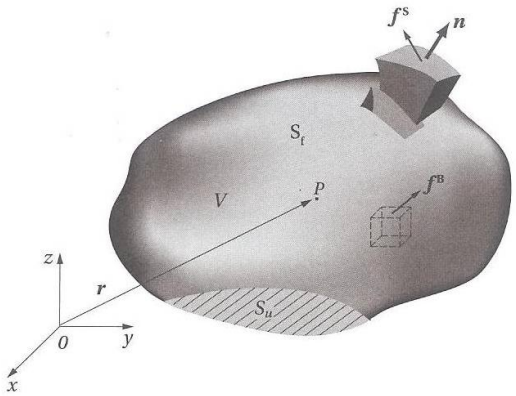
Teorema do Trabalho

Formulação do Problema Estado Triplo de Tensão



- Equilibrio ⇒ **Estudo das tensões**



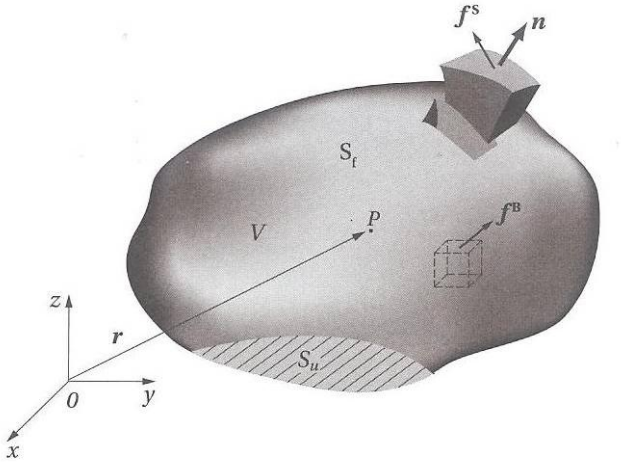
- **Relações constitutivas**

- Compatibilidade ⇒ **Estudo das deformações**

Teorema do Trabalho

Campo de tensões estaticamente admissíveis





$$\frac{\partial \sigma^e_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^e_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma^e_{xz}}{\partial z} + f^B_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma^e_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^e_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma^e_{yz}}{\partial z} + f^B_y = 0 \qquad \textbf{em } V$$

$$\frac{\partial \sigma^e_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^e_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma^e_{zz}}{\partial z} + f^B_z = 0$$

$$\sigma^e_{xx} n_x + \sigma^e_{xy} n_y + \sigma^e_{xz} n_z = f^S_x$$

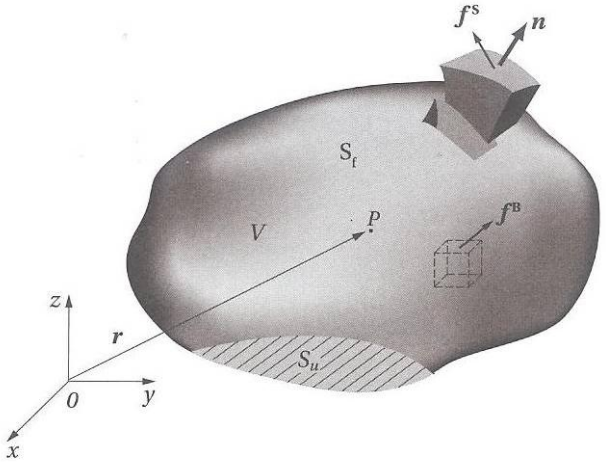
$$\sigma^e_{yx} n_x + \sigma^e_{yy} n_y + \sigma^e_{yz} n_z = f^S_y \qquad \text{em } S_f$$

$$\sigma^e_{zx} n_x + \sigma^e_{zy} n_y + \sigma^e_{zz} n_z = f^S_z$$

Teorema do Trabalho

Campo de deslocamentos cinematicamente admissíveis





$$u^c = \hat{u} \qquad v^c = \hat{v} \qquad w^c = \hat{w} \qquad \text{em } S_u$$

$$\varepsilon^c_{xx} = \frac{\partial u^c}{\partial x} \qquad \varepsilon^c_{yy} = \frac{\partial v^c}{\partial y} \qquad \varepsilon^c_{zz} = \frac{\partial w^c}{\partial z}$$

$$2\varepsilon^c_{xy} = \gamma^c_{xy} = \frac{\partial u^c}{\partial y} + \frac{\partial v^c}{\partial x} \qquad \text{em } V$$

$$2\varepsilon^c_{yz} = \gamma^c_{yz} = \frac{\partial v^c}{\partial z} + \frac{\partial w^c}{\partial y}$$

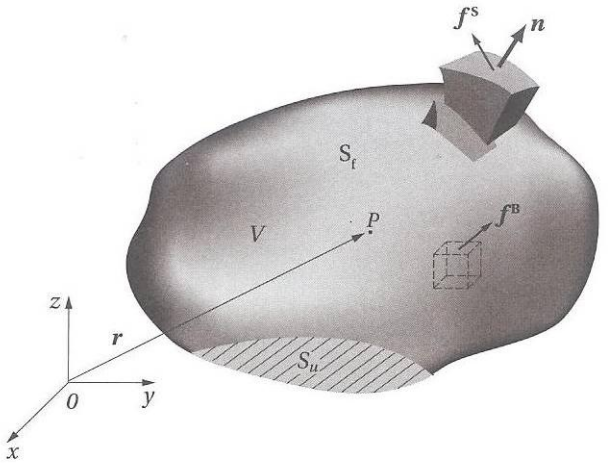
$$2\varepsilon^c_{zx} = \gamma^c_{zx} = \frac{\partial w^c}{\partial x} + \frac{\partial u^c}{\partial z}$$

Teorema do Trabalho

Na Teoria da Elasticidade Linear



$$\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_e$$



$$\mathcal{T}_i = \int_V \{\sigma^e\}^T \{\varepsilon^c\} dV =$$

$$\int_V \left(\sigma^e_{xx}\varepsilon^c_{xx} + \sigma^e_{yy}\varepsilon^c_{yy} + \sigma^e_{zz}\varepsilon^c_{zz} + \sigma^e_{xy}\gamma^c_{xy} + \sigma^e_{yz}\gamma^c_{yz} + \sigma^e_{zx}\gamma^c_{zx}\right) dV$$

$$\mathcal{T}_e = \int_S \{\mathbf{f}^S\}^T \{\mathbf{u}^c\} dS + \int_V \{\mathbf{f}^B\}^T \{\mathbf{u}^c\} dV$$

Regra da derivação

+

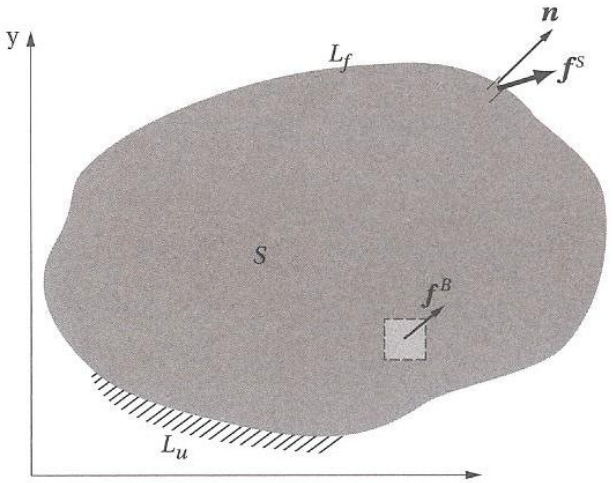
Teorema de Gauss ou da Divergência

Teorema do Trabalho

Em estados planos



$$\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_e$$



$$\mathcal{T}_i = \int_S \left(\sigma^e_{xx}\varepsilon^c_{xx} + \sigma^e_{yy}\varepsilon^c_{yy} + \sigma^e_{xy}\gamma^c_{xy} \right) h dS$$

$$\mathcal{T}_e = \int_S \left(f^B_x u^c + f^B_y v^c \right) h dS + \int_L \left(f^S_x u^c + f^S_y v^c \right) h dL$$

Teorema do Trabalho

Teoria Elementar de Barra de Bernoulli-Euler – TB B-E

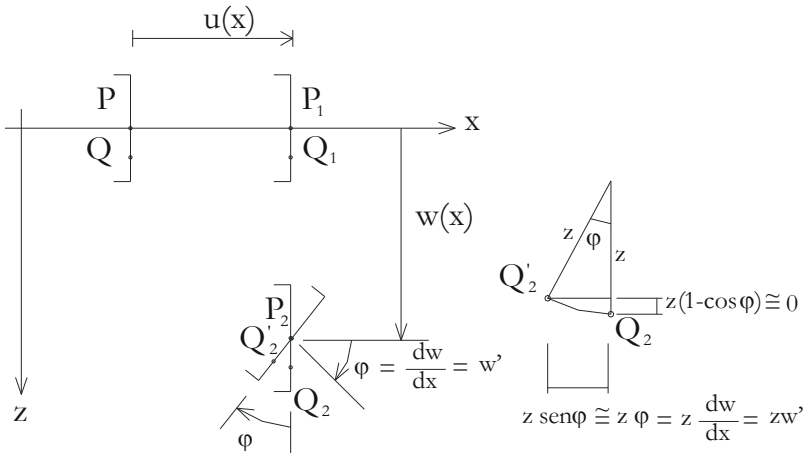


- as seções planas originalmente perpendiculares ao eixo da barra permanecem planas e perpendiculares ao eixo da barra após a deformação (hipótese de Bernoulli-Euler-Navier);
- não ocorre deformação no plano da seção transversal;
- consideram-se pequenas deformações e pequenos deslocamentos;
- a seção transversal da barra tem um plano de simetria;
- o carregamento externo atua no plano de simetria.

Teorema do Trabalho

TB B-E: Deslocamentos cinematicamente admissíveis





$$u_Q(x,y,z) = u(x) - z(w(x))'$$

$$w_Q(x,y,z) = w(x)$$

$$v_Q(x,y,z) = 0$$

$$\varepsilon_{xx} = (u(x))' - z(w(x))''$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

+ condições de vínculos

Teorema do Trabalho

TB B-E: Solução Compatível



Deslocamentos e deformações cinematicamente admissíveis

$u^c(x),\ w^c(x),\ w^{c'}(x)$
Diferenciáveis
Condições de vínculos

$$\varepsilon^c_{xx} = u^{c'} - w^{c''} z$$
$$\varepsilon^c_{yy} = \varepsilon^c_{zz} = \gamma^c_{xy} = \gamma^c_{yz} = \gamma^c_{zx} = 0$$

Pela Lei de Hooke

$$\sigma^c_{xx} = Eu^{c'} - Ew^{c''} z$$
$$\sigma^c_{yy} = \sigma^c_{zz} = \sigma^c_{xy} = \sigma^c_{yx} = \sigma^c_{zx} = 0$$

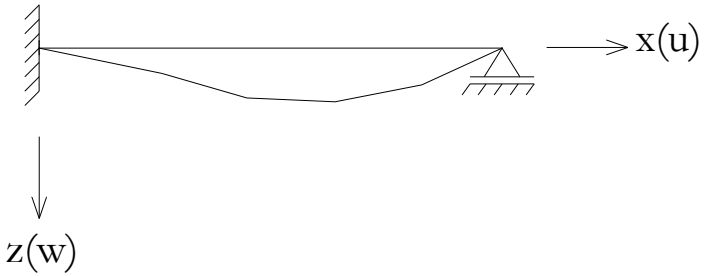
$$N^c = \int_A \sigma_{xx}\, dA$$
$$M^c_y = \int_A \sigma_{xx}\, z dA$$

$$N^c = EAu^{c'}$$
$$M^c_y = -EI_y w^{c''}$$

Teorema do Trabalho

TB B-E: Solução Compatível – Exemplo 1.3





$$w(0) = 0$$

$$w'(0) = 0 \qquad w(\ell) = 0$$

$$u(0) = 0$$

Campo de deslocamentos 1

$$u_1(x) = a_1 \frac{x^2}{\ell^2} \qquad w_1(x) = b_1 \frac{x^2}{\ell^2}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$

Campo de deslocamentos 2

$$u_2(x) = a_2 \frac{x}{\ell} \qquad w_2(x) = b_2 \mathbf{sen}\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) - \frac{b_2}{2}\mathbf{sen}\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)$$

Teorema do Trabalho

TB B-E: Esforços Estaticamente Admissíveis



- ***sistemas de esforços externos auto-equilibrados***

- ***e de esforços solicitantes, tais que:***

$$\frac{dN}{dx} + q_x = 0$$

$$\frac{dV_z}{dx} + q_z = 0$$

$$\frac{dM_y}{dx} = V_z$$

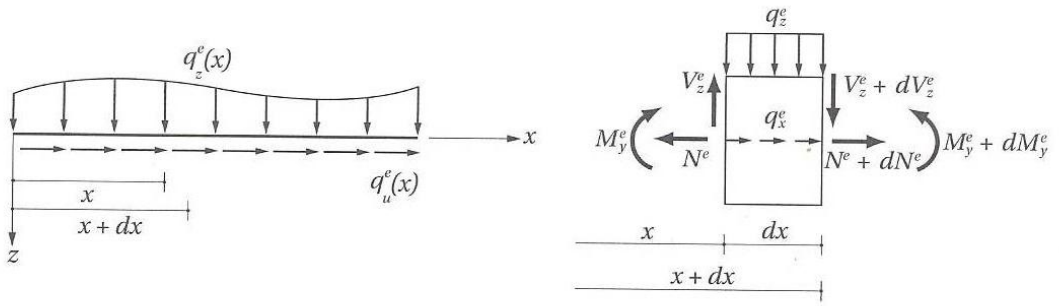


FIG. 1.9 Esforços em elemento de barra

Teorema do Trabalho

TB B-E: Solução equilibrada



Sistema equilibrado
Esforços externos ativos e reativos em equilíbrio

Esforços estaticamente admissíveis

Esforços solicitantes em equilíbrio

$$\frac{dN^e}{dx} + q_x^e = 0$$

$$\frac{dV_z^e}{dx} + q_z^e = 0$$

$$\frac{dM_y^e}{dx} = V_z^e$$

$$\sigma_{xx}^e = \frac{N^e}{A} + \frac{M_y^e}{I_y} z$$

$$\sigma_{xz}^e = \frac{V_z^e \mathcal{M}_y}{b\, I_y}$$

$$\sigma_{zz}^e = 0$$

Pela Lei de Hooke

$$\varepsilon_{xx}^e = \sigma_{xx}^e / E \quad \gamma_{xz}^e = \sigma_{xz}^e / G$$

$$\varepsilon_{yy}^e = \varepsilon_{zz}^e = 0 \quad \gamma_{xy}^e = \gamma_{yz}^e = 0$$

$u^e(x)$ e $w^e(x)$
Por integração das relações deformações-deslocamentos ou das relações esforços solicitantes-deslocamentos

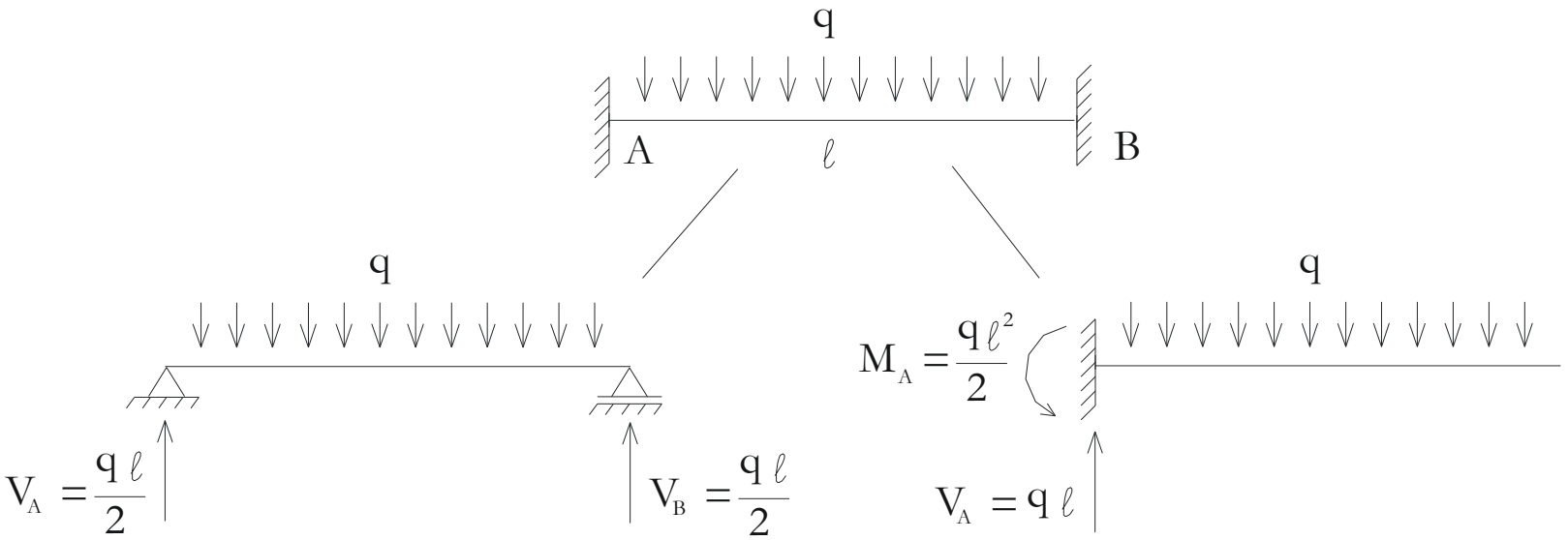
$$N^e = EAu^{e'}$$

$$M_y^e = -EI_v w^{e''}$$

Teorema do Trabalho



TB B-E: Solução equilibrada – Exemplo 1.5



Teorema do Trabalho

Na Teoria Elementar de Barra de Bernoulli-Euler



$$\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_e$$

$$\mathcal{T}_i = \int_V \left(\sigma_{xx}^e \varepsilon_{xx}^c\right) dV = \int_0^\ell \left(N^e \left(u^c\right)' + M_y^e \left(-w^c\right)'' \right) dx$$

$$\mathcal{T}_e = \int_0^\ell q_x^e u^c \, dx + \int_0^\ell q_z^e w^c \, dx + \sum_{i=1}^{n} E_i^e d_i^c$$

O trabalho interno e o trabalho externo dos esforços estaticamente admissíveis pelos deslocamentos cinematicamente admissíveis são iguais e observam as expressões acima para a Teoria de Barra de Bernoulli-Euler

Teorema do Trabalho

Exemplo 1.8 – Teorema de Maxwell



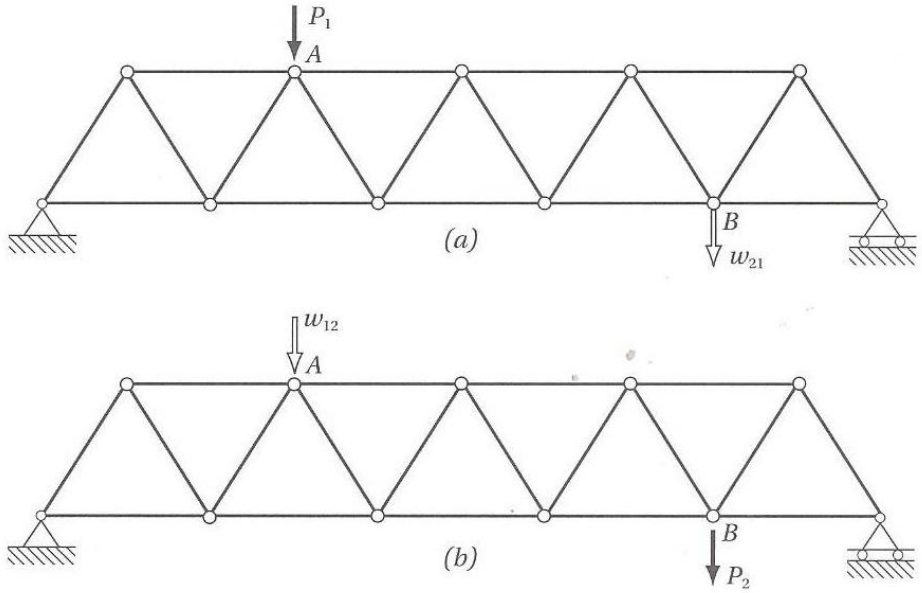


FIG. 1.18 Treliça isostática sob duas condições distintas de carregamentos

$$P_1 w_{12} = P_2 w_{21}$$

$$P_1 = P_2 = P$$

$$w_{12} = w_{21}$$

J.C. Maxwell (1831-1879)

Teorema do Trabalho

Teorema de Betti ou de Betti-Maxwell



"***Se, em um sólido deformável elástico linear e homogêneo,***

são aplicados dois sistemas de esforços independentes,

então o trabalho caracterizado pela soma dos produtos
dos esforços do primeiro sistema pelos deslocamentos do segundo
definidos nos pontos de aplicação e nas direções dos esforços do primeiro,

é igual ao trabalho caracterizado pela soma dos produtos
dos esforços do segundo sistema pelos deslocamentos do primeiro
definidos nos pontos de aplicação e nas direções dos esforços do segundo."

Em 1872, Enrico Betti (1832-1892)

Teorema do Trabalho

Teorema de Betti ou de Betti-Maxwell



e abbiamo il seguente teorema:

se in un corpo solido elastico omogeneo, due sistemi di spostamenti fanno equilibrio a due sistemi di forze applicate alle superficie, la somma dei prodotti delle componenti delle forze del primo sistema per le componenti degli spostamenti negli stessi punti del secondo, è uguale alla somma dei prodotti delle componenti delle forze del secondo sistema per le componenti degli spostamenti nei medesimi punti del primo.

Enrico Betti (1832-1892)
Trecho pg.89 – Nuovo Cimento, Serie 2, Vol. VII-VIII, 1872

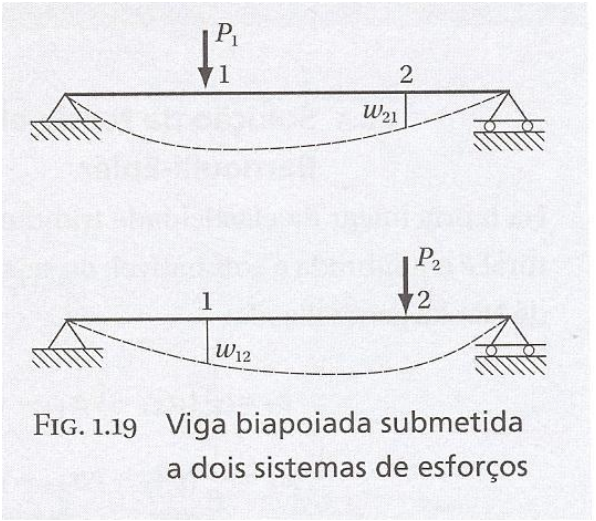


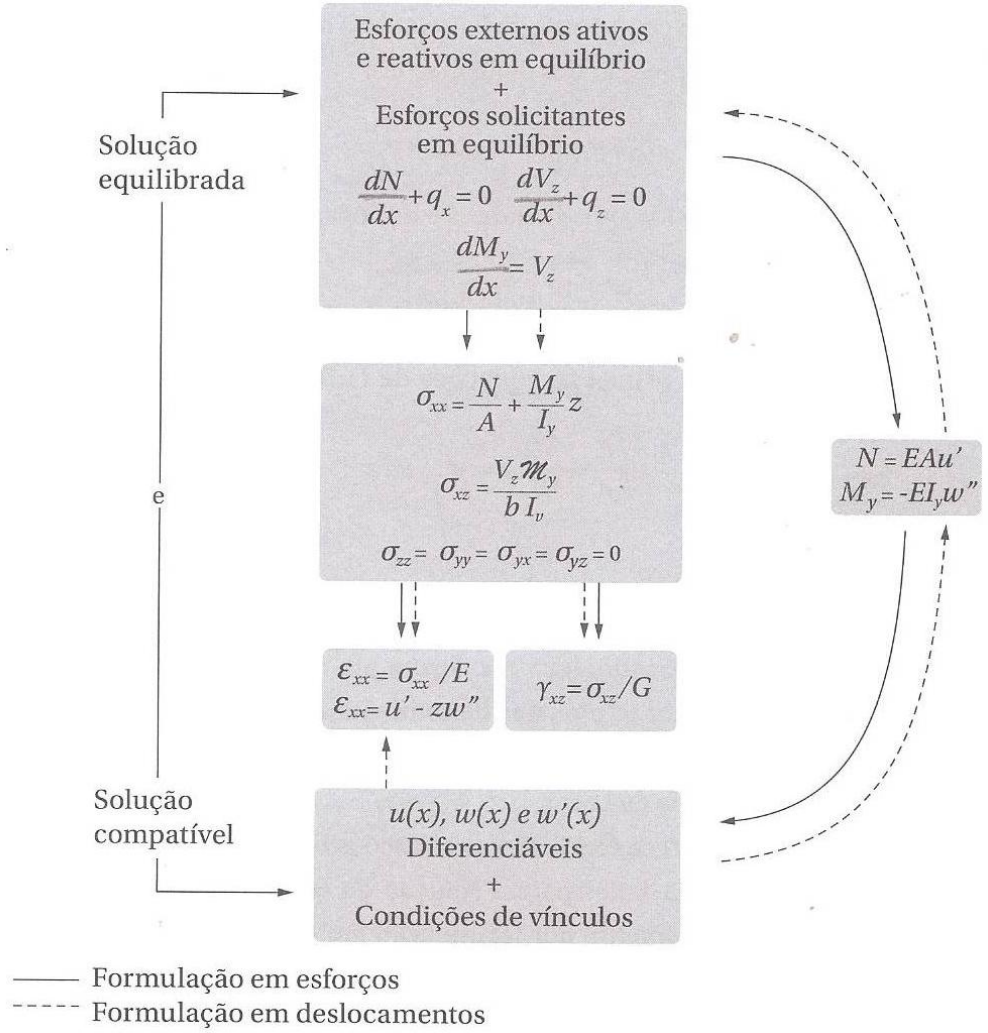
FIG. 1.19 Viga biapoiada submetida a dois sistemas de esforços

O. Mohr (1835-1918) redescobriu os trabalhos de Mawell

Teorema do Trabalho

Solução real da Teoria Elementar de Barra de Bernoulli-Euler

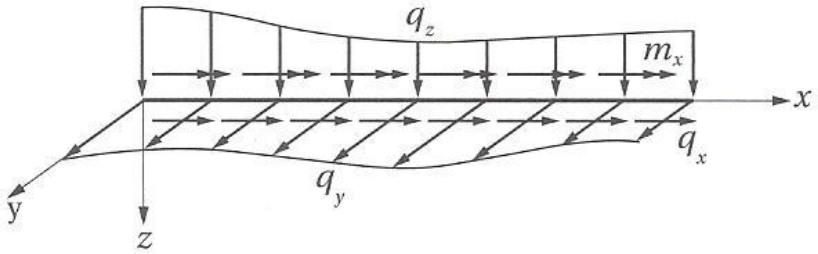


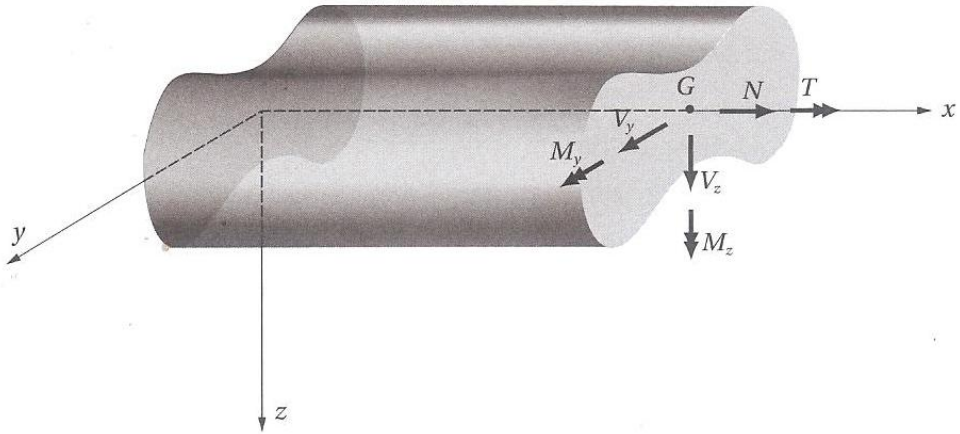


Teorema do Trabalho

Teoria Elementar de Barra no Espaço







Uma teoria unidimensional simples, válida para barras de eixo reto ou de pequena curvatura,

teoria de barra de Bernoulli-Euler

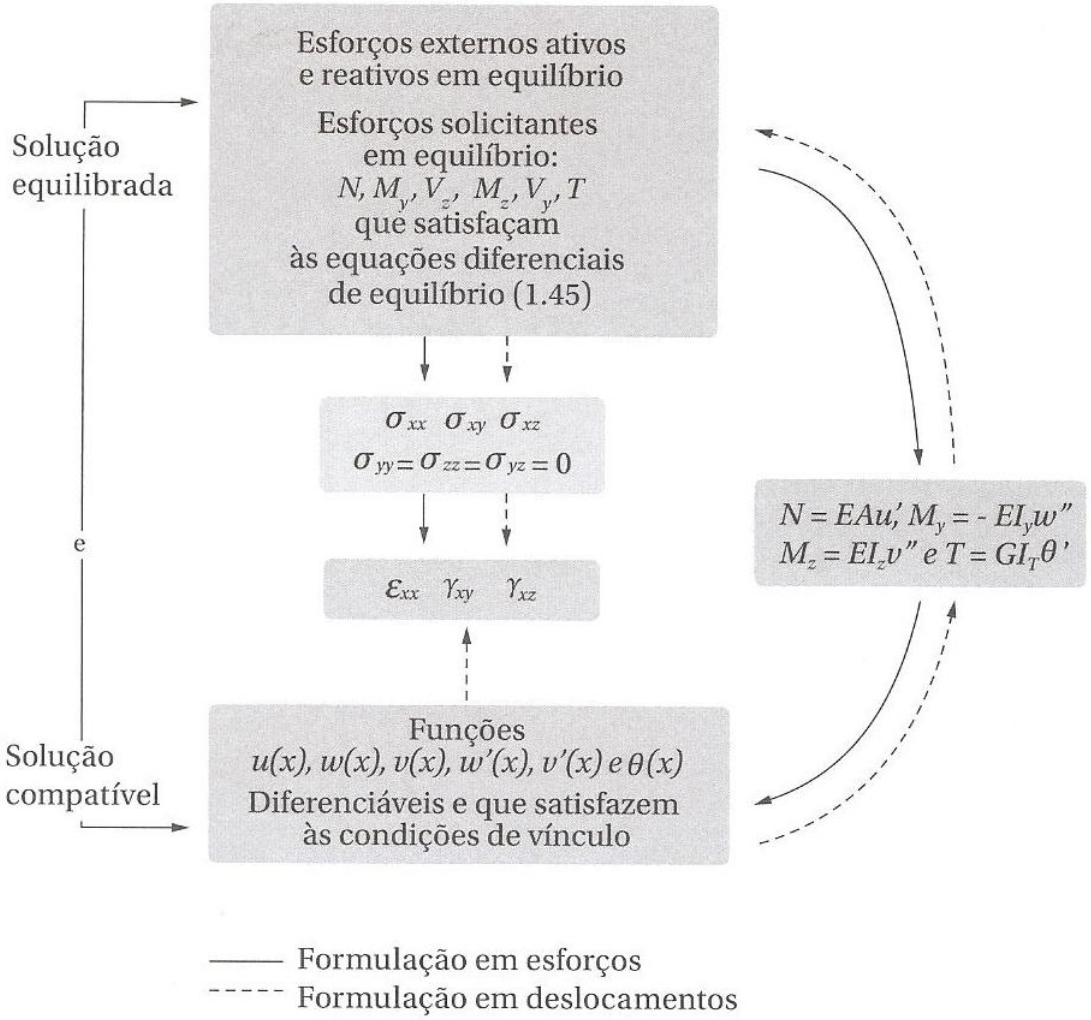
+

teoria de torção uniforme de Saint Venant.

Teorema do Trabalho

Solução real da Teoria Elementar de Barra no espaço





Teorema do Trabalho

Na Teoria Elementar de Barra no espaço



$$\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_e$$

$$\mathcal{T}_i = \int_0^\ell N^e \left(u^c\right)' dx + \int_0^\ell M_y^e \left(-w^c\right)'' dx + \int_0^\ell M_z^e \left(v^c\right)'' dx + \int_0^\ell T^e \left(\theta^c\right)' dx$$

$$\mathcal{T}_e = \int_0^\ell q_x^e u^c dx + \int_0^\ell q_z^e w^c dx + \int_0^\ell q_y^e v^c dx + \int_0^\ell m_x^e \theta^c dx$$