Matemática para Economistas - LES 201

Aulas 7_8

Rank/Posto Matriz

Matriz Insumo Produto

Chiang Capítulos 4 e 5

Márcia A. F. Dias de Moraes

Sistemas de Equações

Para um sistema ter solução:

Matriz de coeficientes deve ser não singular

a) Número de equações = Número de incógnitas

Número de linhas = Número de colunas

Requisito: matriz quadrada (fácil verificar)

+

b) Equações compatíveis e independentes

Requisito: independência linear

(nem sempre é fácil verificar)

Sistemas de Equações

Quando existe dependência linear entre as linhas da matriz A:

- existe dependência entre as equações do sistema

- Se as equações forem:
  - Consistentes: infinitas soluções

    2x+3y+1z=10 e 4x+6y+2z=20
  - Inconsistentes: sem solução

    2x+3y+1z=10 e 2x+3y+1z=8

- Método para testar a independência linear

Rank (ou Posto ou característica) da Matriz

- *Rank*: é um número
- Definição: *rank* é o número máximo de linhas linearmente independentes que pode ser achado em uma matriz A

- Ou: Dada uma matriz m x n, o posto dessa matriz pode ser definido como a ordem máxima de um determinante não nulo que possa ser formado a partir das linhas e colunas daquela matriz.
- Por definição a matriz não singular (n x n) possui n linhas e n colunas linearmente independentes, portanto o seu rank é n

Rank (ou Posto ou característica) da Matriz

Simbolicamente:

- r (A) ≤ min {m,n}, ou seja:
- o rank de A é menor ou igual ao menor valor dos conjunto dos números *m* e *n*
- Posto (A) ≤ m, se m < n
- Posto (A) ≤ n, se n < m
- Ex: matriz (3 x 5):
  - determinante da mais alta ordem é 3, portanto o posto é 3

Propriedades do Rank (ou Posto)

1. r (A) = r (A')
2. r (AB) = min {r(A), r (B)}
3. Se A é matriz quadrada n x n, então:

   3.1) r (A) = n, se é somente se A for não singular

   3.2) r (A) < n, se e somente se A for singular

Propriedades do Rank (ou Posto)

4. Dado que $X = A^{-1}.\ d$, o teorema de Kronecker – Capelli prevê:

4.1) Se $r(A \vdots d) = r(A)$
   – As equações são logicamente consistentes e existe pelo menos uma solução

4.2) Se $r(A \vdots d) = r(A) = n$
   – Existe uma única solução

4.3) Se $r(A \vdots d) = r(A) < n$
   – Existem infinitas soluções e as linhas (e/ou colunas) de A são linearmente dependentes

4.4) Se $r(A \vdots d) \neq r(A)$
   – As equações não são logicamente consistentes e não existe solução

Exemplo 1

Verificar se o sistema tem solução:

$x + 2y – z = 10$

$2x + 4y – 2z = 5$

$x + y + z = 6$

a) Montar a matriz A:

b) Calcular o determinante de A:

c) Achar rank de A:

Exemplo 1

Tirando a 1a. Linha e a 3a. Coluna:

d) Achar rank $(A \vdots d)$

e) Comparando $r(A)$ e $r(A \vdots d)$:

Propriedades do Rank (ou Posto)

4. Dado que $X = A^{-1}.\ d$, o teorema de Kronecker – Capelli prevê:

4.1) Se $r(A \vdots d) = r(A)$
   – As equações são logicamente consistentes e existe pelo menos uma solução

4.2) Se $r(A \vdots d) = r(A) = n$
   – Existe uma única solução

4.3) Se $r(A \vdots d) = r(A) < n$
   – Existem infinitas soluções e as linhas (e/ou colunas) de A são linearmente dependentes

4.4) Se $r(A \vdots d) \neq r(A)$
   – As equações não são logicamente consistentes e não existe solução

Exemplo 2

Verificar se o sistema tem solução: (mudou o vetor d)

$x + 2y – z = 10$

$2x + 4y – 2z = 20$

$x + y + z = 6$

a) Montar a matriz A

b) Calcular o determinante de A:

c) Achar rank de A:

Exemplo 2

d) Achar rank $(A \vdots d)$

d.1) Tirando a 1a. Coluna

Exemplo 2

d) Achar rank (A ⁝ d)

d.1) Tirando a 1a. Coluna

OBS: Quando determinante de (A ⁝ d) = 0, deve-se testar todas as combinações para verificar se não existe determinante de (A ⁝ d) ≠ 0

Exemplo 2

d.2) Tirando a 2a. Coluna

$$\det A \vdots d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 2 & -2 & 20 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

d.3) Tirando a 3a. Coluna

$$\det A \vdots d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 20 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, r (A d) ≠ 3

d.4) testando se r (A d) = 2

$$(A \vdots d) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Portanto:

$$r(A) = r(A \vdots d) = 2 < n\,(3)$$

→ sistema com infinitas soluções

Propriedades do Rank (ou Posto)

4. Dado que X = A^{-1}. d, o teorema de Kronecker – Capelli prevê:

4.1) Se r (A ⁝ d) = r (A)
- As equações são logicamente consistentes e existe pelo menos uma solução

4.2) Se r (A ⁝ d) = r (A) = n
- Existe uma única solução

4.3) Se r (A ⁝ d) = r (A) < n
- Existem infinitas soluções e as linhas (e/ou colunas) de A são linearmente dependentes

4.4) Se r (A ⁝ d) ≠ r (A)
- As equações não são logicamente consistentes e não existe solução

Exemplo 3

Verificar se o sistema tem solução

x + 2y – z = 10

2x – 4y – 2z = 5

x + y + z = 6

a) Matriz A

b) Calcular o determinante de A: (idem anterior)

c) Achar rank de A

d) Comparar

Exemplo 3

Verificar se o sistema tem solução

x + 2y – z = 10

2x – 4y – 2z = 5

x + y + z = 6

a) Matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) |A| = -16 ≠ 0 → r(A) = 3

c) Testar se r (A d) = 3

$$A \vdots d = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 10 \\ 2 & -4 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad |A \vdots d| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ -4 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -83 \neq 0 \therefore r(A \vdots d) = 3$$

d) Comparar $r(A) = r(A \vdots d) = n = 3$

→ sistema com uma única solução

Resolução de Sistema de Equações Lineares

1. Regra de Cramer

- Dado um sistema linear de *n* equações e *n* incógnitas, e seja D (D ≠ 0) o determinante da matriz dos coeficientes.
- O valor de cada incógnita é dado pela expressão:

Resolução - Regra de Cramer

Ex: resolver o sistema usando a regra de Cramer

$7x_1 - x_2 - x_3 = 0$

$10x_1 - 2x_2 + x_3 = 8$

$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7$

Resolução - Regra de Cramer

Ex: resolver o sistema usando a regra de Cramer

$7x_1 - x_2 - x_3 = 0$

$10x_1 - 2x_2 + x_3 = 8$

$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7$

1º. Passo: Calcular o determinante da Matriz A

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

=(28-6-30) - (12+21+20) =
= -8-53 = - 61

Resolução - Regra de Cramer

Ex: resolver o sistema usando a regra de Cramer

$7x_1 - x_2 - x_3 = 0$

$10x_1 - 2x_2 + x_3 = 8$

$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7$

$$\bar{x}_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

2º. Passo: Calcular determinantes Matrizes Auxiliares A_j

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -61 \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 10 & 8 & 1 \\ 6 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -183$$

Resolução - Regra de Cramer

Ex: resolver o sistema usando a regra de Cramer

$7x_1 - x_2 - x_3 = 0$

$10x_1 - 2x_2 + x_3 = 8$

$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7$

$$\bar{x}_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

2º. Passo: Calcular determinantes Matrizes Auxiliares A_j

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 10 & -2 & 8 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -244$$

Resolução - Regra de Cramer

Ex: resolver o sistema usando a regra de Cramer

3º. Passo: Calcular $\bar{x}_j = \frac{|A_j|}{|A|}$

$$|x_1| = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-61}{-61} = 1 \qquad |x_2| = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-183}{-61} = 3$$

$$|x_3| = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-244}{-61} = 4$$

Regra de Cramer

- Regra de Cramer: embora seja simples na resolução de sistemas com até 3 variáveis, não é recomendável para sistemas maiores:
  - Sistema de 4 equações e 4 incógnitas: cálculo de 5 determinantes de ordem 4

Resolução de Sistemas

2. Matriz Inversa

- Num sistema matricial, a matriz inversa “isola” o vetor de variáveis X

A.X = d

~~X = d/A~~ : NÃO EXISTE DIVISÃO DE MATRIZES

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}\, X = A^{-1}d$$

$$X = A^{-1}d$$

Resolução – Matriz Inversa

Resolver o sistema usando a matriz inversa

$2x_1 + x_2 - x_3 = 4$

$x_1 - 4x_3 = 8$

$3x_1 + x_2 - 3x_3 = 12$

Cálculo da Matriz Inversa

Usando cofatores

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}A = \frac{1}{|A|}\left[\mathrm{cof}\,(A)\right]^{t}$$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}.\ \underbrace{|M_{ij}|}_{\substack{\text{Menor}\\ \text{da Matriz A}}}$$

É O DETERMINANTE DA MATRIZ RESULTANTE AO SE TIRAR A LINHA i E A COLUNA j

Matriz Insumo-Produto

- Geralmente um setor relaciona-se diretamente com poucos outros setores, mas indiretamente com quase todos os demais setores da economia:
  - todos os setores em uma economia estão ligados direta ou indiretamente
- 1973: Wassily Leontieff - Prêmio Nobel de Economia
- MIP: “Fotografia econômica” de uma determinada economia num momento do tempo.
  - Mostra como os setores estão relacionados entre si:
    - Quais setores compram o que de quais setores
    - Quais setores vendem o que para quais setores
- Visão da interdependência entre os setores ou atividades relacionadas

Aplicações

- Ex-URSS: matriz com 40.000 células para coordenar as decisões de investimento, cadeia de suprimentos, remoção de gargalos e programação de metas consistentes de produção
- Países América Latina, África e Ásia: programas de crescimento econômico:
  - detecção de oportunidades de investimento e
  - remoção de pontos de estrangulamento em cadeias básicas
- Análises de Impactos
- Meio ambiente e recursos naturais

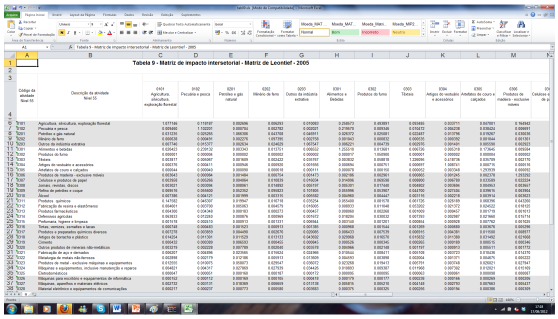
Matriz de Insumo-Produto

- Assume-se que a atividade econômica de um país ou região é divisível em determinado número de setores produtivos;
- Nível de desagregação da MIP depende da necessidade, finalidade ou capacidade de um país (BR = 43);

Informações relevantes:

- conhecimento do fluxo de produtos de um setor (produtor) para os demais (comprador), ou seja, o fluxo inter-setorial,
- medido em determinado período de tempo

http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/economia/matrizinsumo_produto/default.shtm



Matriz Insumo-Produto

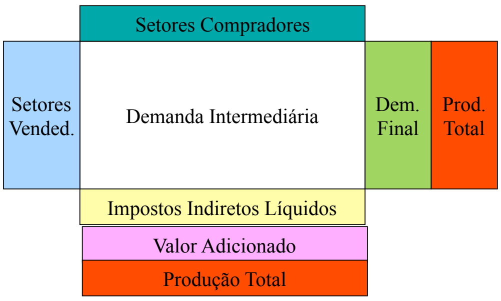
- Problemas com agregação, se pensarmos em termos físicos
  – trabalha-se com valores monetários
- Revela a relação de cada setor numa economia com os demais setores
- Permite conhecer as condições estruturais em que a economia opera e os resultados desagregados de acordo com setores, subsetores, regiões, categorias, etc.

Matriz Insumo Produto: aplicações

a) qual o nível de produção de cada uma das *n* indústrias de uma economia para que a demanda seja satisfeita?

b) Se houver choque na demanda, o que acontece com as várias indústrias?

c) Qual o setor que o governo deve investir se quiser aumentar o emprego?



Definições Importantes:

DEMANDA INTERMEDIÁRIA

- evidencia para onde vai o produto de determinado setor e de onde vêm os insumos;
  – Parcela que cada setor destina ao próprio setor e aos outros setores para o processamento da produção

DEMANDA FINAL:

- Compra das Famílias (Consumo);
- Investimentos Privados ou Formação Bruta de Capital Fixo (inclui bens duráveis, construção residencial e de instalações e variação de estoques);
- Compras do Governo;
- Vendas ao Exterior (Exportações)

Setor de Pagamentos: Valor Adicionado

- Remuneração de fatores de produção:
  - Remuneração do Trabalho: salários;
  - Remuneração do Capital: juros/ lucros;
  - Remuneração da Terra: aluguéis.
- Depreciação;
- Impostos indiretos líquidos (carga tributária indireta menos os subsídios).

		Demanda Intermediária					
		Setor 1	Setor 2	Setor 3	Setor n	Demanda Final	Valor Produção
Origem Insumos	Setor 1						
	Setor 2						
	Setor 3						
	Setor n						
	V.A.						
	Total						

Modelo IP

Divisões horizontais e verticais:

- Linha da MIP: destino da produção de cada setor:
  - Consumo Intermediário pelo próprio setor e/ou outros setores;
    - X_{11}: quanto o setor 1 fornece ao próprio setor 1
    - X_{12}: quanto o setor 1 fornece ao setor 2
    - X_{1n}: quanto o setor 1 fornece ao próprio setor n
  - Demanda Final
    - Y_1 : quanto o setor *1* fornece para a demanda final
    - Y_2 : quanto o setor *2* fornece para a demanda final
    - Y_n: quanto o setor *n* fornece para a demanda final

Modelo IP

- Coluna da MIP: de onde vêm as aquisições de cada setor:
  - Aquisições do próprio setor e/ou outros setores;
    - X_{11}: quanto o setor 1 compra do próprio setor 1
    - X_{21}: quanto o setor 1 compra do setor 2
    - X_{n1}: quanto o setor 1 compra do setor n
  - Valor Adicionado;
  - Depreciação;
  - Impostos Indiretos Líquidos.

Suposições:

- Divisão da economia em *n* setores;
- X_i =
- z_{ij} =
- Y_i =

$$X_i = z_{i1} + z_{i2} + \ldots + z_{ii} + \ldots + z_{in} + Y_i$$

Suposições:

- Notar que:
  - A demanda do setor *j* por insumos produzidos nos outros setores depende do que será produzido no próprio setor;
  - Demanda final pelo produto do setor *j* (famílias, governo, exportação, FBKF) dependerá de decisões estratégicas, individuais, gostos e preferências.

Exemplo Numérico

Considerando economia fechada e sem a presença do governo

		Demanda Intermediária					
		Setor 1	Setor 2	Setor 3	Subtotal	Dem. Final	Total
Origem Insumos	Setor 1	100	400	250		400	
	Setor 2	150	100	400		350	
	Setor 3	600	200	300		500	
	Subtotal						
	V.A.						
	Total						

Sequência de Equações:

$$X_1 = z_{11} + z_{12} + z_{13} + \dots + z_{1n} + Y_1$$
$$X_2 = z_{21} + z_{22} + z_{23} + \dots + z_{2n} + Y_2$$
$$\vdots$$
$$X_i = z_{i1} + z_{i2} + z_{i3} + \dots + z_{in} + Y_i$$
$$\vdots$$
$$X_n = z_{n1} + z_{n2} + z_{n3} + \dots + z_{nn} + Y_n$$

Coeficientes Técnicos

Coeficiente de insumo-produto ou coeficiente direto:

- participação (monetária) do insumo do setor i para produzir 1 unidade (monetária) do setor j

$$a_{ij} = \frac{z_{ij}}{X_j}$$

$$z_{ij} = a_{ij} \cdot X_j$$

MIP

- Coeficiente técnico é considerado constante;
- Proporção fixa entre o produto e seus insumos (não há substituição insumos);
- Despreza-se economias de escala, assumindo retornos constantes à escala e função de produção de Leontieff;

∴ Só haverá ⇑ produto final se ⇑insumos for na proporção fixa (⇑ somente em 1 insumo é inútil!)

		Demanda Intermediária					
		Setor 1	Setor 2	Setor 3	Subtotal	Dem. Final	Total
Origem Insumos	Setor 1	100	400	250	750	400	1.150
	Setor 2	150	100	400	650	350	1.000
	Setor 3	600	200	300	1.100	500	1.600
	Subtotal	850	700	950	2.500	1.250	3.750
	V.A.	300	300	650	1.250		
	Total	1.150	1.000	1.600	3.750		

Matriz de Coeficientes Técnicos

$$a_{ij} = \frac{z_{ij}}{X_j}$$

1a. coluna

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{X_1} = \frac{100}{1150} = 0{,}0870$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{X_1} =$$

$$a_{31} = \frac{x_{31}}{X_1} =$$

2a. coluna

$$a_{12} = \frac{x_{12}}{X_2} = \frac{400}{1000} = 0{,}400$$

$$a_{22} = \frac{x_{22}}{X_2} =$$

$$a_{32} = \frac{x_{32}}{X_2} =$$

3a. coluna

$$a_{13} = \frac{x_{13}}{X3} = \frac{250}{1600} = 0{,}1563$$

$$a_{23} = \frac{x_{23}}{X_3} =$$

$$a_{33} = \frac{x_{33}}{X_3} =$$

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}0870 & 0{,}4000 & 0{,}1563 \\ 0{,}1304 & 0{,}1000 & 0{,}2500 \\ 0{,}5217 & 0{,}2000 & 0{,}1875 \end{bmatrix}$$

Para produzir R$1,00 de produto do Setor 1, este mesmo setor precisa adquirir:

- R$ 0,0870 de produtos do próprio Setor 1 +
- R$ 0,1304 de produtos do Setor 2 +
- R$ 0,5217 de produtos do Setor 3
- Diferença = R$ 0,26 = Valor Adicionado (300/1150)

Sistema de Equações

$$X_1 = z_{11} + z_{12} + z_{13} + \ldots + z_{1n} + Y_1$$
$$X_2 = z_{21} + z_{22} + z_{23} + \ldots + z_{2n} + Y_2$$
$$\vdots$$
$$X_i = z_{i1} + z_{i2} + z_{i3} + \ldots + z_{in} + Y_i$$
$$\vdots$$
$$X_n = z_{n1} + z_{n2} + z_{n3} + \ldots + z_{nn} + Y_n$$

$$a_{ij} = \frac{z_{ij}}{X_j}$$

$$z_{ij} = a_{ij} \cdot X_j$$

Substituindo: $z_{ij} = a_{ij} \cdot X_j$

$$X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots + a_{1n}X_n + Y_1$$
$$X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \ldots + a_{2n}X_n + Y_2$$
$$\vdots$$
$$X_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + \ldots + a_{in}X_n + Y_i$$
$$\vdots$$
$$X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 + \ldots + a_{nn}X_n + Y_n$$

Em termos matriciais:

$$A_{(nxn)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2i} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ii} & & a_{in} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X_{(nX1)} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad Y_{(nX1)} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$X = AX + Y$$

Matriz Leontieff

$$\underbrace{X}_{\text{Matriz Produção}} = \underbrace{A}_{\text{Matriz Coeficientes Técnicos}} \cdot \underbrace{X}_{\text{Matriz Produção}} + \underbrace{Y}_{\text{Vetor Demanda Final}}$$

$$X - AX = Y$$

$$\underbrace{(I - A)}_{\text{Matriz Leontieff}} \cdot X = Y$$

$$X = \underbrace{(I - A)^{-1}}_{\textit{Matriz Inversa Leontieff}} \cdot Y$$

Capta os efeitos diretos e indiretos de mudanças na demanda final sobre a produção dos *n* setores

$$X = (I - A)^{-1}\, Y$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & (1-a_{33}) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}0870 & 0{,}4000 & 0{,}1563 \\ 0{,}1304 & 0{,}1000 & 0{,}2500 \\ 0{,}5217 & 0{,}2000 & 0{,}1875 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I - A]^{-1} = \begin{bmatrix} (1-0{,}0870) & -0{,}4000 & -0{,}1563 \\ -0{,}1304 & (1-0{,}1000) & -0{,}2500 \\ -0{,}5217 & -0{,}2000 & (1-0{,}1875) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$[I - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}9130 & -0{,}4000 & -0{,}1563 \\ -0{,}1304 & 0{,}9000 & -0{,}2500 \\ -0{,}5217 & -0{,}2000 & 0{,}8125 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$[I - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}5147 & 0{,}7921 & 0{,}5351 \\ 0{,}5256 & 1{,}4680 & 0{,}5529 \\ 1{,}1018 & 0{,}8699 & 1{,}7108 \end{bmatrix}$$

$$X = [I - A]^{-1}\, Y$$

Vamos supor que ocorre aumento na demanda final pelo produto do setor 1 da ordem de $100. Qual o impacto total nesta economia?

$$[I - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}5147 & 0{,}7921 & 0{,}5351 \\ 0{,}5256 & 1{,}4680 & 0{,}5529 \\ 1{,}1018 & 0{,}8699 & 1{,}7108 \end{bmatrix}$$

$$X = [I - A]^{-1}\, Y$$

Passou de R$400 para R$ 500

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5147 & 0{,}7921 & 0{,}5351 \\ 0{,}5256 & 1{,}4680 & 0{,}5529 \\ 1{,}1018 & 0{,}8699 & 1{,}7108 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 500 \\ 350 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5147 & 0,7921 & 0,5351 \\ 0,5256 & 1,4680 & 0,5529 \\ 1,1018 & 0,8699 & 1,7108 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 500 \\ 350 \\ 500 \end{bmatrix}$$

X_1 = 1.302 (antes: 1150)

X_2= 1.053 (antes: 1000)

X3 = 1.710 (antes: 1600)

Como completar a matriz (achar os z_{ij})?

$$z_{ij} = a_{ij} \cdot X_j$$

Origem Insumos		Demanda Intermediária					
		Setor 1	Setor 2	Setor 3	Subtotal	Dem. Final	Total
	Setor 1	113 (0,087)(1302	421 (0,400)(1053	268 (0,1563)(1710	802 113+421+268	500	1.302
	Setor 2	170 (0,1304)(1302	105 (0,100)(1053	428 (0,2500)(1710	703 170+105+428	350	1.053
	Setor 3	679 (0,5217)(1302	211 (0,200)(1053	321 (0,1875)(1710	1210 679+211+321	500	1.710
	Subtotal	962 113+170+679	737 421+105+211	1016 268+428+321	2715 802+703+1210	1.350	4.065
	V.A.	340 1302-962	316 1053-737	694 1710-1016	1350 4065-2715		
	Total	1.302	1.053	1.710	4.065		

Origem Insumos		Demanda Intermediária					
		Setor 1	Setor 2	Setor 3	Subtotal	Dem. Final	Total
	Setor 1	100	400	250	750	400	1.150
	Setor 2	150	100	400	650	350	1.000
	Setor 3	600	200	300	1.100	500	1.600
	Subtotal	850	700	950	2.500	1.250	3.750
	V.A.	300	300	650	1.250		
	Total	1.150	1.000	1.600	3.750		

Aumento de R$100 na demanda final do setor 3: causou impacto na economia inteira

Origem Insumos		Demanda Intermediária					
		Setor 1	Setor 2	Setor 3	Subtotal	Dem. Final	Total
	Setor 1	113	421	268	802	500	1.302
	Setor 2	170	105	428	703	350	1.053
	Setor 3	679	211	320	1.210	500	1.710
	Subtotal	962	737	1.016	2.715	1.350	4.065
	V.A.	340	316	694	1.350		
	Total	1.302	1.053	1.710	4.065		

Bibliografia Consultada

- GUILHOTO, J.J.M. **Leontief e Insumo Produto: Antecedentes, Princípios e Evolução**. Piracicaba: ESALQ, 2001. 43p. (Série Seminários da Pós-Graduação, 15)
- ROSSETTI, J.P. **Introdução à Economia.** São Paulo: Atlas, 1997.
- ROSSETTI, J.P. **Contabilidade Social.** São Paulo: Altas, 1995.
- ROSSETTI, J.P. **Política e Programação Econômicas**. São Paulo: Atlas, 1991.
- MULLER, R.E.; BLAIR, P.D. **Input-Output Analysis: Foundations and Extensions**. New Jersey: Prentice-Hall, 1985.