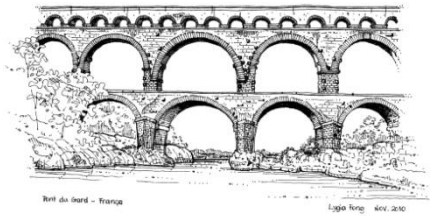
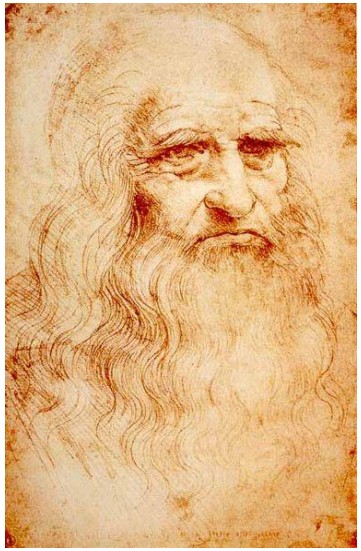
Teoremas dos Trabalhos Virtuais

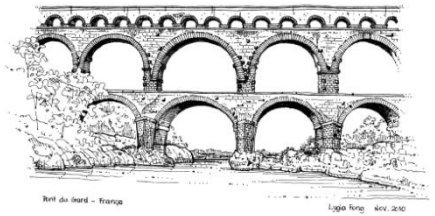
Introdução



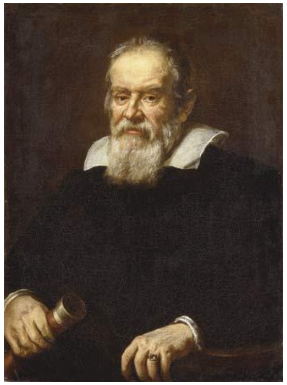


- Leonardo da Vinci (1452-1519),
- artista, engenheiro e cientista italiano
- Aplicou noções do princípio dos deslocamentos virtuais para analisar o equilíbrio de sistemas de polias e alavancas

Teoremas dos Trabalhos Virtuais



Introdução



- Galileo Galilei (1564-1642).
- Matemático, astrônomo e filósofo italiano,
- Em 1594, escreveu o trabalho “Della Scienza Meccanica”
- Nesse tratado, resolveu vários problemas de estática utilizando o princípio dos deslocamentos virtuais
- Em seu livro “Due Nuove Scienze”, apresentou o problema de equilíbrio em plano inclinado.



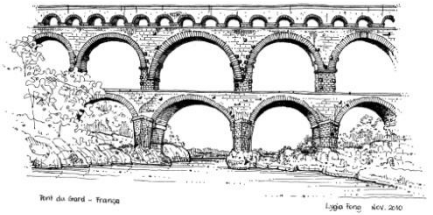
Anteriores aos trabalhos de Newton (1643-1727)



Viga engastada de Galileo

Teoremas dos Trabalhos Virtuais

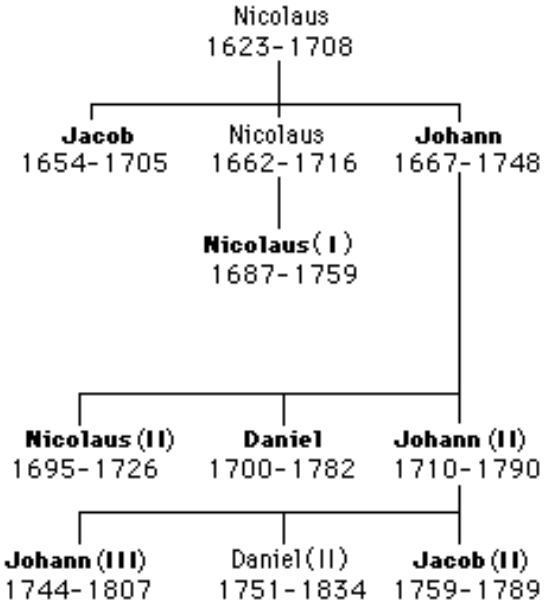
Introdução

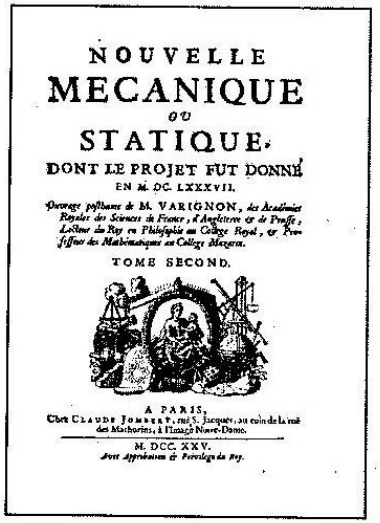


- Credita-se a Jean Bernoulli I (1667-1748) a formulação do princípio dos deslocamentos virtuais em carta dirigida a Pierre Varignon (1654-1722)
- Foi considerado o maior matemático de seu tempo



The Bernoulli family





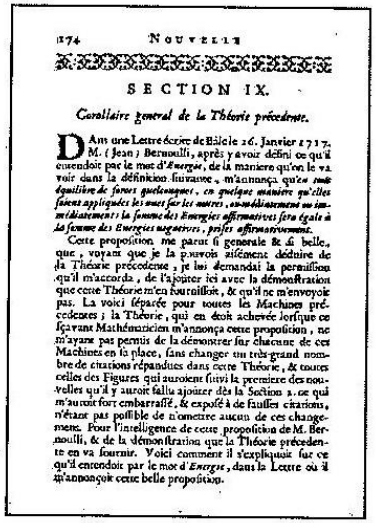
NOUVELLE
MECANIQUE
OU
STATIQUE.
DONT LE PROJET FUT DONNÉ
EN M. DC. LXXXVII.

Ouvrage posthume de M. VARIGNON, des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse, Lecteur du Roy en Philosophie au Collège Royal, & Professeur des Mathematiques au Collège Mazarin.

TOME SECOND.

A PARIS,
Chez CLAUDE JOMBERT, rue S. Jacques, au coin de la rue des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XXV.
Avec Approbation & Privilege du Roy.



174 NOUVELLE

SECTION IX.

Corollaire general de la Théorie précedente.

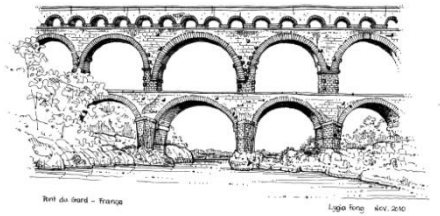
DAns une Lettre écrite de Bâle le 26. Janvier 1717. M. (Jean) Bernoulli, après y avoir défini ce qu'il entendoit par le mot d'*Energie*, de la maniere qu'on le va voir dans la définition suivante, m'annonça qu'*en toute équilibre de forces quelconques, en quelque maniere qu'elles soient appliquées les unes sur les autres, ou immédiatement ou immédiatement; la somme des Energies affirmatives sera égale à la somme des Energies négatives, prises affirmativement.*

Cette proposition me parut si generale & si belle, que, voyant que je la pouvois aisément déduire de la Théorie précedente, je lui demandai la permission qu'il m'accorda, de l'ajouter ici avec la démonstration que cette Théorie m'en fourniroit, & qu'il ne m'envoyoit pas. La voici séparée pour toutes les Machines précedentes; la Théorie, qui en doit achever lorsque ce sçavant Mathématicien m'annonça cette proposition, ne m'ayant pas permis de la démontrer sur chacune de ces Machines en la place, sans changer un très-grand nombre de citations répandues dans cette Théorie, & toutes celles des Figures qui auroient suivi la premiere des nouvelles qu'il y auroit fallu ajouter dès la Section 2. ce qui m'auroit fort embarrassé, & exposé à de fausses citations, n'étant pas possible de n'omettre aucun de ces changemens. Pour l'intelligence de cette proposition de M. Bernoulli, & de la démonstration que la Théorie précedente en va fournir. Voici comment il s'expliquoit sur ce qu'il entendoit par le mot d'*Energie*, dans la Lettre où il m'annonçoit cette belle proposition.

Capa e página 174
Nouvelle Mecanique,
Pierre Varignon, Vol.2, 1725, Paris.

Teoremas dos Trabalhos Virtuais

Introdução



- **A palavra virtual significa ser em essência ou efeito, mas não de fato.**

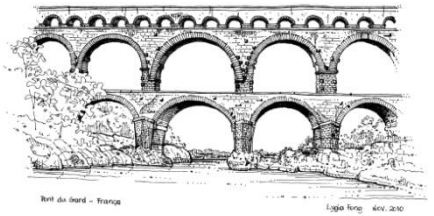
- **<u>Trabalho virtual</u>, , de uma força por um deslocamento virtual , no ponto de aplicação e na direção da força** $\delta T = F\delta u$

- **<u>Trabalho virtual complementar</u>, de uma força virtual por deslocamento , no ponto de aplicação e na direção da força virtual** $\delta T^* = \delta F u$

- **Essas duas definições de trabalho não têm necessariamente um significado físico associado.**

Teoremas dos Trabalhos Virtuais

Teorema dos deslocamentos virtuais em estruturas reticuladas



Forma generalizada do Teorema do Trabalho

$$\underbrace{\int_0^\ell N^e u^{c\prime}\,dx + \int_0^\ell M_y^e\left(-w^{c\prime\prime}\right)dx}_{\tau_i} = \underbrace{\int_0^\ell q_x^e u^c\,dx + \int_0^\ell q_z^e w^c\,dx + \sum_{i=1}^{n} E_i^e d_i^c}_{\tau_e}$$

Deslocamentos virtuais

=

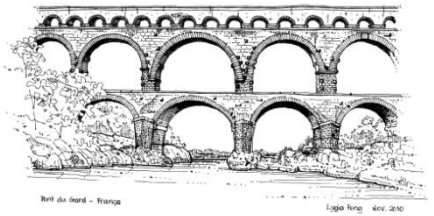
Deslocamentos cinematicamente admissíveis

Forma generalizada do TDV

$$\underbrace{\int_{estr} N\delta u'ds + \int_{estr} M_y(-\delta w'')ds}_{\delta\tau_i} = \underbrace{\int_{estr} q_x\delta uds + \int_{estr} q_z\delta wds + \sum_i P_i\delta U_i}_{\delta\tau_e}$$

Teoremas dos Trabalhos Virtuais

Teorema dos deslocamentos virtuais em estruturas reticuladas



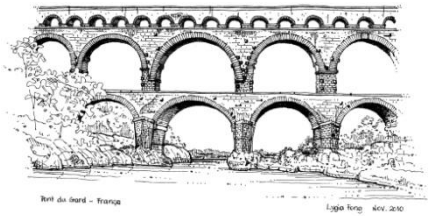
TDV: ***"Se uma estrutura está em equilíbrio, então o trabalho virtual interno é igual ao trabalho virtual externo para quaisquer deslocamentos virtuais".***

$$\underbrace{\int_{estr} N\delta u'ds + \int_{estr} M_y(-\delta w'')ds}_{\delta\tau_i} = \underbrace{\int_{estr} q_x\delta uds + \int_{estr} q_z\delta wds + \sum_i P_i\delta U_i}_{\delta\tau_e}$$

Aplicações:

- ✓ **a determinação de reações de apoio em estruturas isostáticas;**
- ✓ **a determinação de relações de dependência entre reações de apoio em estruturas hiperestáticas;**
- ✓ **a determinação de configuração de equilíbrio de sistemas de barras rígidas (mecanismos);**
- ✓ **a resolução de estruturas pelo método dos deslocamentos.**

Teoremas dos Trabalhos Virtuais



Teorema dos deslocamentos virtuais em estruturas reticuladas
Expressão alternativa somente para materiais elásticos lineares

Para materiais elásticos lineares

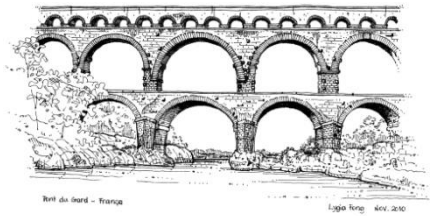
$$\begin{cases} N = EAu' \\ M_y = -EI_y w'' \end{cases}$$

$$\underbrace{\int_{\text{estr}} EAu'\delta u' ds + \int_{\text{estr}} EI_y w''\delta w'' ds}_{\delta\tau_i} = \underbrace{\int_{\text{estr}} q_x \delta u ds + \int_{\text{estr}} q_z \delta w ds + \sum_i P_i \delta U_i}_{\delta\tau_e}$$

TDV: ***"Se uma estrutura está em equilíbrio, então o trabalho virtual interno é igual ao trabalho virtual externo para quaisquer deslocamentos virtuais".***

Teoremas dos Trabalhos Virtuais

Teorema dos deslocamentos virtuais em estruturas reticuladas



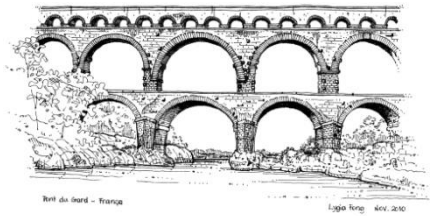
TDV:
"Se uma estrutura está em equilíbrio, então o trabalho virtual interno é igual ao trabalho virtual externo para qualquer campo de deslocamentos virtuais".

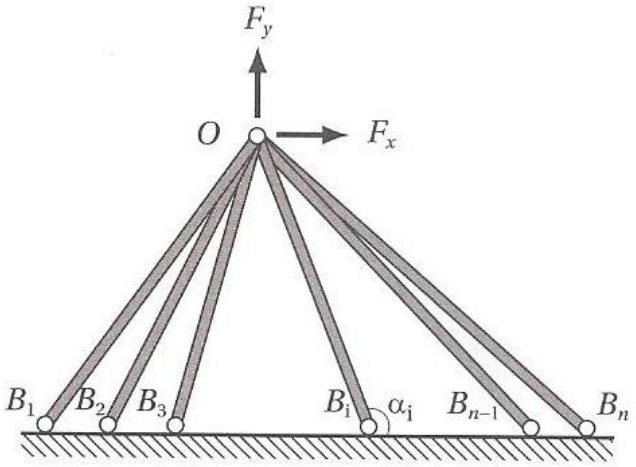
Teorema recíproco do TDV:
"Se em uma estrutura o trabalho virtual interno for igual ao trabalho virtual externo para qualquer campo de deslocamentos virtuais, então o sistema estará em equilíbrio"

$$\delta\tau_i = \delta\tau_e \quad \Leftrightarrow \quad \text{Equilíbrio}$$

Teoremas dos Trabalhos Virtuais

Resolução de estruturas hiperestáticas pelo metodo dos deslocamentos – Exemplo 2.1





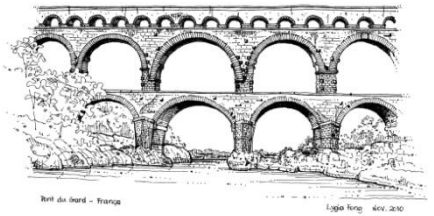
$$k_i = \frac{E_i A_i}{\ell_i}$$

Em 1862, Alfred Clebsch (1833-1872) publicou o livro "Theorie der Elasticität fester Körper". No último artigo de seu livro, Clebsch apresenta, pela primeira vez, uma formulação em que as incógnitas de um problema estrutural são os deslocamentos nodais, ou seja, uma formulação do método dos deslocamentos.

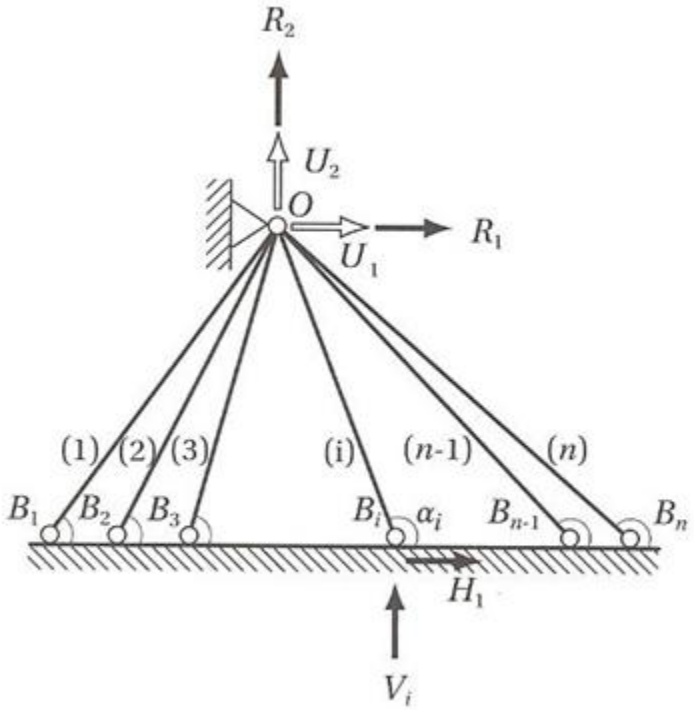
Clebsch apresentou essa formulação em uma treliça como a da figura acima.

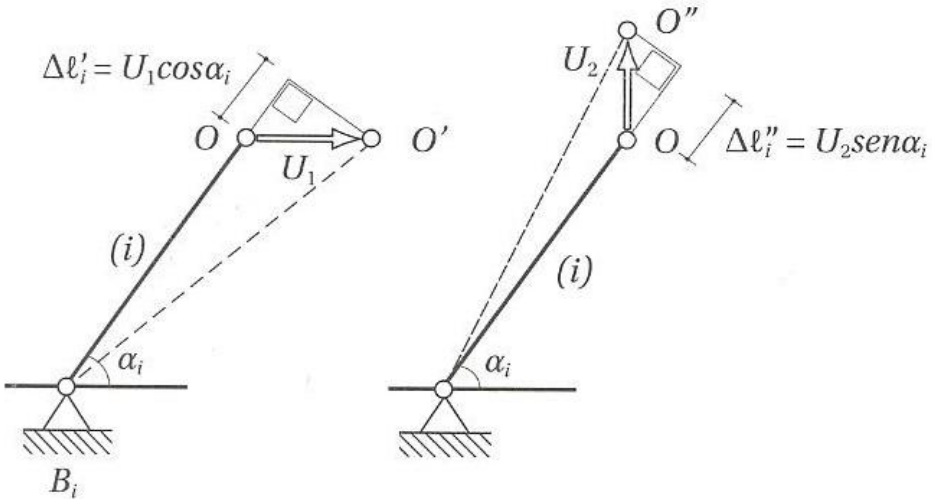
Teoremas dos Trabalhos Virtuais

Exemplo 2.1



1) Soluções compatíveis



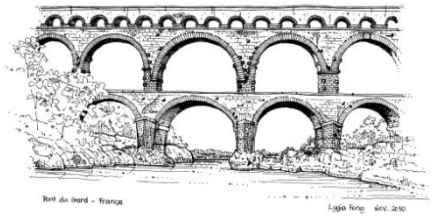


$$\Delta\ell_i = U_1 \cos\alpha_i + U_2 \mathbf{sen}\,\alpha_i$$

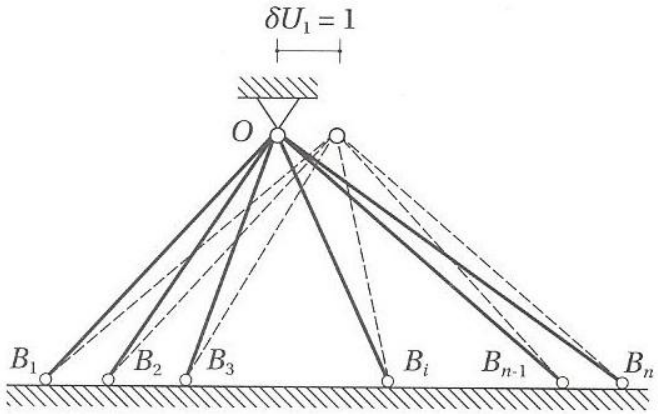
$$N_i = \frac{E_i A_i}{\ell_i}\Delta\ell_i = k_i\left(U_1 \cos\alpha_i + U_2 \mathbf{sen}\,\alpha_i\right)$$

Teoremas dos Trabalhos Virtuais

Exemplo 2.1



2) Primeira equação reduzida de equilíbrio $R_1 = F_x$



$$\delta\Delta\ell_i = \cos\alpha_i\,\delta U_1$$

$$\delta T_e = R_1\delta U_1$$

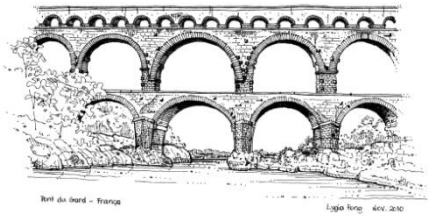
$$\delta T_i = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{\ell_i} N_i\delta u_i' dx = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{\ell_i} N_i\frac{\Delta\ell_i}{\ell_i}dx = \sum_{i=1}^{n} N_i\delta\Delta\ell_i$$

$$\delta T_i = \sum_{i=1}^{n} k_i\left(U_1\mathbf{cos}\alpha_i + U_2\mathbf{sen}\alpha_i\right)\mathbf{cos}\alpha_i\,\delta U_1$$

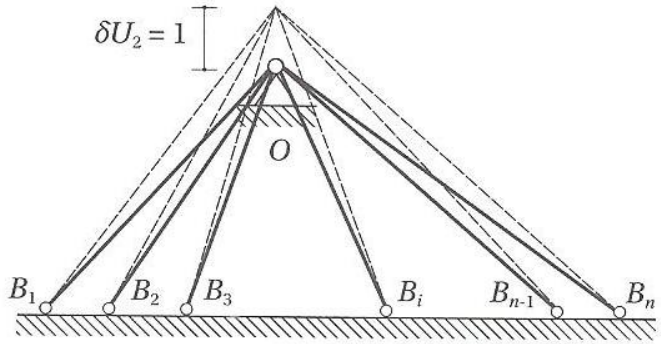
$$\delta T_e = \delta T_i \quad\Rightarrow\quad \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{cos}^2\alpha_i\right)U_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\mathbf{cos}\alpha_i\mathbf{sen}\alpha_i\right)U_2 = R_1$$

Teoremas dos Trabalhos Virtuais

Exemplo 2.1



3) Segunda equação reduzida de equilíbrio $R_2 = F_y$



$$\delta\Delta\ell_i = \mathbf{sen}\,\alpha_i \delta U_2$$

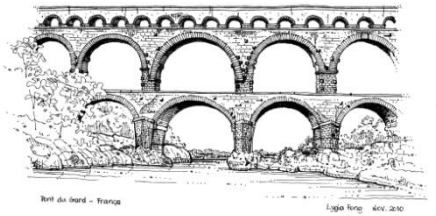
$$\delta T_e = R_2 \delta U_2$$

$$\delta T_i = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\ell_i} N_i \delta u_i' dx = \sum_{i=1}^{n} N_i \delta\Delta\ell_i$$

$$\delta T_i = \sum_{i=1}^{n} k_i \left(U_1 \mathbf{cos}\alpha_i + U_2 \mathbf{sen}\alpha_i\right) \mathbf{sen}\alpha_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \cos\alpha_i \mathbf{sen}\,\alpha_i\right) U_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} k_i \mathbf{sen}^2 \alpha_i\right) U_2 = R_2$$

Exemplo 2.1



4) Solução real

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (U_1, U_2)$$

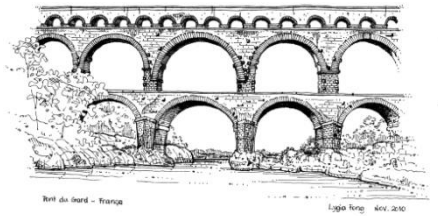
$$K_{11} = \sum_{i=1}^{n} k_i \cos^2 \alpha_i \qquad K_{22} = \sum_{i=1}^{n} k_i \operatorname{sen}^2 \alpha_i$$

$$K_{12} = K_{21} = \sum_{i=1}^{n} k_i \cos \alpha_i \operatorname{sen} \alpha_i$$

$$R_1 = F_x \qquad R_2 = F_y$$

Teoremas dos Trabalhos Virtuais

Método do deslocamentos derivado do TDV



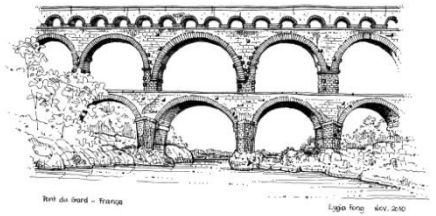
- definir as soluções compatíveis em função de um número finito n de deslocamentos nodais, que constituem as incógnitas do problema;
- escolher, convenientemente, n campos de deslocamentos virtuais com $\delta U_k = 1$ para $(k = 1 \boldsymbol{a} n)$ e $\delta U_j = 0$ para $(j = 1 \boldsymbol{a} n) \boldsymbol{e} (j \neq k)$;
- estabelecer, pela aplicação do teorema dos deslocamentos virtuais, tantas equações de equilíbrio, chamadas equações reduzidas de equilíbrio, quantas forem as incógnitas do problema;
- determinar os deslocamentos incógnitos pela resolução das equações reduzidas de equilíbrio que se apresentam na forma geral

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{R}\}$$

- no caso de esforços externos aplicados fora dos nós as equações reduzidas de equilíbrio tomam a forma:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} + \{\mathbf{R_0}\} = \{\mathbf{R}\}$$

Teoremas dos Trabalhos Virtuais



Teorema dos esforços virtuais em estruturas reticuladas

Forma generalizada do Teorema do Trabalho

$$\underbrace{\int_0^{\ell} N^e u^{c\prime}\,dx + \int_0^{\ell} M_y^e\left(-w^{c\prime\prime}\right)dx}_{\mathcal{T}_i} = \underbrace{\int_0^{\ell} q_x^e u^c\,dx + \int_0^{\ell} q_z^e w^c\,dx + \sum_{i=1}^{n} E_i^e d_i^c}_{\mathcal{T}_e}$$

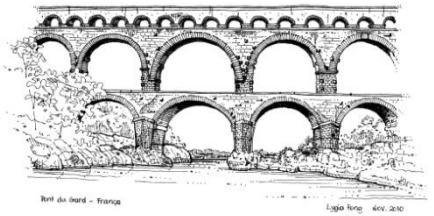
Esforços virtuais
=
Esforços estaticamente admissíveis

Forma generalizada do TEV

$$\underbrace{\int_{estr} \delta N\, u'ds + \int_{estr} \delta M_y(-w'')ds}_{\delta\mathcal{T}_i^*} = \underbrace{\int_{estr} \delta q_x u ds + \int_{estr} \delta q_z w ds + \sum_i \delta P_i U_i + \sum_j \delta R_j \hat{D}_j}_{\delta\mathcal{T}_e^*}$$

Teoremas dos Trabalhos Virtuais

Teorema dos esforços virtuais em estruturas reticuladas



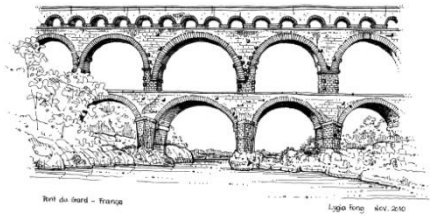
Forma restrita do TEV

$$\underbrace{\int_{estr} \delta N\, u' ds + \int_{estr} \delta M_y\, (-w'')\, ds}_{\delta T_i^*} = \underbrace{\sum_j \delta R_j \hat{D}_j}_{\delta T_e^*}$$

TEV ***"Se o campo de deslocamentos em uma estrutura corresponder a uma solução compatível, então o trabalho virtual complementar interno, é igual ao trabalho virtual complementar externo, para quaisquer esforços virtuais."***

Teoremas dos Trabalhos Virtuais

Teorema dos esforços virtuais em estruturas reticuladas



TEV ***"Se o campo de deslocamentos em uma estrutura corresponder a uma solução compatível, então o trabalho virtual complementar interno, é igual ao trabalho virtual complementar externo, para quaisquer esforços virtuais."***

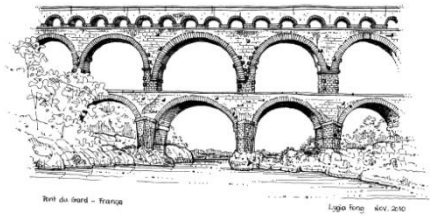
Teorema recíproco do TEV:

"Se em uma estrutura o trabalho virtual complementar interno for igual ao trabalho virtual complementar externo então a solução é compatível para quaisquer esforços virtuais"

$$\delta\tau_i^* = \delta\tau_e^* \quad \Leftrightarrow \quad \text{Compatibilidade}$$

Teoremas dos Trabalhos Virtuais

Teorema dos esforços virtuais em estruturas reticuladas



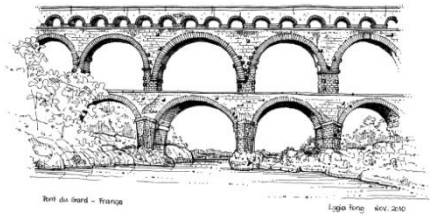
No caso de estrutura elástica linear não submetida a variação de temperatura

$$u' = \frac{N}{EA} \qquad w'' = -\frac{M_y}{EI_y}$$

$$\delta T_i^* = \int_{estr} \delta N \frac{N}{EA} ds + \int_{estr} \delta M_y \frac{M_y}{EI_y} ds$$

Teoremas dos Trabalhos Virtuais

Teorema dos esforços virtuais em estruturas reticuladas



No caso de estrutura reticulada no espaço

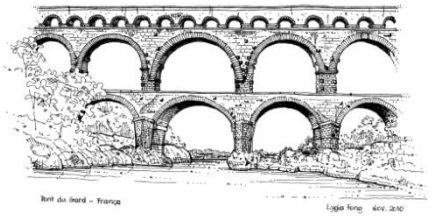
$$\delta T_i^* = \int_{estr} \delta N\, u'ds + \int_{estr} \delta M_y (-w'')ds + \int_{estr} \delta M_z\, v''ds + \int_{estr} \delta T\, \theta' ds$$

ou, ao considerar-se a estrutura elástica linear não submetida a variação de temperatura

$$\delta T_i^* = \int_{estr} \delta N \frac{N}{EA} ds + \int_{estr} \delta M_y \frac{M_y}{EI_y} ds + \int_{estr} \delta M_z \frac{M_z}{EI_z} ds + \int_{estr} \delta T \frac{T}{GI_T} ds$$

Teoremas dos Trabalhos Virtuais

Teorema dos esforços virtuais em estruturas reticuladas



Aplicações – considerando a forma generalizada do TEV:

$$\underbrace{\int_{estr} \delta N\, u'ds + \int_{estr} \delta M_y(-w'')ds}_{\delta T_i^*} = \underbrace{\int_{estr} \delta q_x uds + \int_{estr} \delta q_z wds + \sum_i \delta P_i U_i + \sum_j \delta R_j \hat{D}_j}_{\delta T_e^*}$$

- ✓ cálculo de deslocamentos em estruturas isostáticas;
- ✓ resolução de estruturas hiperestáticas pelo método dos esforços;
- ✓ cálculo dos deslocamentos em estruturas hiperestáticas