

Matemática para Economistas LES 201

Aulas 5 e 6

Matrizes

Chiang Capítulos 4 e 5

Márcia A.F. Dias de Moraes

Matrizes

Usos em economia

- 1) Resolução sistemas lineares
- 2) Econometria
- 3) Matriz Insumo Produto

Álgebra Matricial – Conceitos Básicos

- Matriz: toda tabela de números dispostos em:
 - filas horizontais (ou linhas)
 - verticais (ou colunas)
- Se a tabela tiver m linhas e n colunas, dizemos que a matriz é retangular do tipo (ou de ordem)
 - $m \times n$ (lê-se m por n)
- As linhas são numeradas de cima para baixo
- As colunas são numeradas da esquerda para a direita
- Os elementos de uma matriz são geralmente representados entre colchetes
- A indicação de uma matriz é feita por uma letra maiúscula do alfabeto.

Matrizes – Conceitos Básicos

1. Ordem da Matriz

Matriz ($m \times n$)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix} \quad \text{Ordem: } (2 \times 3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{Ordem: } (3 \times 2)$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Ordem: } (2 \times 2)$$

Matrizes – Conceitos Básicos

2) Vetor linha: matriz de uma única linha ($m=1$)

$$A = [1 \ 5 \ 9] \quad (1 \times 3)$$

$$D = [d_{11} \ d_{12} \ \dots \ d_{1n}] \quad (1 \times n)$$

3) Vetor coluna: matriz de uma única coluna ($n=1$)

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} \quad (m \times 1)$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3 \times 1)$$

Matrizes – Conceitos Básicos

4) Os elementos de uma matriz:

- representados por meio de letras minúsculas do alfabeto composta de dois índices: o primeiro indicando a linha, e o segundo, a coluna à qual pertence o elemento.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a_{11} = & a_{12} = & a_{13} = \\ a_{21} = & a_{22} = & a_{23} = \end{matrix}$$

Matrizes – Conceitos Básicos

5) Matriz Quadrada: $n = m$

- número de linhas = número de colunas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

6) Diagonal principal ($i = j$) e Diagonal secundária: $i + j = n + 1$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matrizes – Conceitos Básicos

7) Matriz Triangular: abaixo ou acima da diagonal principal todos os elementos são nulos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrizes – Conceitos Básicos

8) Matriz Diagonal: matriz quadrada na qual todos os elementos fora da diagonal principal são nulos

- uma matriz A é diagonal se $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes – Conceitos Básicos

9) Matriz Nula: todos os elementos são nulos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é matriz nula tipo 2 x 3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matriz nula de ordem 2.

Matrizes – Conceitos Básicos

10) Matriz Identidade: matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal valem 1 e os demais valem 0

Matriz identidade de ordem n é indicada por I_n

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AI = IA = A$$

Matrizes – Conceitos Básicos

Matriz Identidade – Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{(2 \times 3)}$$

então :

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

• A dimensão da matriz identidade difere se estiver **pré** ou **pós** multiplicando a matriz A

• É a mesma se a matriz A for quadrada

Matrizes – Conceitos Básicos

11) Matriz Transposta (A^t ou A'):

Dada a matriz A, de dimensão ($m \times n$) a matriz transposta de A (A^t ou A'), de dimensão ($n \times m$) é a que se obtém trocando as linhas por colunas (a 1a. Linha de A corresponde a 1a. coluna de A^t)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

(2x3) (3x2)

Matrizes – Conceitos Básicos

Propriedades da Matriz Transposta (A^t)

- a) $(A^t)^t = A$
- b) $(A + B)^t = A^t + B^t$
- c) $(ABC)^t = C^t B^t A^t$ (desde que respeitadas as compatibilidades dimensionais)
- d) Caso especial: $A^t = A$ se:
 - A é matriz simétrica ($a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i \neq j$)

Matrizes – Conceitos Básicos

A é matriz simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i \neq j$

Propriedades Simétrica: $A = A^t$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Operações e Relações Algébricas

• Sejam: $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$
 $i = 1, 2, 3, \dots, m$
 $j = 1, 2, 3, \dots, n$

a) Soma e Subtração de Matrizes:

- Operações são feitas ao nível de elementos
- Matrizes tem que ter mesmas dimensões
- $A + B = C$, onde $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$\begin{bmatrix} -6 & 1 & 5 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 \\ -6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Operações e Relações Algébricas

a) Soma e Subtração de Matrizes:

- Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$C = A + B =$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

$D = A - B =$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Operações e Relações Algébricas

b) Multiplicação de Matrizes:

b.1) Multiplicação por escalar γ

$$\gamma A = A \gamma = \begin{bmatrix} \gamma a_{11} & \gamma a_{12} & \dots & \gamma a_{1n} \\ \gamma a_{21} & \gamma a_{22} & \dots & \gamma a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma a_{m1} & \gamma a_{m2} & \dots & \gamma a_{mn} \end{bmatrix}$$

Operações e Relações Algébricas

b.2) Multiplicação de duas matrizes

Dadas duas matrizes A e B, com dimensões $(m_1 \times n_1)$ e $(m_2 \times n_2)$, a matriz resultante $C = A.B$:

- Só existirá se $n_1 = m_2$
- Terá dimensão $m_1 \times n_2$

A	B	C
2 x 5	5 x 3	
1 x 7	7 x 2	
3 x 3	3 x 3	
3 x 4	3 x 4	

- (Vetor linha) x (vetor coluna) = escalar (1xn) (nx1)

Operações e Relações Algébricas

b.2) Multiplicação de duas matrizes

- O elemento x_{ij} da matriz C será o resultado da soma dos produtos dos elementos da linha i de A pela coluna j de B

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Operações e Relações Algébricas

b.2) Multiplicação de duas matrizes

- Geralmente a multiplicação de matrizes **NÃO** é comutativa: $AB \neq BA$

$$- A_{(2 \times 2)} B_{(2 \times 3)} = C_{(2 \times 3)}$$

$$- B_{(2 \times 3)} A_{(2 \times 2)} : \text{Não dá para multiplicar}$$

- Se:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 13 & 8 \end{bmatrix}$$

Propriedades das Operações

A) Propriedades da Adição

1. Comutativa: $A + B = B + A$
2. Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$

B) Propriedades da Multiplicação

- 1) Associativa: $ABC = (AB)C = A(BC)$
- 2) Distributiva pela esquerda: $A(B + C) = AB + AC$
- 3) Distributiva pela direita: $(B + C)A = BA + CA$
(desde que as compatibilidades dimensionais sejam observadas)

Propriedades das Operações

- 4) Comutativa: **NÃO** ($AB \neq BA$)

(somente quando uma das matrizes for a matriz Identidade)

- 5) Se k é um número: $(kA)B = A(kB) = k(AB)$.

- 6)

$$A_n^K = \underbrace{A.A.A...A}_{K \text{ vezes}}$$

Quando $A^2 = A$: matriz A é idempotente

Determinante

- É um **número** associado à dada matriz, obtido por determinada regra
- Somente para **matriz quadrada**
- A regra de Cramer só é aplicada na prática em sistemas com poucas equações, já que para sistemas com grande número de equações e de incógnitas são usados métodos mais simples e práticos

Cálculo do Determinante

a) Matriz de ordem 1

Seja

$$M = [a_{11}]$$

Definimos determinante de m como sendo o próprio numero a_{11} isto é:

$$\det M = |a_{11}| = a_{11}$$

Cálculo do determinante

b) Matriz de ordem 2:

Seja

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

O determinante de uma matriz de ordem 2 é a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Cálculo do Determinante

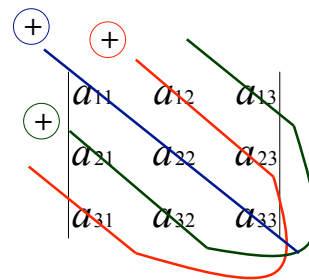
Matriz de ordem 2 - Exemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 7 = 5$$

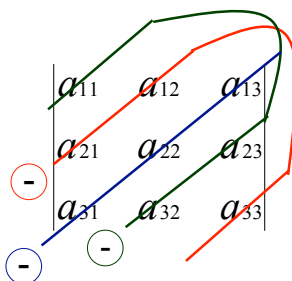
$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -15 - (-8) = -7$$

c) Matriz de ordem 3

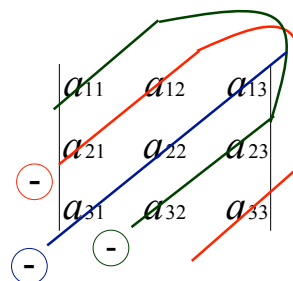
Regra de Saurus ("paralelo ponta")



$$\det M = + a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{21}$$



$$\det M = + a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$



$$\det M = + a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$

Cálculo do Determinante

4) Matriz de ordem n qualquer

- O valor de um determinante de uma matriz **M** de ordem **n** qualquer pode ser obtido pela *Expansão de Laplace*, a partir de qualquer linha ou coluna da matriz **M**
- Determinante: é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos co-fatores
- Seja **M** uma matriz quadrada de ordem **n** e **a_{ij}** um elemento desta matriz
- Chamamos de co-fator de **a_{ij}** o produto de **(-1)^{i+j}** pelo determinante da matriz que se obtém suprimindo-se a linha **i** e a coluna **j** de **M**.

Co-fator ou Complemento Algébrico

Seja a matriz **M** =

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \quad |4| = 4$$

O cofator de 5 é igual a $(-1)^{2+1}$ vezes o determinante da matriz suprimindo-se a coluna e a linha do elemento 5.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |4| = -4$$

Seja a matriz **M** =

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2$$

O cofator de 4 é igual a $(-1)^{3+2}$ vezes o determinante da matriz suprimindo-se a coluna e a linha do elemento 4.

$$A_{32} = (-1)^{3+2} (2) = -2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

Expansão pela 1a. coluna
Escolher linha COM MAIOR NUMERO DE ZEROS

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 3(18 + 3 + 4 - 2 - 12 - 9) = 6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

Propriedades dos Determinantes

- $\det A = \det A^t$
- Trocando duas filas de posição, altera somente o sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -3 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 3$$

Propriedades dos Determinantes

- 3) Se todos os elementos de uma linha ou coluna forem iguais a zero, o determinante = 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

- 4) Uma matriz com duas filas iguais, ou uma fila igual ao múltiplo da outra tem determinante = 0

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \\ 6 & 3 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

Propriedades dos Determinantes

- 5) Se A é diagonal ou triangular:

$$|A| = \prod a_{ii} \quad \text{Produtório dos elementos da diagonal principal}$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = a.b.c.d$$

Propriedades dos Determinantes

- 6) Multiplicando os elementos de uma fila por α , o determinante fica multiplicado por α

$$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

7) $|AB| = |A| \cdot |B|$

Matriz Inversa (A^{-1})

Se para uma matriz quadrada $A_{n \times n}$ existir uma matriz quadrada $B_{n \times n}$, tal que:

$$A \cdot B = I = B \cdot A$$

Diz-se que B é a **matriz inversa** de A.

Assim:

$$A^{-1}A = A A^{-1} = I_n$$

Sendo que A^{-1} existe se e somente se $|A| \neq 0$

Matriz Inversa (A^{-1})

Exemplo: Seja a matriz A

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{tem inversa}$$

$$A \text{ inversa de } A = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} \text{ pois :}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Matriz Inversa (A^{-1})

- a) A matriz inversa só é definida para matrizes quadradas
- b) Se **NÃO EXISTIR** A^{-1} , A é chamada de **MATRIZ SINGULAR**
Se **EXISTIR** A^{-1} , A é chamada de **MATRIZ NÃO SINGULAR**
- c) Se EXISTIR A^{-1} ela é única
- d) $(A^{-1})^{-1} = A$
- e) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- f) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (inversa transposta = transposta inversa)

Cálculo da Matriz Inversa

Usando cofatores

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \frac{1}{|A|} [\text{cof}(A)]^t$$

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \underbrace{|M_{ij}|}_{\text{Menor da Matriz A}}$$

É O DETERMINANTE DA MATRIZ RESULTANTE
AO SE TIRAR A LINHA i E A COLUNA j

Cálculo da Matriz Inversa

Ex: Calcular a inversa da Matriz A

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Cálculo da Matriz Inversa

Ex: Calcule a inversa, se existir

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$