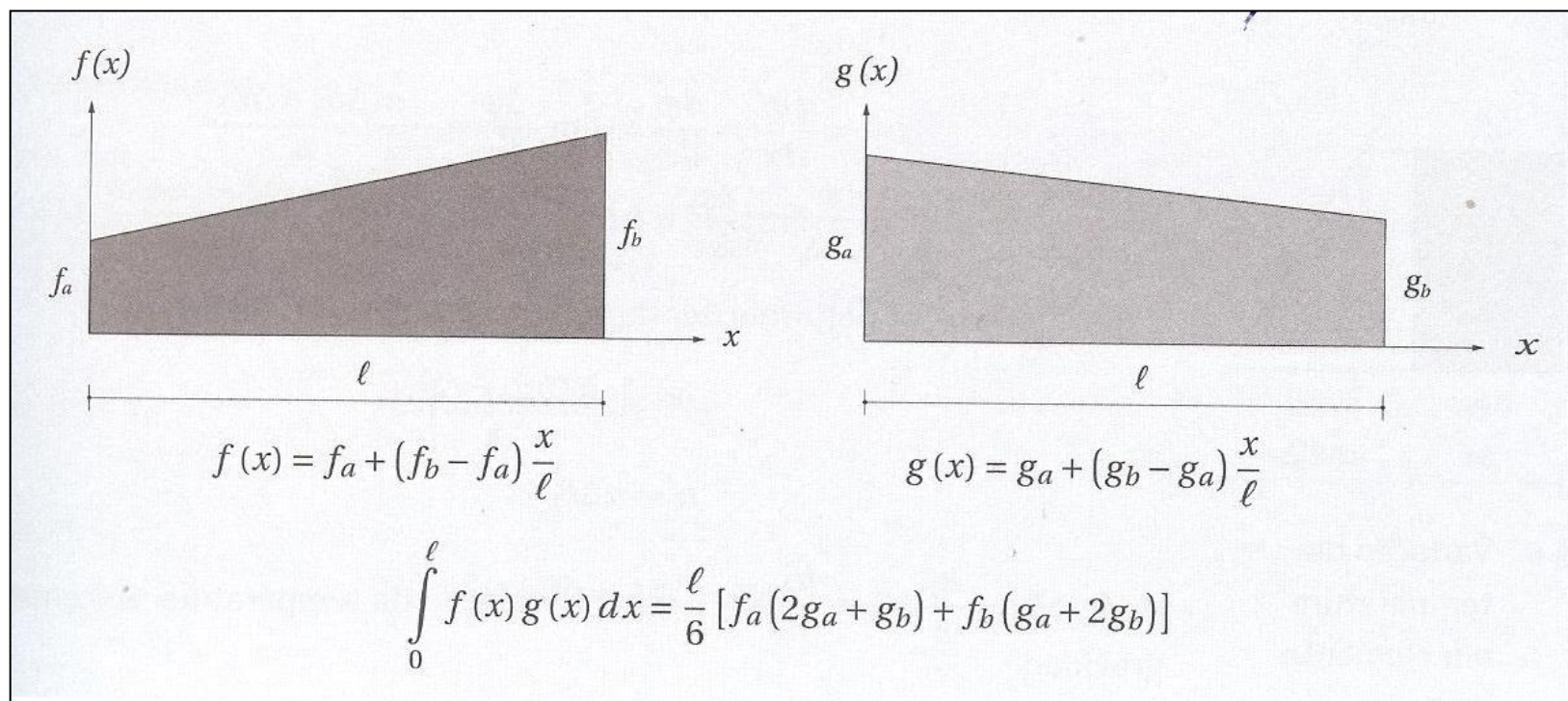
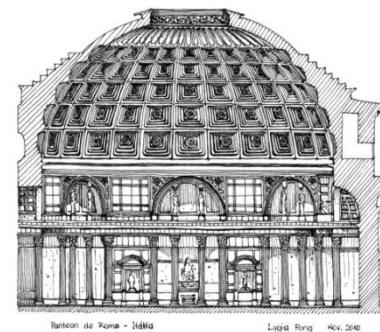
$$U_1 = \int_0^\ell \delta M_1 \frac{M}{EI} dx + \int_0^\ell \delta N_1 \frac{N}{EA} dx$$

$$\int_0^\ell \delta M_1 \frac{M}{EI} dx \frac{1}{EI} = \int_0^{\ell/2} \left(-P \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \right) (-(\ell - x)) dx = \frac{5}{48} \frac{P \ell^3}{EI} \quad \text{e} \quad \int_0^\ell \delta N \frac{N}{EA} dx = 0$$

$$U_1 = \frac{5P\ell^3}{48EI}$$

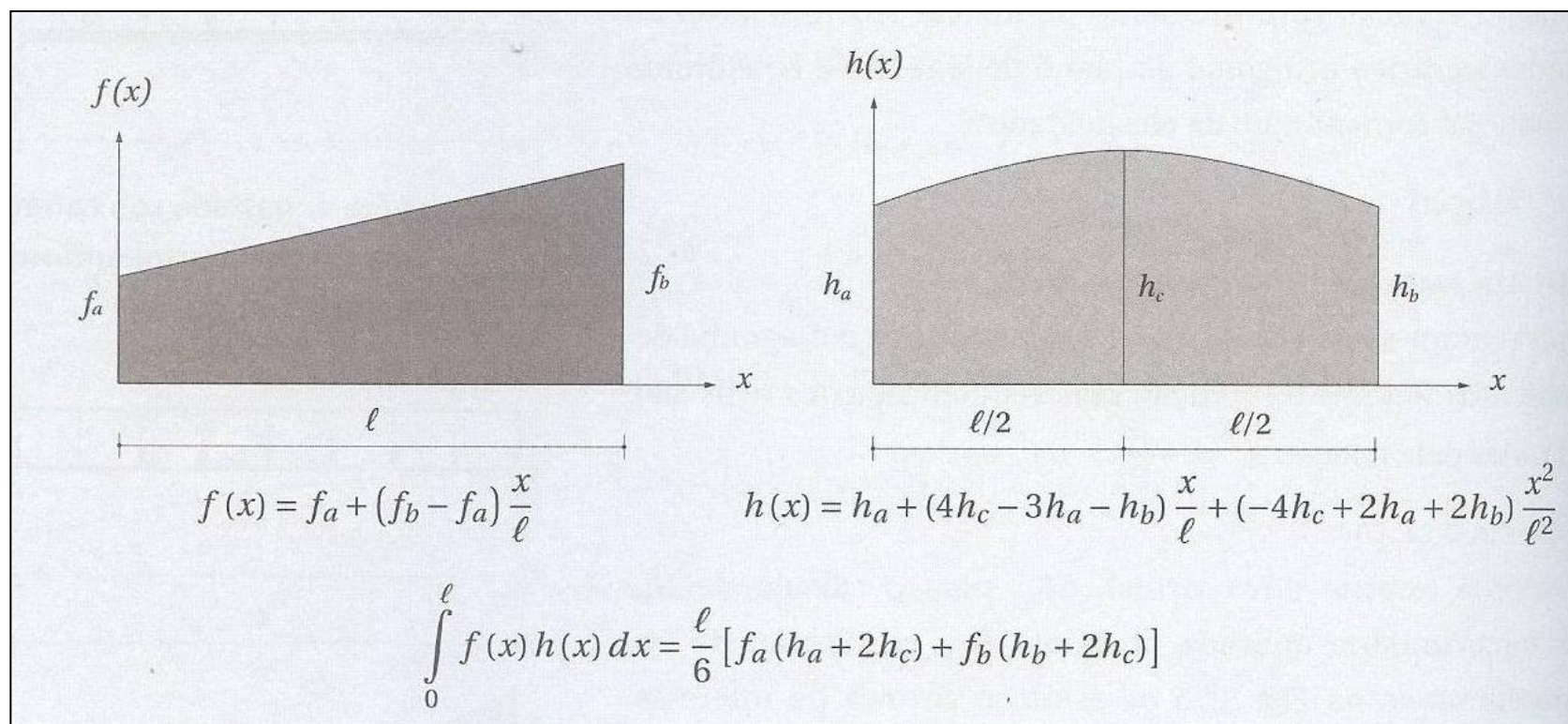
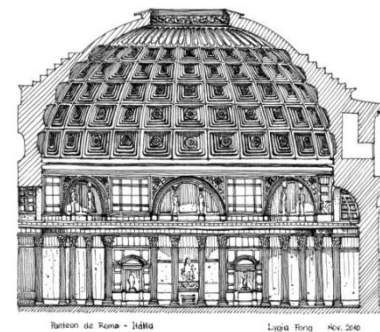
Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas

Expressão do cálculo da integral
do produto de duas funções lineares



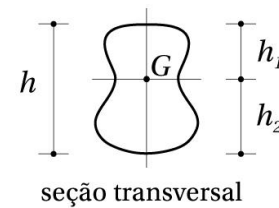
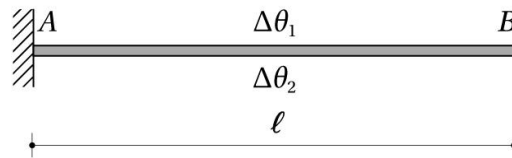
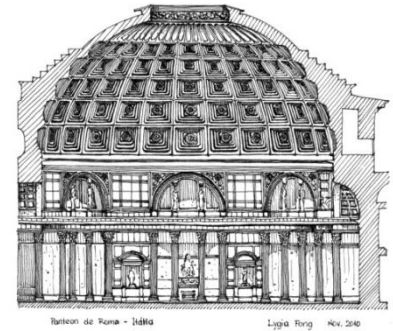
Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas

Expressão do cálculo da integral
do produto de uma função linear por uma função quadrática



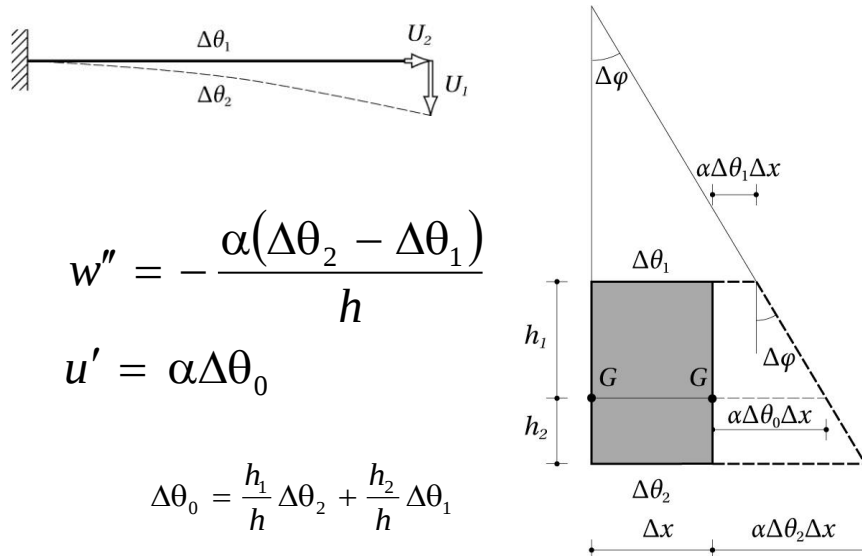
Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas

Exemplo 3.2 Calcular as componentes vertical e horizontal do deslocamento linear na extremidade livre B da viga engastada sob a ação de variação de temperatura. A viga é prismática com seção transversal simétrica em relação ao plano vertical, com área A e momento de inércia I em relação ao eixo baricêntrico ortogonal ao plano de simetria e é constituída de material com módulo de elasticidade E e coeficiente de dilatação térmica α .

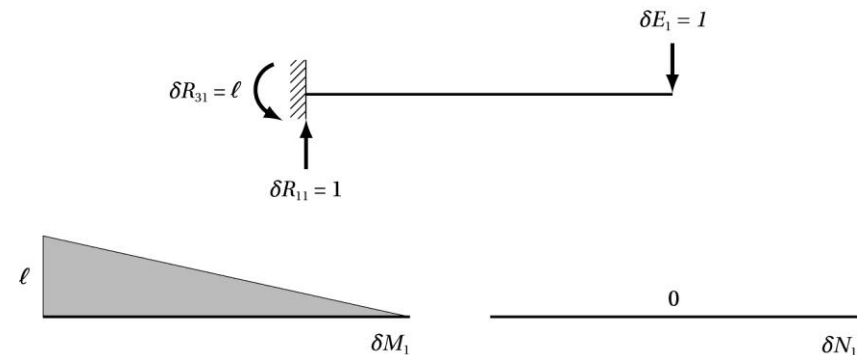


Solução

Deslocamentos e deformações reais



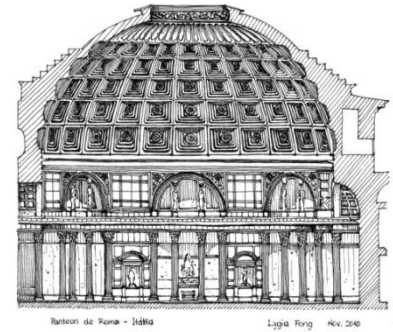
Esforços virtuais para o cálculo de U_1



Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas

Exemplo 3.2

Cálculo de U_1



$$\delta T_e^* = \delta E_1 U_1 = U_1$$

$$\delta T_i^* = \int_0^\ell \delta M_1 (-w'') dx + \int_0^\ell \delta N_1 u' dx = \int_0^\ell \delta M_1 \frac{\alpha(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1)}{h} dx + \int_0^\ell \delta N_1 \alpha \Delta\theta_0 dx$$

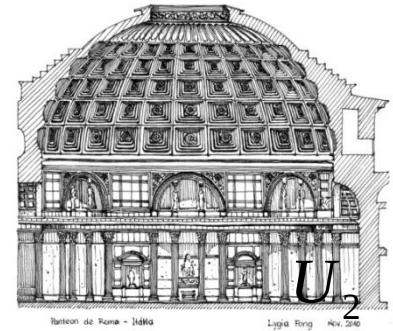
$$\delta T_e^* = \delta T_i^*$$

$$U_1 = \int_0^\ell \delta M_1 \frac{\alpha(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1)}{h} dx + \int_0^\ell \delta N_1 \alpha \Delta\theta_0 dx$$

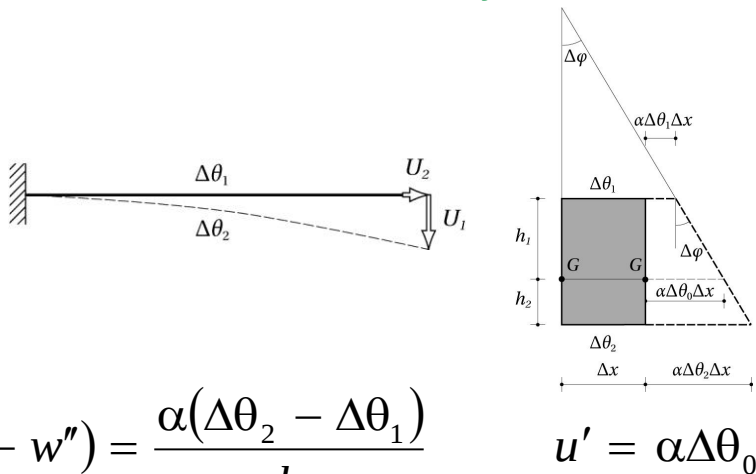
$$U_1 = \frac{1}{2} \alpha (\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2) \frac{\ell^2}{h}$$

Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas

Cálculo de U_2



Deslocamentos e deformações reais

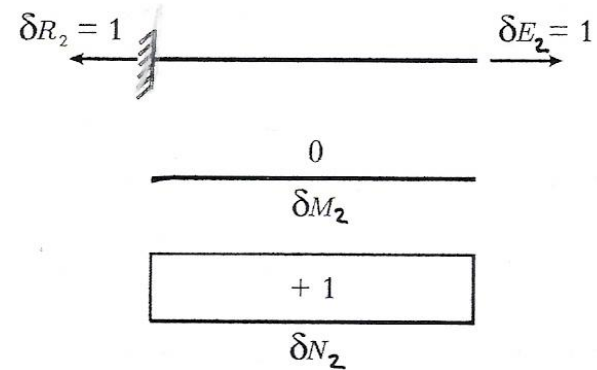


$$(-w'') = \frac{\alpha(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1)}{h}$$

$$u' = \alpha \Delta \theta_0$$

$$\delta T_e^* = \delta E_2 U_2 = U_2$$

Esforços virtuais para o cálculo de

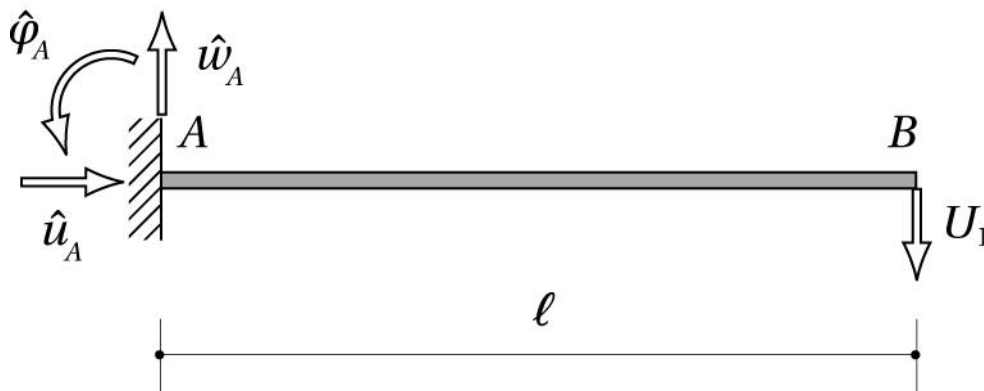
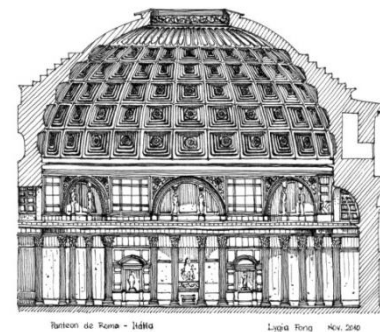


$$\delta \mathcal{T}_i^* = \int_0^\ell \delta M_2 (-w'') dx + \int_0^\ell \delta N_2 u' dx = \int_0^\ell \delta M_2 \frac{\alpha(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1)}{h} dx + \int_0^\ell \delta N_2 \alpha \Delta\theta_0 dx$$

$$\delta \mathcal{T}_e^* = \delta \mathcal{T}_i^* \quad \Rightarrow \quad U_2 = \int_0^\ell \delta M_2 \frac{\alpha(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1)}{h} dx + \int_0^\ell \delta N_2(\alpha\Delta\theta_0) dx \Rightarrow U_2 = \alpha\Delta\theta_0\ell$$

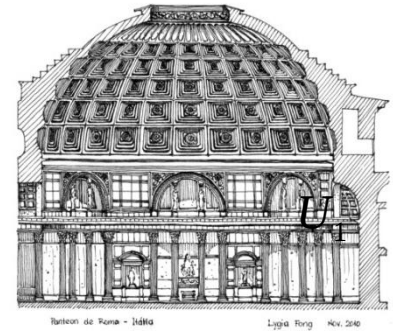
Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas

Exemplo 3.3 Calcular o deslocamento U_1 na extremidade livre da viga engastada solicitada pelos recalques de apoio.



Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas

Solução



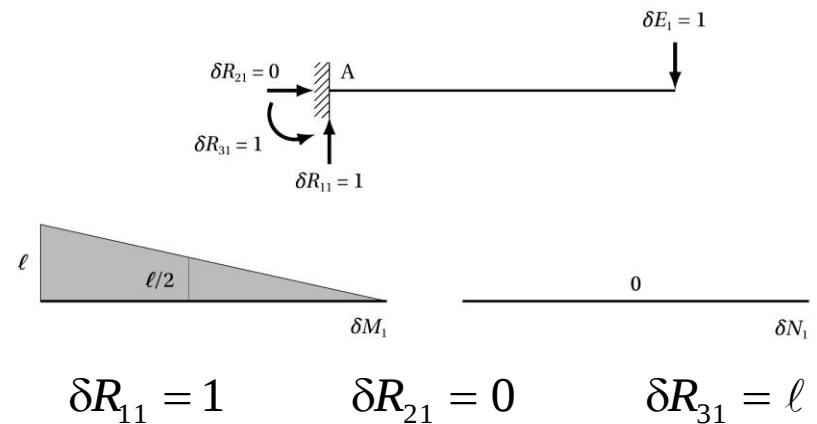
Deslocamentos e deformações reais



$$\hat{D}_1 = \hat{w}_A \quad \hat{D}_2 = \hat{u}_A \quad \hat{D}_3 = \hat{\phi}_A$$

$$w'' = -\frac{M}{EI} = 0 \quad u' = \frac{N}{EA} = 0$$

Esforços virtuais para o cálculo de

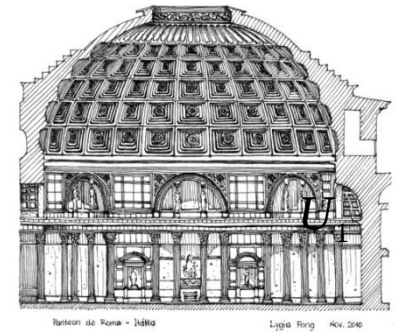


$$\delta \mathcal{T}_e^* = \delta E_1 U_1 + \delta R_{11} \hat{D}_1 + \delta R_{21} \hat{D}_2 + \delta R_{31} \hat{D}_3$$

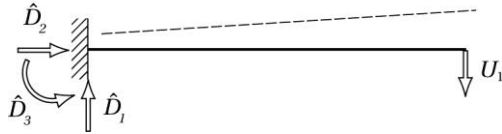
$$\delta \mathcal{T}_i^* = \int_0^\ell \delta M (-w'') dx + \int_0^\ell \delta N u' dx = 0$$

Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas

Solução



Deslocamentos e deformações reais



$$\hat{D}_1 = \hat{w}_A \quad \hat{D}_2 = \hat{u}_A \quad \hat{D}_3 = \hat{\phi}_A$$

$$w'' = -\frac{M}{EI} = 0 \quad u' = \frac{N}{EA} = 0$$

$$\delta T_e^* = \delta E_1 U_1 + \delta R_{11} \hat{D}_1 + \delta R_{21} \hat{D}_2 + \delta R_{31} \hat{D}_3$$

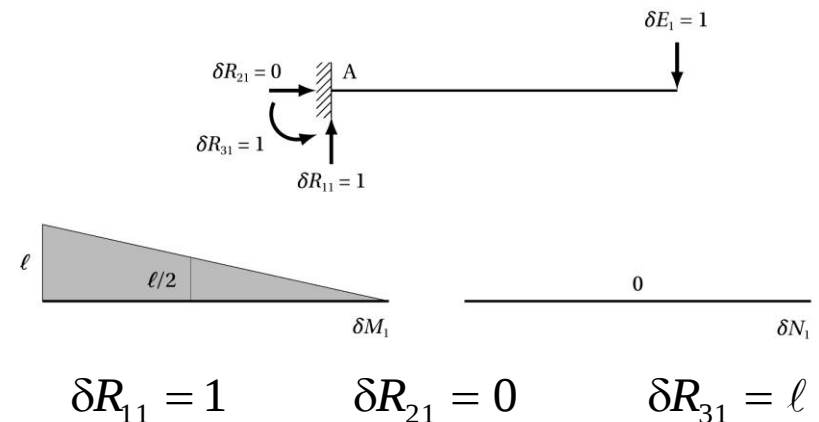
$$\delta T_i^* = \int_0^\ell \delta M (-w'') dx + \int_0^\ell \delta N u' dx = 0$$

$$\delta T_e^* = \delta T_i^* \implies U_1 = -(\delta R_{11} \hat{D}_1 + \delta R_{21} \hat{D}_2 + \delta R_{31} \hat{D}_3) = -\sum_{k=1}^3 \delta R_{k1} \hat{D}_k$$

$$U_1 = -\hat{w}_A - \hat{\phi}_A \ell$$

$$U_j = -\sum_k \delta R_{kj} \hat{D}_k$$

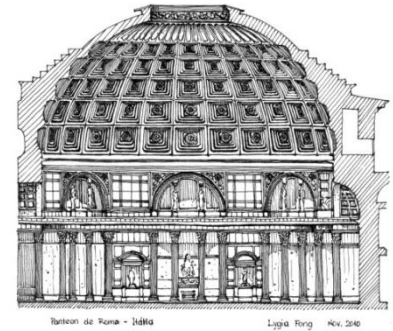
Esforços virtuais para o cálculo de



Cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas

Expressões derivadas do teorema dos esforços virtuais
Para o cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas

Estruturas planas



$$\delta E_j U_j + \sum_k \delta R_{kj} \hat{D}_k = \int_{estr} \delta M_j \frac{M}{EI} ds + \int_{estr} \delta N_j \frac{N}{EA} ds + \sum_{\ell} \delta S_{\ell j} \frac{S_{\ell}}{k_{\ell}} \\ \int_{estr} \delta M_j \frac{\alpha(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1)}{h} ds + \int_{estr} \delta N_j \alpha \Delta\theta_0 ds$$

Estruturas no espaço

$$\delta E_j U_j + \sum_k \delta R_{kj} \hat{D}_k = \int_{estr} \delta M_j \frac{M}{EI} ds + \int_{estr} \delta N_j \frac{N}{EA} ds + \int_{estr} \delta T_j \frac{T}{GI_T} ds + \\ \sum_{\ell} \delta S_{\ell j} \frac{S_{\ell}}{k_{\ell}} + \int_{estr} \delta M_j \frac{\alpha(\Delta\theta_2 - \Delta\theta_1)}{h} ds + \int_{estr} \delta N_j \alpha \Delta\theta_0 ds$$