Controle Digital

Notas de Aula de Teoria e de Laboratório

Manoel L. Aguiar

19 de Julho de 2016

Conteúdo

Capítulo 1

ASPECTOS GERAIS DA DISCIPLINA CONTROLE DIGITAL

1.1 INTRODUÇÃO

A grande maioria de processos onde é necessária uma ação de controle apresenta um comportamento dinâmico determinado por variáveis que são contínuas no tempo.

Variáveis aqui devem ser entendidas como grandezas físicas mensuráveis ou não com as quais se representa ou se descreve um determinado processo físico por um modelo matemático. Tais grandezas são, por exemplo, corrente ou tensão elétrica, temperatura, pressão, concentração, velocidade ou posição, etc. Tais grandezas são passíveis de uma conversão por sensores que podem fornecer um sinal elétrico proporcional a essas grandezas. Desse modo, define-se uma classe de aplicação de ações de controle, as quais podem ser realizadas através de dispositivos ou circuitos elétrico/eletrônicos lineares e são característicos dos procedimentos denominados Controle Analógico.

A realização de estruturas de controle no sentido analógica se faz com a utilização dos dispositivos ditos analógicos e toda ação de controle necessária também é processada de forma analógica. Com dispositivos analógicos passivos ou ativos é possível a realização de uma infinidade de operações matemáticas necessárias para produzir uma determinada ação de controle.

Em geral tais ações de controle são reproduzidas por operações de integração, derivação e somatórios que podem ser implementadas com dispositivos analógicos tais como resistores, capacitores, indutores e Amplificadores Operacionais. Se um determinado processo é não-linear ou necessita de uma linearização, isso pode implicar na necessidade se efetuar analogicamente uma operação matemática não linear, por exemplo uma operação $sen(x)$, $log(x)$, etc. A realização de tais operações por meio de dispositivos analógicos pode ser extremamente difícil e complexa em termos de ajustes. Mesmo para aplicação de conceitos modernos da teoria de controle como controle ótimo, adaptativo ou identificação de sistemas, uma solução analógica se tornaria extremamente dispendiosa ou irrealizável em virtude da necessidade da realização de operações matriciais e não lineares. É exatamente neste ponto que se encontra a limitação do emprego de estruturas de controle analógica. Certamente, para sistemas simples ou onde não se requer grande manipulação de sinais, o controle dito analógico ainda encontra vasto campo de utilização.

A utilização de microcomputadores para implementação de estruturas de controle teve início já por volta de 1960. Porém computadores dessa época não eram apropriados para aplicação industrial, pois tinham uma arquitetura voltada para gerenciamento de dados, eram relativamente lentos e não se dispunha de *softwares* adequados para a realização de uma estrutura de controle. Já na década de 70 surgiram os chamados microprocessadores com uma arquitetura digital voltada para um interfaceamento com o mundo externo do ambiente digital. Essa alteração decorreu da necessidade de se conectar o processo digital (o microprocessador) com o processo analógico a ser controlado. O microprocessador passou a ser um elo integrante da malha de controle. Na figura 1.1 é representado um sistema de controle dito digital com o microprocessador como um elemento da malha de controle.

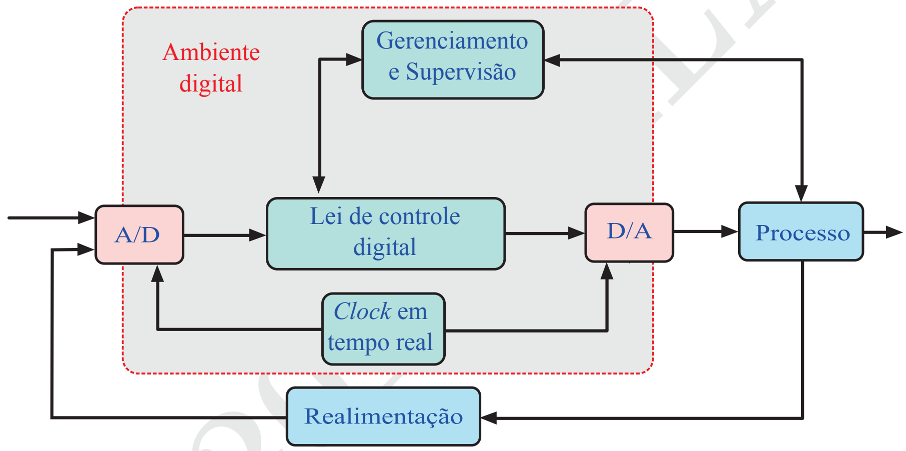


Figura 1.1: Diagrama geral de um controle digital.

Para a efetivação deste tipo de controle torna-se necessário a compatibilização dos vários sinais nos ambientes analógicos e digital. No ambiente digital, ou seja, no microprocessador opera-se com números, representados em forma binária, os quais podem ser manipulados como se queira através de *softwares* específicos. No ambiente analógico os sinais representam grandezas físicas e contínuas no tempo e que só podem, se necessário, ser processadas por dispositivos ou circuitos analógicos. A compatibilização destes ambientes é realizada pelo bloco A/D para a conversão Analógica-Digital e pelo bloco D/A para a conversão Digital-Analógica. Determinados processos ou ações de controle são inerentemente do tipo digital, não necessitando propriamente uma conversão. Nesse caso, tais processos são ditos naturalmente amostrados.

A integração de um microprocessador na estrutura de controle possibilita a execução de outras tarefas além do controle propriamente, tais como supervisão do processo, emissão de relatórios, proteção, alarmes, coordenação, etc permitindo a realização de sistemas com um alto grau de automatização. Outra característica muito importante é o grau de flexibilidade dos processos digitais. Isto é, um determinado processo pode ser redimensionado para fornecer um melhor rendimento ou performance simplesmente através da reprogramação do algoritmo de controle ou de supervisão.

Uma primeira implicação da incorporação do microprocessador na malha de controle é que no ambiente digital as operações matemáticas que devem ser realizadas necessitam de um determinado tempo para serem processadas pelo microprocessador. Durante esse período o microprocessador fica "desligado" do ambiente externo analógico. Desse modo a conexão efetiva entre o microprocessador e o processo é realizada apenas em instantes determinados e periódicos, de onde surge então o conceito de amostragem ou discretização. Entre dois instantes de amostragem é realizada a conversão A/D do sinal a ser processado, o microprocessador efetua o algoritmo de controle e fornece o comando de controle para a conversão D/A. Todo esse processo deve sincronizado e realizado a cada período de amostragem.

A eficiência, performance ou realizabilidade do processo poderá então ser influenciada pelas características do microprocessador em questão. Se o período de amostragem for muito longo o sistema global poderá até se tornar instável. Esse fato será abordado em breve na sequência do curso através da análise do sistema discreto por meio de uma ferramenta matemática denominada Transformada-Z. Por outro lado se o microprocessador puder realizar o algoritmo de controle com intervalo de tempo bastante pequeno pode-se abordar o processo todo como se fosse contínuo e realizar toda síntese do controle no âmbito da Transformada de Laplace.

A implementação de um controle digital atualmente é realizada por micro-processadores, incorporando unidades de processamento juntamente com unidades de memória e unidades de comunicação integradas em um único *Chip*. Isso trouxe a vantagem de grande redução de custo. Outras denominações são os chamados microcontroladores ou microcomputadores dedicados. Nesse caso os *chips* integram além das unidades mencionadas, as unidades de conversão A/D's, D/A's e até unidades para geração de modulação PWM. Isso acarreta nova redução de custo pelos processos de fabricação em massa assim como enorme redução de *Hardware* necessário.

Atualmente com o uso de microcomputadores, tornou-se possível a realização de controle de processos das mais variadas complexidades. Se para um determinado processo um único microcomputador não é capaz de realizar um algoritmo de controle num intervalo de tempo aceitável, é possível a conexão de vários microcomputadores realizando tarefas específicas do mesmo algoritmo em paralelo, reduzindo desta forma o tempo de amostragem. Neste caso tais microcomputadores necessitam ainda de uma interface adequada para comunicação com outras unidades. Um exemplo comum hoje em dia, é por exemplo, utilizado para controle de robôs em linhas de montagem, onde é alocado um microcontrolador para cada braço e cada um deles é interligado entre si e com um microcontrolador principal que supervisiona todo o processo.

A simples substituição de uma estrutura de controle analógica por um controle digital pode não ser interessante do ponto de vista econômico. O grande interesse na utilização de controle por microcomputadores, é a possibilidade de se realizar algoritmos complexos de controle, como controle ótimo e adaptativo. Controle ótimo e adaptativo são conceitos já há muito tempo estudado na teoria, porém aplicações efetivas de tais conceitos só se tornaram possíveis com a utilização de microcomputadores devido ao enorme esforço computacional exigido. Para processos não-lineares ou variantes no tempo é extremamente difícil se projetar um controle adequado que atenda a todas as exigências de uma determinada performance. Através de algoritmos de identificação e com o uso de microcomputadores é possível a monitoração do processo e, qualquer variação paramétrica ou estrutural no processo será detectada e uma alteração adequada no algoritmo pode ser realizada de modo a atender os requisitos de performance pré-determinados.

Na figura 1.2 é esquematizada um exemplo de uma estrutura de controle adaptativo, na qual é exigido grande esforço computacional, que para a maioria dos casos é irrealizável por meios analógicos. Este tipo de controle é tratado e estudado em cursos específicos. Nesta figura encontra-se em destacados com fundo azul os blocos que serão objeto de estudo no curso de Controle Digital e que portanto serão de grande importância para a especialização em sistemas de controle, bem como a realização das demais tarefas ilustradas na Fig; 1.2;

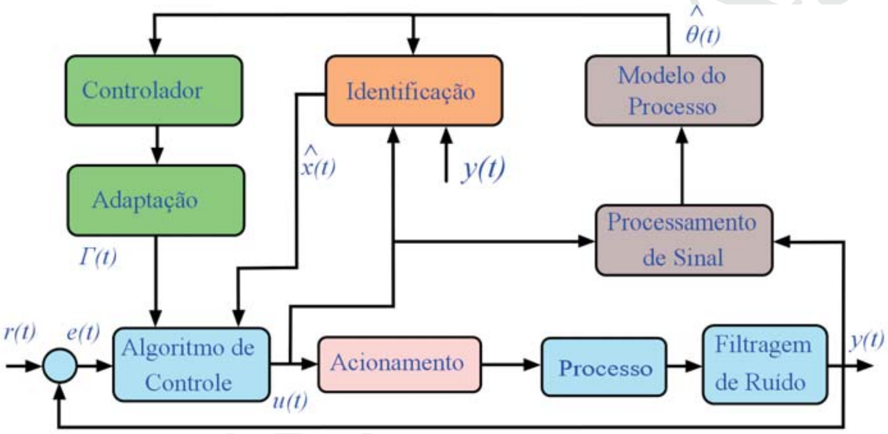


Figura 1.2: Sistema de controle dotado de processos de identificação e de adaptação

1.2 Implicações da utilização do microcomputador

Os sinais digitais ou discretos apresentam uma descrição matemática complexa em virtude da natureza descontínua de sua evolução temporal. Já os sinais contínuos podem ser bem descritos por aproximações de um comportamento discreto temporal. Somente com a adoção de intervalos de tempo infinitesimal é que as representações contínuas e discreta de um sinal serão praticamente idênticas. Este aspecto direciona que as análises de sistemas envolvendo entidades contínuas e discretas sejam realizadas no âmbito do tempo discreto.

Desta forma, como implicação direta da incorporação do microcomputador na malha de controle é que o processo como um todo deve ser analisado como um processo discreto, isto é, as varáveis envolvidas no processo serão da forma discreta. Desta forma, torna-se necessário o conhecimento de ferramentas matemáticas adequadas para se proceder em primeiro lugar a representação de processos e sinais contínuos na forma discreta. Este procedimento é denominado discretização de sistemas. Em segundo lugar também se torna necessário o uso de ferramentas que permitam as análises e sínteses de controladores discretos. Tal ferramenta matemática se denomina Transformada - Z. Este tópico será objeto de estudo nas próximas aulas.

A utilização de um microcomputador para realização de controle requer a necessidade de novos elementos ou componentes de controle além daqueles conhecidos das técnicas de controle analógico. Componentes básicos de uma estrutura de controle com microcomputador são aqueles necessários para se realizar conversões A/D e D/A.

1.3 Revisão de Conceitos de Controle Analógico

Seja um processo de controle realimentado como representado na figura 1.3. Com relação ao controlador $G_c(s)$ indicado, há que estabelecer os objetivos do controlador, o tipo de controlador a ser usado, a técnica ou método de síntese ou projeto do mesmo, a forma ou tecnologia de implementação e as possíveis limitações, tais como consideradas na Tabela 1.1.

Objetivos do Controlador	Desempenho dinâmico e de regime Estabilidade Confiabilidade Flexibilidade Diagnósticos, Proteção, Supervisão
Controlador	Paramétricos P, PI ou PID Avanço-Atraso Realimentação de Estados
Metodologia de Síntese de Controladores	Alocação de Polos Resposta Temporal Lugar das Raízes Desempenho Dinâmico Desempenho em Regime Análise Frequencial (Bode-Nyquist) Alocação de Polos de Estados Critérios de otimização
Implementação	$G_c(s)$: Redes analógicas passivas ou ativas de circuitos eletrônicos analógicos (Amp.Ops ou transistores) em um módulo ou placa de circuito-impresso.
Limitações	Restrito a processos simples, lineares e observáveis

Tabela 1.1: Processos de controle contínuos

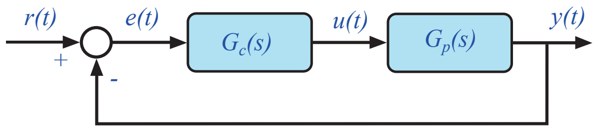


Figura 1.3: Configuração básica de um controle analógico realimentado.

1.4 Processo de Controle Digital

Por processo de controle digital entende-se, um processo cuja ação de controle seja gerada em um ambiente digital, por exemplo, em um microcomputador através de um determinado algoritmo, o qual pode ser programado em diversas linguagens de computação de alto ou baixo nível.

Com relação ao esquema de controle contínuo exemplificado na figura 1.3, a configuração de um controle digital pode ser esquematicamente representada como na figura 1.4.

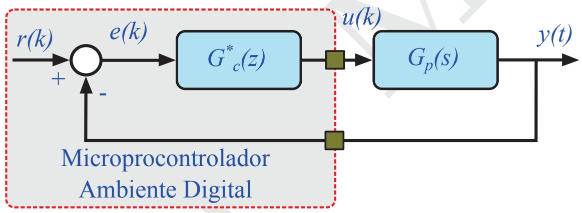


Figura 1.4: Configuração básica de um controle digital realimentado.

Para os casos de processos de controle digital consideram-se os mesmo índices de desempenho relacionados na Tabela 1.1. As propostas de estruturas de controladores, métodos de síntese e implementação são resumidos na Tabela 1.2.

1.5 Tópicos da disciplina

Estudar métodos, estratégias e ferramentas matemáticas para adaptar o processo contínuo (analógico) para ser controlado digitalmente, bem como, desenvolver métodos de síntese, análise de controladores digitais, simulação de sistemas com controle digital e implementação prática de controladores no ambiente das aulas de laboratório.

Considerando que os conceitos fundamentais de discretização, amostragem e relações de notações discretas foram assunto da disciplina Sel0343 Processamento Digital de Sinais, neste curso se fará apenas uma breve revisão destes tópicos associando os mesmos aos aspectos de controle.

Controladores	Além das conhecidas estruturas de controle analógico, é possível a execução de estruturas de controle ótimas, de controle adaptativo, algoritmos de identificação, além de estruturas de controle somente realizáveis com um controle digital, por exemplo: Controle *Dead-Beat*. Com um microcomputador associado à estrutura de controle é possível ainda a realização de ações de monitoração, diagnósticos de falhas e uma infinidade de procedimentos de proteção. No caso do controle digital, melhoramentos e/ou alterações da ação de controle se resumem em simples alteração a nível de programação.
Síntese de Controladores Digitais	Neste caso podem ser empregadas as mesmas técnicas dos controladores analógicos, além de outras estratégias exclusivas de processo discretos. Em alguns casos é possível o projeto dos controladores como sendo analógicos, os quais após uma operação de discretização dos mesmos, determinam o algoritmo discreto a ser programado no microcomputador.
Implementação	$G_c(z)$: Hardware Digital também usando circuitos e componentes eletrônicos digitais, sendo que a lei de controle é determinada por um algoritmo numérico e realizado através de algum *Software* específico.

Tabela 1.2: Processos digitais

Parte I

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE SISTEMAS DISCRETOS

Capítulo 2

REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS DISCRETOS E CLASSIFICAÇÃO DE SINAIS

2.1 Introdução

Para se processar uma grandeza analógica através de um microcomputador, é necessário introduzir um processo de amostragem da grandeza a ser processada (entrada) e posteriormente uma conversão desta amostra em uma quantidade digital. Após o processamento desta quantidade digital por um determinado algoritmo de controle, a quantidade processada que ainda é na forma digital deve ser fornecida ao processo analógico, através de um processo inverso que a converte em uma grandeza analógica (saída). Este processo de conversão pode ser representado como as etapas A/D na entrada e D/A-*Holder* na saída indicadas na figura 2.1.

O processo de amostragem para os sistemas de controle digital deve ser periódico, com período constante, aqui designado por T_0. A saída processada digitalmente será fornecida ao processo analógico também de forma periódica com o mesmo período T_0, porém isto ocorre de forma atrasada de um tempo T_R em relação ao instante de amostragem da entrada, que é o tempo necessário ao processo de conversão mais o processamento pelo algoritmo de controle.

Na execução do processamento digital ocorre uma interrupção de tempo real que determina o início de um cilo do algoritmo. No instante desta interrupção ocorre a execução da leitura da entrada e a escrita da ação de controle avaliada no intervalo anterior. Normalmente os tempos do processo de conversão dos dispositivos atuais são muito pequenos em comparação com T_0 e desde que o período de amostragem deve ser muito menor que as constantes de tempo do processo a ser controlado, assume-se que a entrada e saída são amostradas periódica- e sincronamente.

De acordo com a figura 1.4, um processo controlado sempre envolve uma realimentação da saída que deve ser comparada com a referência de entrada. Dessa forma um processo de controle digital e realimentado englobando os estágios de conversão A/D e D/A discutidos na introdução do curso e apresentados na figura 2.1, pode ser

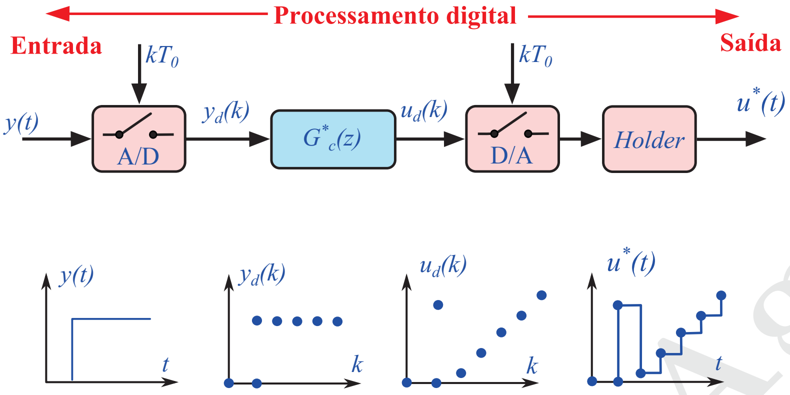


Figura 2.1: Amostragem e caracterização de sinais em processos discretos.

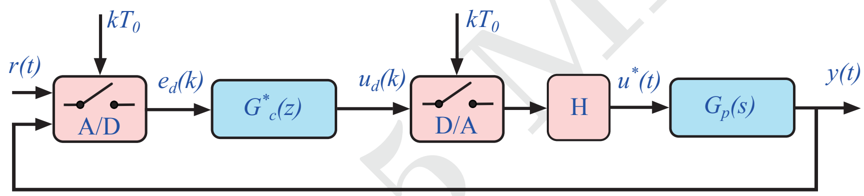


Figura 2.2: Caracterização dos amostradores em controle digital realimentado.

representado como na figura 2.2.

2.2 Classificação de Sinais e Características de Quantização

Aqui serão apresentados aspectos de sinais quanto à quantização e respectivas formas gerais de representação. De forma geral os sinais representados a seguir podem estar relacionados em diversos pontos no processo de amostragem.

2.2.1 Sinal Contínuo

Um sinal contínuo é tal que, uma grandeza nesta forma é definida para qualquer instante de tempo, tal como na figura 2.3

De forma generalizada, um sinal contínuo pode ser descrito por:

$$s(t) = f(t) \qquad \vee \quad t \in \Re^{+} \tag{2.1}$$

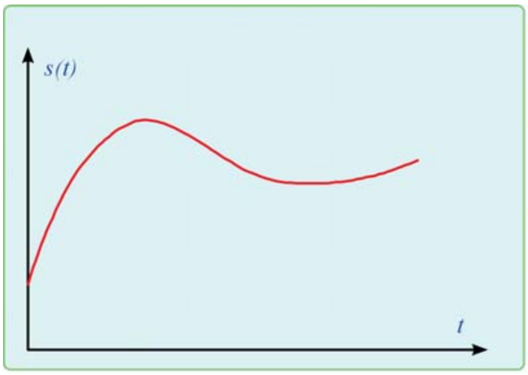


Figura 2.3: Caracterização de sinal contínuo.

Sinal com amplitude discreta

Este tipo de sinal é tal que, em relação à sua forma original contínua, apresenta apenas valores discretos em amplitude. Dependendo do nível de quantização em amplitude pode-se obter uma boa aproximação ou não. Neste caso os intervalos de tempo em que ocorrem a discretização podem ser diferentes entre si.

Uma representação deste tipo de sinal pode ser dada por:

$$s_1(t) = \begin{cases} A_n & \mathcal{A}mpl[f(t)] = A_n \\ A_{n-1} & A_{N-1} \ \leq \ \mathcal{A}mpl[f(t)] \ \leq \ A_n \end{cases} \tag{2.2}$$

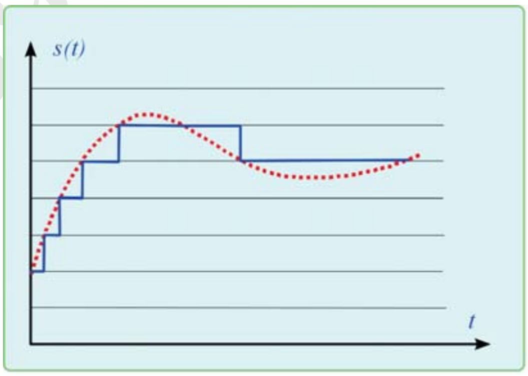


Figura 2.4: Sinal amostrado em 8 níveis (3 bits de resolução) de amplitude discreta.

Sinal tipo Tempo Discreto

Neste caso, o sinal somente é definido pontualmente em determinados instantes de tempo normalmente espaçados T_0 entre si. Aqui assume-se que a amplitude é exata.

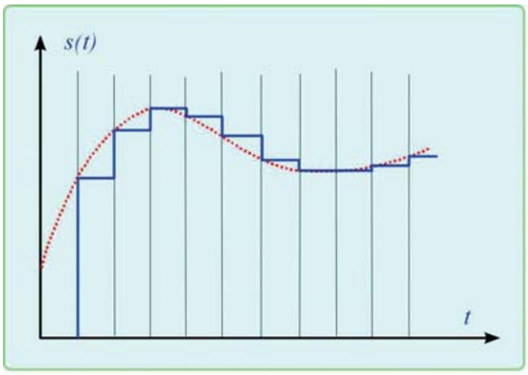


Figura 2.5: Sinal amostrado com o tempo.

Um sinal deste tipo será descrito por:

$$s_2(t) = s_2^*(k\ T_0) = \begin{cases} f(k\ T_0) & t = k\ T_0 \\ f((k+1)\ T_0) & k\ T_0\ \leq\ t\ \leq\ (k+1)\ T_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Sinal com Amplitude e Tempo discreto - Digital (Discreto)

Para tais sinais, ocorre uma quantização tanto em tempo quanto em amplitude e determina o que se chama de sinal digital.

Figura 2.6: Sinal amostrado em amplitude e no tempo : Digital.

Uma representação matemática deste tipo de sinal poderia ser dada por:

$$s_3(t) = f^*(A[k\ T_0], k\ T_0) = \begin{cases} \mathcal{A}mpl[f(k\ T_0)] & t = k\ T_0 \\ \\ \mathcal{A}mpl[f((k+1)\ T_0)] & k\ T_0\ \leq\ t\ \leq\ (k+1)\ T_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Normalmente, no ambiente digital que representa o microcomputador, o valor digital de $s(t)$ não será nulo entre os instantes de amostragem, pois estará armazenado em uma variável (posição de memória) como será visto oportunamente.

Desde que nos dispositivos modernos de conversão A/D ou D/A, o número de níveis de quantização é suficientemente grande, a quantização em amplitude deixa de ser problema. Atualmente são disponíveis conversores que fornecem até níveis de quantização. Dessa forma um sinal digital (discreto) passa a ser função apenas da quantização no tempo, pois nestes mesmos dispositivos, o tempo de conversão são muito menores que o período de amostragem.

2.3 Tratamento matemático do sinal amostrado (discreto)

Através do tratamento matemático do sinal digital, define os conceitos fundamentais dos processos discretos. Através deste tratamento matemático pretende-se obter uma descrição matemática, o mais exato possível, do sinal tipo discreto, através do qual serão introduzidas as ferramentas necessárias à análise de um processo discreto. A seguir serão dadas várias formas de se representar matematicamente um sinal discreto.

2.3.1 Função Discreta

Considere-se um sinal contínuo e amostrado periodicamente por um *Sampler*, também conhecido com *Holder* ou Amostrador, como indicado na figura 2.7.

Matematicamente, pode se descrever o sinal amostrado $x_p(t)$ tal como:

$$x_p(t) = \begin{cases} x(t) & t = k\ T_0\ \leq\ t\ \leq k\ T_0 + h \\ \\ 0 & (k\ T_0 + h)\ \leq\ t\ \leq\ (k+1)\ T_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Caso $h << T_0$, a amostragem do sinal passa a ser representada por uma sequência de impulsos com amplitude igual a $x(k\ T_0)$ e a figura 2.7 pode ser substituída pela figura 2.8.

Neste caso, a nova representação matemática passa a ser:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(k\ T_0) & t = k\ T_0 \\ \\ 0 & (k\ T_0 + h)\ \leq\ t\ \leq\ (k+1)\ T_0 \end{cases} \qquad k = 0/^{\infty} \tag{2.6}$$

tal que $x_T(t)$ como definido pela Eq. (2.5), representa uma função discreta.

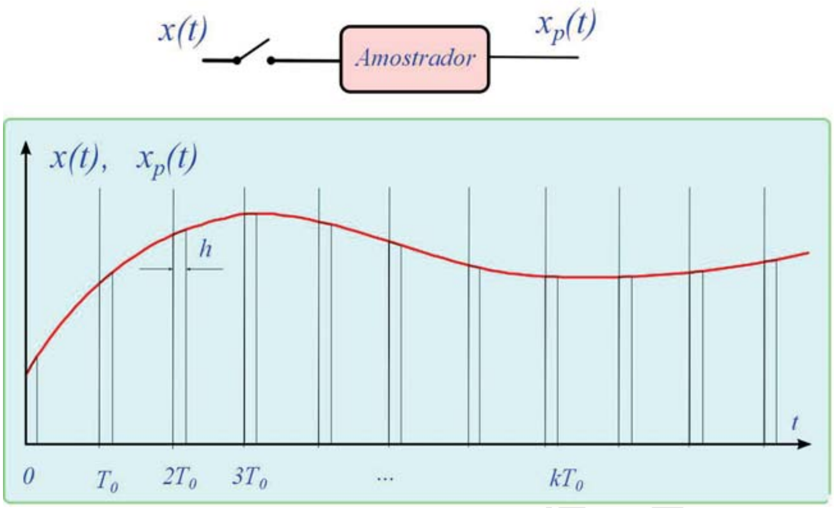


Figura 2.7: Amostrador analógico com período de retenção h.

Exemplo 1

Seja uma função contínua dada por:

$$x(t) = e^{-a\ t} \tag{2.7}$$

A correspondente discretização da Eq. (2.7) e representação por uma função discreta será dada por:

$$x_T(t) = x(K\ T_0) = e^{-(a\ k\ T_0)} \qquad k = 0/\infty \tag{2.8}$$

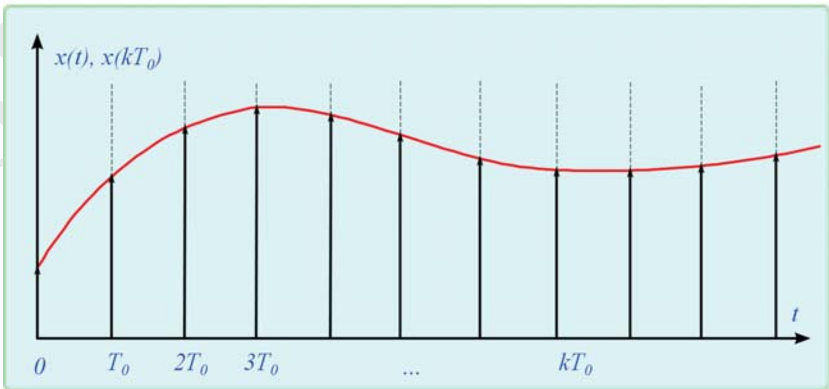


Figura 2.8: Aproximação da amostragem por sequência de impulsos.

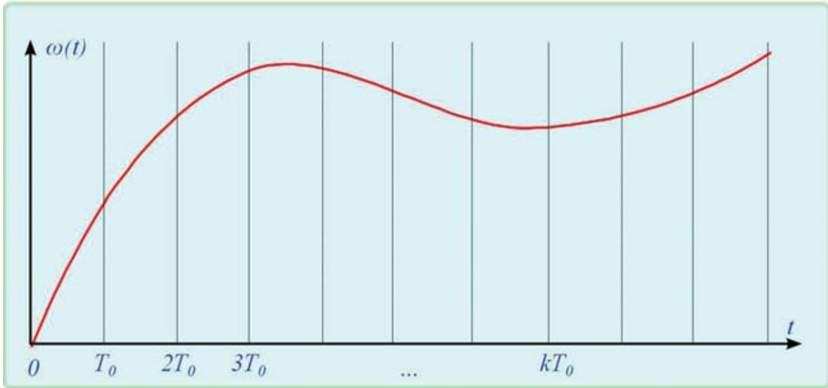


Figura 2.9: Representação da Eq. (2.9).

2.3.2 Equação Diferença

Esta é uma forma de representação matemática típica para processos discretos. Ela é obtida pela representação de uma função discreta em forma recursiva.

Exemplo 2

Seja a função $x(t)$ dada pela integral da grandeza $\omega(t)$ tal como indicado pela expressão Eq. (2.9) e pela figura 2.9.

$$x(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t \omega(t)\ dt \tag{2.9}$$

No caso de se realizar esta operação em um microcomputador, a função integral será numericamente realizada pela operação de Somatório de áreas elementares de largura ou base T_0, tal como indicado pela figura 2.10.
Em forma discreta, a Eq. (2.9) será descrita como:

$$\begin{aligned} x(k\ T_0) &= \frac{1}{T_I} \sum_{\nu=0}^{(k-1)} T_0\ \omega(\nu\ T_0) = \\ &= \frac{1}{T_I} \left[T_0\omega(0) + T_0\omega(T_0) + T_0\omega(2T_0) + \ldots + T_0\omega((k-1)\ T_0) \right] \end{aligned} \tag{2.10}$$

A função integral será então aproximada pela soma das áreas elementares definidas nos instantes $(k\ T_0)$. Dessa forma para se obter o valor total da integral até o instante $(k\ T_0)$ é necessário se conhecer (ou guardar) os valores passados entre o instante inicial e o final $(k-1)\ T_0$.

Considerando-se a expressão da Eq. (2.10) no período de amostragem seguinte,

$$x((k+1)\ T_0) = \frac{1}{T_I} \sum_{\nu=0}^{k} T_0\ \omega(\nu\ T_0) \tag{2.11}$$

pode-se obter uma expressão recursiva para $x_T(t) = x(k\ T_0)$ subtraindo-se a Eq. (2.11) da Eq. (2.10), tal que:

$$x((k+1)\ T_0) - x(k\ T_0) = \frac{T_0}{T_I}\omega(k\ T_0) \tag{2.12}$$

ou, normalizando-se o instante de amostragem para simplificar, $(k\ T_0) = k$,

$$x(k+1) - x(k) = \frac{T_0}{T_I}\omega(k) \tag{2.13}$$

ou ainda, adotando-se,

$$(k+1) = k$$

$$a_1 = -1 \qquad\qquad b_1 = T_0/T_I$$

$$x(k) + a_1\ x(k-1) = b_1\ \omega(k-1) \tag{2.14}$$

A expressão da Eq. (2.14) é denominada Equação Diferença Finita de 1ª ordem, ou simplesmente Equação Diferença e representa uma expressão recursiva para $x_T(t)$ e que realiza uma integração numérica de 1ª ordem no domínio de tempo discreto.

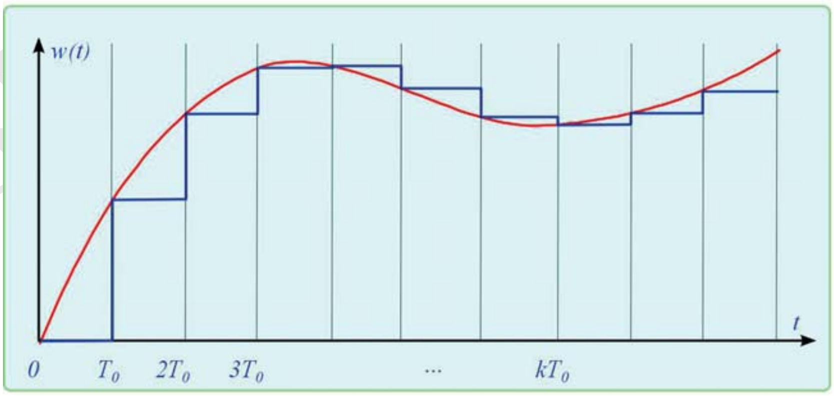
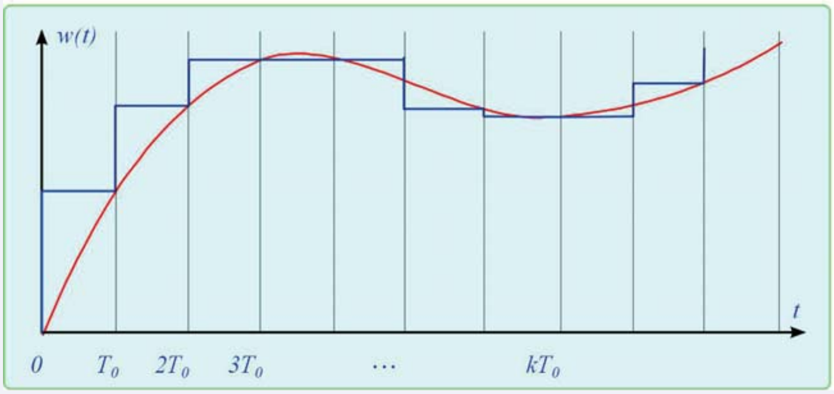


Figura 2.10: Aproximação da pela Eq. (2.10).

Exercício 01

Refazer o procedimento anterior para o seguinte caso, e comparar os resultados.



Exemplo 3

Considere o seguinte caso:

$$x(t) = T_D \, \frac{d}{dt}\omega(t) \tag{2.15}$$

Numericamente a operação de diferenciação realizada em um microcomputador será substituída pela sua definição em forma numérica.

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} \tag{2.16}$$

e assumindo, $t = k\ T_0$ e $\Delta t = T_0$,

$$\frac{d}{dt}x(t) \approx \frac{x(k) - x(k-1)}{T_0} \tag{2.17}$$

Para uma equação de 2^a ordem, obtém-se:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{\frac{d}{dt}x(t) - \frac{d}{dt}x(t+\Delta t)}{\Delta t} \Rightarrow x(t) \approx \frac{x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)}{T_0^2} \tag{2.18}$$

Com as considerações acima, o exemplo 3 será descrito por:

$$\begin{aligned} x(t) &= T_D \frac{\omega(k\ T_0) - \omega((k-1)\ T_0)}{T_0} \\ &= \frac{T_D}{T_0}\Big[\omega(k\ T_0) - \omega((k-1)\ T_0)\Big] \end{aligned} \tag{2.19}$$

ou

$$x(k) = b_0\omega(k) - \omega(k-1) \tag{2.20a}$$

$$b_0 = b_1 = T_D/T_0 \tag{2.20b}$$

A expressão da Eq. (2.20), novamente descreve uma Equação Diferença, a qual representa uma operação de diferenciação. A obtenção da forma discreta para diferenciais de ordem superior, segue o mesmo critério feito para o caso de segunda ordem, aplicando-se a definição usual de equações diferenciais.

Exercício 02

Obter a discretização em forma de equação diferença para os casos a seguir.
a) - $\alpha_1\ \dot{x}(t) + x(t) = \beta_0\ \omega(t)$

b) - $\alpha_2\ \ddot{x}(t) + \alpha_1\ \dot{x}(t) + x(t) = \beta_0\ \omega(t)$

Exercício 03

Comparar as expressões das Eqs. (2.14) e (2.20), e analise sua validade com relação ao período de amostragem T_0.

2.3.3 Sequência ou trem de impulsos

Esta é mais uma forma de se representar um sinal amostrado ou discreto. Neste caso procura-se uma representação que inclua o processo de amostragem.

O processo de amostragem pode ser entendido como um processo de modulação de um sinal contínuo através de um sinal portador $p(t)$ do tipo trem de pulsos com largura infinitesimal. Esta operação pode ser representada pela figura 2.11.

De acordo com a figura 2.11, o sinal portador pode ser descrito por:

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big[u(t - k\ T_0) - u(t - (k\ T_0 + h\ T_0))\Big] \tag{2.21}$$

onde:

$$u(t)(t) = \begin{cases} 1 & t\ \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

Admitindo $h << T_0$ o sinal $p(t)$ pode ser aproximado por uma sequência de impulsos, dada por,

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\ T_0) \tag{2.23}$$

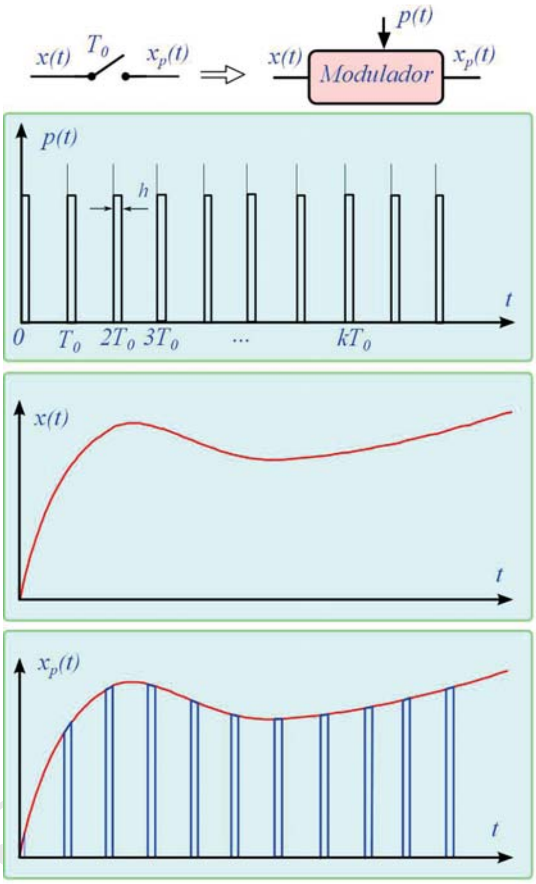


Figura 2.11: Representação do processo de amostragem.

No caso ideal então, obtém-se o sinal amostrado como sendo dado por:

$$x_T(t) = x(t).p(t) = x(t).\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\ T_0) \tag{2.24}$$

De acordo com a expressão em (2.24) apenas informações pontuais caracterizam a versão discreta do sinal original.

Capítulo 3

TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO PARA SINAIS DISCRETOS

3.1 Análise de Fourier para sinais amostrados

A finalidade da análise de Fourier visa obter uma quantificação da informação contida no sinal discreto em relação ao sinal analógico original. Pelo processo de amostragem, como já visto, apenas porções do sinal originais estão contidas no respectivo sinal amostrado. Seja um sinal amostrado, obtido a partir de um processo de modulação com um sinal dado modulante pela Eq. (2.21))e cujo sinal amostrado é novamente indicado na figura 3.1.

Análise de $p(t)$ periódico

.

Desde que o sinal $p(t)$ é periódico, este sinal pode ser representado por sua equivalente série de Fourier, composta por somatórios de senos e cossenos que na forma de Euler é dada por:

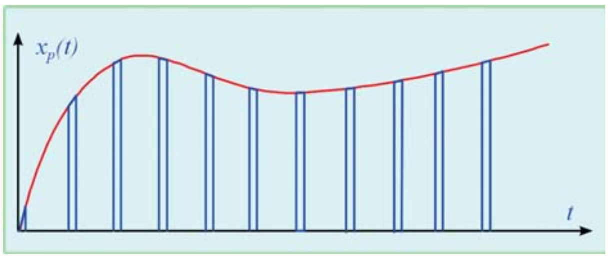


Figura 3.1: Exemplo de amostragem de um sinal contínuo.

$$p(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \; e^{(j\nu\omega_0 t)} \tag{3.1}$$

onde os coeficientes complexos c_ν são dados por,

$$c_\nu = c(j\nu\omega_0) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} p(t)\; e^{-(j\nu\omega_0 t)}dt \tag{3.2}$$

e ω_0 é frequência do sinal $p(t)$ em rd/s, o qual define a frequência de amostragem como sendo,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0 \tag{3.3}$$

Através das Eqs. (2.21) e (3.1), obtém-se que os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} c(j\nu\omega_0) &= \frac{1 - e^{-(j\nu\omega_0 h)}}{j\nu\omega_0 T_0} \\ &= \frac{h}{T_0}\frac{sen\left(\frac{\nu\omega_0 h}{2}\right)}{\left(\frac{\nu\omega_0 h}{2}\right)}\; e^{-(\nu\omega_0 h/2)} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Análise de $x(t)$ aperiódico

No caso do sinal $x(t)$, que pode ser um sinal aperiódico, usa-se então a Transformada de Fourier que é dada pela integral em (3.5), tal que:

$$\begin{aligned} x_p(j\omega_0) &= \mathcal{F}\{x_p(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_p(t)\; e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)p(t)\; e^{-j\omega t}dt \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c(j\nu\omega_0)\int_0^{\infty} x(t)\; e^{-j\omega_0 t}\; e^{j\omega t}dt = \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \underbrace{\int_0^{\infty} x(t)\; e^{-j(\omega-\nu\omega_0)t}dt}_{Prop.\ Transl.\ em\ Freq.} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Através de uma propriedade das Transformadas de Fourier (translação em frequência) a Eq. (3.5) poder ainda ser expressa por:

$$\begin{aligned} x_p(j\omega_0) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c(j\nu\omega_0)x(j(\omega-\nu\omega_0)) = \\ &= c_0 x(j\omega) + c_1(j\omega_0)x(j(\omega\pm\omega_0)) + c_2(j2\omega_0)x(j(\omega\pm 2\omega_0)) + ... \end{aligned} \tag{3.6}$$

Através da Eq. (3.6), pode-se obter as seguintes informações:

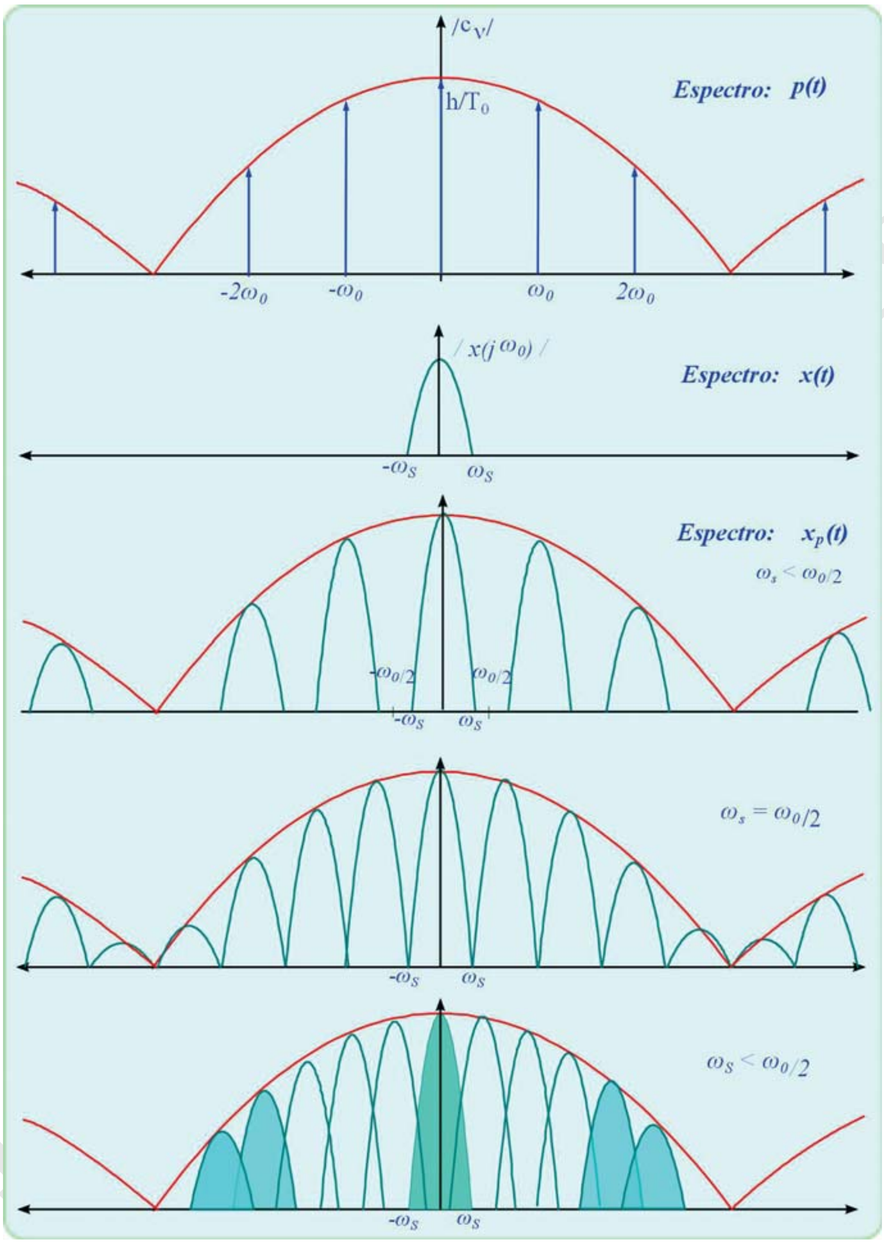


Figura 3.2: Espectro de frequências para sinais amostrados.

a) - pelo processo de amostragem do sinal contínuo no tempo $x(t)$, a análise de Fourier indica que são introduzidas componentes de sinal com altas frequências, relacionadas à frequência de amostragem.
b) - O sinal amostrado conterá o espectro de frequências do sinal original,

$$x_p(j\omega)|_{\nu=0} = \frac{h}{T_0}\ x(j\omega) \tag{3.7}$$

mais uma série de espectros laterais com frequências harmônicas expressas por $x(j(\omega \pm \omega_0),\ \nu = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ ...$, ponderadas pelos coeficientes c_ν ; Em (3.7) observa-se que o valor de c_0 será tanto maior quanto menor o valor de T_0 (o que significa maior frequência de amostragem) e resultará numa maior porção (ou ponderação) do espectro de $x(t)$ no resultado da modulação, ou seja, após a operação de amostragem. Quanto melhor tal espectro esteja contido no sinal amostrado, melhor ele pode ser tratado ou processado após a discretização.

c) - O fato mais importante relacionado na Eq. (3.6) é que o sinal amostrado conterá o espectro de frequências do sinal original. A porção do espectro original contida no sinal amostrado pode entretanto, ser alterada ou modificada em função da frequência de amostragem, tal que uma tentativa de recuperação da informação original se torne impossível. Este fato pode ser melhor entendido com auxílio da figura 3.2.

As figuras 3.2-a e 3.2-b representam o espectro de frequências do sinal portador $p(t)$ e do sinal $x(t)$ respectivamente, segundo as Eqs. (3.1) e (3.7).

A figura 3.2-c indica o espectro de frequências do sinal amostrado o qual além do espectro original de $x(t)$ contém as bandas laterais do espectro de $x(t)$ centrados nas frequências $\pm k\ \omega_0$.

Caso a frequência de amostragem seja diminuída, tal que $\omega_s = \omega_0/2$, os extremos dos espectros laterais de $x_p(t)$ passam a ser coincidentes, como indicado na figura 3.2-d. Com um diminuição ainda maior, tal que $\omega_s > \omega_0/2$, ocorrerá superposição das bandas laterais de espectros. Neste caso uma recuperação do espectro original já se tornará difícil.

Se estivermos interessados em recuperar a informação própria do sinal original $x(t)$ a partir do sinal amostrado $x_p(t)$, a maneira adequada seria realizar uma filtragem do sinal $x_p(t)$, como pode ser visto a partir da figura 3.2-c.

Idealmente seria então necessário ter um filtro tipo passa-faixa ideal, tal que:

$$\begin{cases} \Big|G(j\omega)\Big| = 1 & \big(-\omega_s = -\omega_0/2\big)\ \le\ \omega\ \le \big(\omega_s = \omega_0/2\big) \\ \\ \Big|G(j\omega)\Big| = 0 & \omega < \big(\omega_s = -\omega_0/2\big)\ \ ou\ \ \omega > \big(\omega_s = \omega_0/2\big) \end{cases} \tag{3.8}$$

a qual é representada na figura 3.3 a seguir.

Desde que não de tratam das frequências negativas, a opção seria então um filtro passa-baixas ideal.

Por análise do espectro do sinal amostrado como indicado na figure 3.3 e do exposto acima, conclui-se que uma recuperação da informação contida no sinal original $x(t)$, só será possível atendendo-se a uma das condições a seguir:

$$|\omega_s| < \omega_0/2 \tag{3.9a}$$

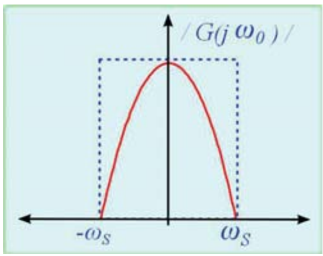


Figura 3.3: Filtro passa-faixa ideal.

$$\omega_0/2 > \omega_s \tag{3.9b}$$

$$T_0 \ \leq \ \pi/\omega_s \qquad T_0 \ \leq \ T_s/2 \tag{3.9c}$$

3.2 Teorema de Shannon ou Teorema da Amostragem

Como resultado a análise feita anteriormente, é possível então estabelecer o teorema da amostragem, através do qual garante-se uma recuperação razoável da informação a partir do sinal amostrado. Se um sinal contínuo no tempo tem um espectro de frequências com banda passante limitada e sendo a frequência máxima definida como ω_{max}, a recuperação deste sinal após um processo de amostragem com período T_0 , só será possível se a frequência de amostragem for superior ao dobro de ω_{max}. De outra forma, deve-se ter:

$$\{T_0 \ \leq \ \pi/\omega_{max}\} \qquad \text{ou} \qquad \omega_0 \ \geq \ 2\omega_{max} \tag{3.10}$$

Exemplo 4

Considere um sinal contínuo no tempo do tipo puramente senoidal com período T_1, como indicado na figura 3.4 e obtido por simulação em Matlab/Simulink.

Caso seja realizada uma amostragem deste sinal com uma frequência também igual a T_1 - não atendendo portanto o teorema da amostragem - em hipótese alguma será possível obter-se alguma informação relevante do sinal original, pois o resultado será sempre algum valor constante. Este fato é indicado na figura 3.4-a pelos pontos "o".

Com uma frequência de amostragem atendendo estritamente o teorema da amostragem, ou seja $T_0 = T_1/2$, o sinal amostrado dessa forma só resultará razoável se os instantes de amostragem coincidir com os instantes de pico da senoide. Caso contrário a informação recuperada será muito pobre ou quase nenhuma. Este fato é ilustrado na figura 3.4-b pelos pontos indicado pelo pontos " o - vermelho ". Outro caso ilustrado na figura 3.4-c é quando $T_0 = 0,9T_1/2$, ou

seja, atendendo ao critério de amostragem com uma frequência apenas ligeiramente maior que a mínima. Neste caso observa-se que a informação se deteriora e necessita-se de cuidado (filtragem) para se obter a informação correta.

Aumentando-se a frequência de amostragem melhora-se consideravelmente a qualidade do sinal amostrada e consequentemente da informação contida no sinal amostrado. De modo geral para os propósitos de controle, aconselha-se que a frequência de amostragem seja superior a (5 a 10) vezes a frequência ω_{max}. Este valor de ω_{max} será oportunamente especificado em função do desempenho em malha fechada do sistema a ser controlado.

3.3 Transformada de Laplace para sinais Discretos

A Transformada de Laplace é uma ferramenta de grande utilidade na análise de sistemas dinâmicos lineares e analógicos. Uma das vantagens é que com esta ferramenta as equações diferenciais e integrais se tornam razões polinomiais na variável "s". Na sequência será verificado o efeito da aplicação da Transformada de Laplace nas equações discretas que descrevem um sistema dinâmico discreto ou digital.

Por definição vale que a transformada de Laplace é dada por:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)\ e^{-st}\ dt \tag{3.11}$$

onde, "s" é uma variável complexa, definida como,

$$s = \tau + j\omega \tag{3.12}$$

A transforma da Laplace aplicada a uma função impulso unitário será então,

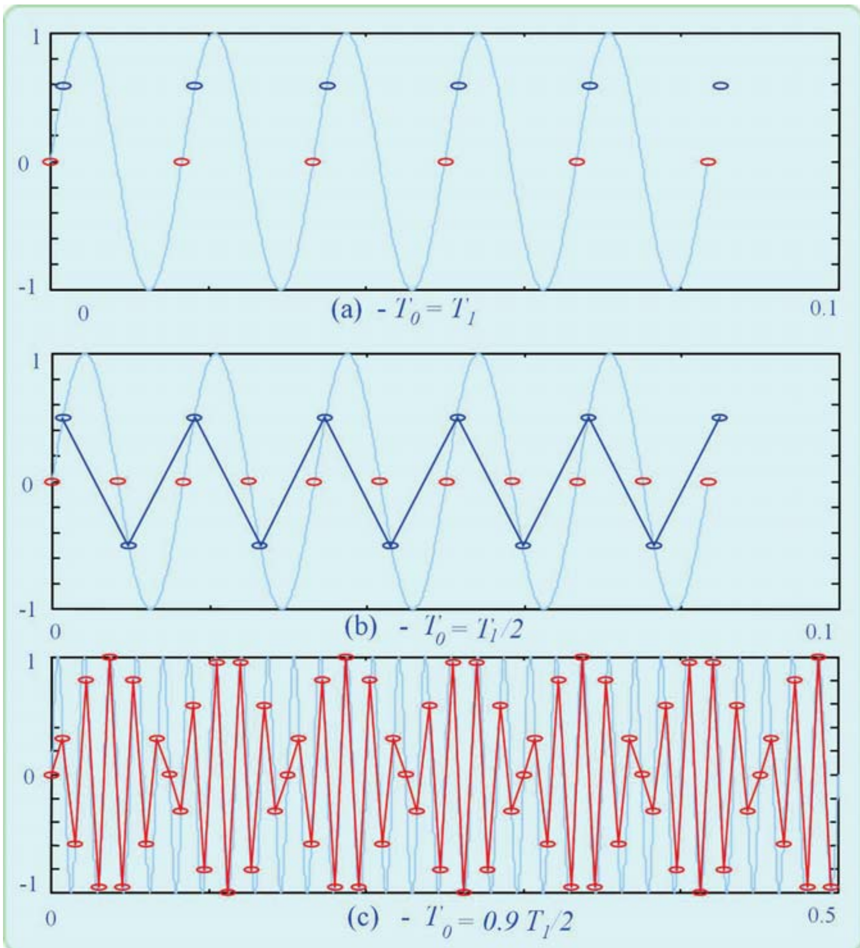


Figura 3.4: Amostragem de uma função seno com diferentes amostragens T_0.

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t)\ e^{-st}\ dt = 1 \tag{3.13}$$

ou então considerando uma função impulso com deslocamento no tempo,

$$\mathcal{L}\big\{\delta(t-kT_0)\big\} = \int_0^\infty \delta(t-kT_0)\ e^{-st}\ dt = e^{-kT_0 s}.1 \tag{3.14}$$

Adotando-se a representação de um sinal discreto dada por:

$$x_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)\ \delta(t-kT_0) \tag{3.15}$$

então a aplicação da Transformada de Laplace a Eq. (3.15), resulta:

$$\begin{aligned} X_T(s) = \mathcal{L}\Big\{x_t(t)\Big\} &= L\Bigg\{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)\ \delta(t-kT_0)\Bigg\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)\ e^{-kT_0 s}.1 \end{aligned} \tag{3.16}$$

A expressão dada por Eq. (3.16) tem ainda a propriedade de ser periódica com frequência angular $\omega_0 = 2\pi/T_0$, ou seja, a frequência de amostragem. Esta propriedade é comprovada com o desenvolvimento a seguir:

$$\begin{aligned} X_T(s+j\nu\omega_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)\ e^{-kT_0(s+j\nu\omega_0)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)\ e^{-kT_0 s}.e^{-jkT_0\nu\omega_0} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)\ e^{-kT_0 s}.e^{-j\underbrace{k\ \nu\ 2\ \pi}_{=1}} = \\ &= X_T(s) \end{aligned} \tag{3.17}$$

ou usando a Eq. (3.12),

$$X_T(\tau + j(\omega \pm \nu\omega_0) = X_T(\tau + j\omega) \qquad \nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \tag{3.18}$$

Uma implicação importante dos resultados obtidos pelas Eqs. (3.16) a (3.18), é que se a Transformada de Laplace de uma função (ou sinal) analógico (contínuo) tem um polo em "s_1", a correspondente função (ou sinal) amostrado passará a ter polos em "$s_1 \pm j\nu\omega_0$", com $\nu = 1...\infty$. Este aspecto é análogo ao fato do sinal amostrado apresentar espectro de Fourier composto de uma série de harmônicos em relação ao sinal contínuo. Também na abordagem da Transformada de Laplace, a frequência de amostragem deve ser escolhida de forma que a representação discreta contenha apenas os polos originais e que os polos harmônicos sejam excluídos.

3.4 Modelagem do Holder (*Sampler-Holder)*

Na prática o valor de $x(t)$ amostrado no instante $t = kT_0$ permanece inalterado até que se realize nova amostragem no instante $t = (k+1)T_0$, ou seja, no ambiente digital o sinal amostrado $x_p(t)$ tem a forma de uma sequência de pulsos de largura T_0 e uma amplitude igual ao valor de $x(t)$ no instante $t = kT_0$. Na figura 3.5 é indicado o comportamento de um sinal amostrado com retenção igual a T_0.

Na realidade o bloco *Holder* é parte integrante dos módulos A/D ou D/A para que se processe a conversão do sinal. Entretanto o intervalo de retenção é aqui estendido por todo o período T_0 , pois isto é o que ocorre no ambiente digital. Desde que o bloco *Holder* como indicado passa a ser parte integrante do processo discreto, há que se obter uma representação matemática para o mesmo, a fim de se obter uma modelagem completa do processo discreto.

Matematicamente o sinal $m(t)$ da figura 3.5 pode ser representado por uma função do tipo sequência de pulsos de largura T_0 e obtido pela subtração de duas funções tipo degrau unitário defasadas T_0 entre si, tal que:

$$m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)\big[u(t - kT_0) - u(t - (k+1)T_0)\big] \tag{3.19}$$

Aplicando-se a transformada de Laplace e com auxílio da Eq. (3.16), chega-se a,

$$\begin{aligned} M(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0)\; e^{-kT_0 s}\left[\frac{1 - e^{-T_0 s}}{s}\right] \\ &= X(T(s)\left[\frac{1 - e^{-T_0 s}}{s}\right] \end{aligned} \tag{3.20}$$

Através da Eq. (3.20), define-se a Função Transferência do bloco *Holder* como sendo:

$$G_{H0}(s) = \frac{M(s)}{X_T(s)} = \frac{1 - e^{-T_0 s}}{s} \tag{3.21}$$

Substituindo-se $s = j\omega$ na Eq. (3.21), e obtendo-se uma expansão em série de Taylor na variável $j\omega$, chega-se a:

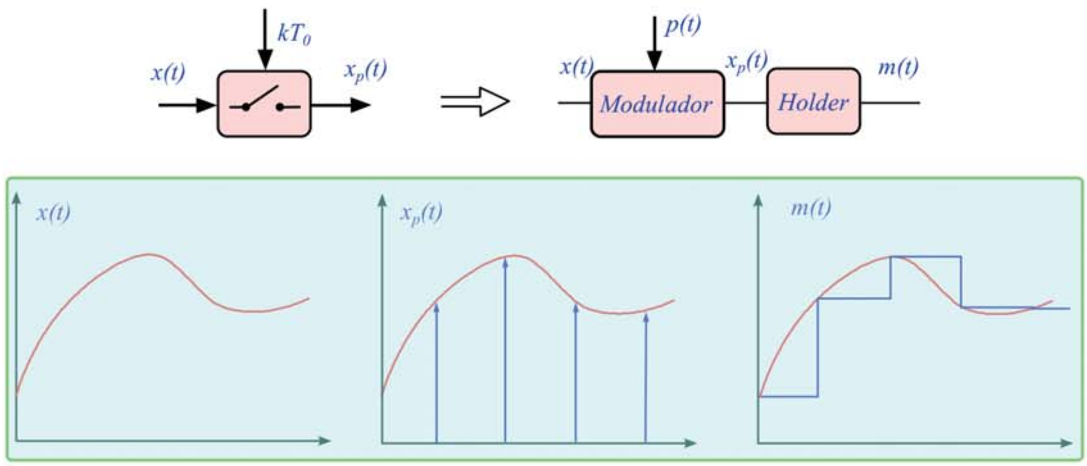
$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega}\left[1 - e^{-j\omega T_0}\right] \\ &= \frac{1}{j\omega}\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{(j\omega T_0)}{1!} + \frac{(j\omega T_0)^2}{2!} + \frac{(j\omega T_0)^3}{3!} + ...}\right] \end{aligned} \tag{3.22}$$

Considerando-se que a frequência de amostragem seja suficientemente elevada e tal que T_0 seja pequeno, a série de Taylor pode ser truncada no primeiro termo e a Eq. (3.22) pode ser aproximada por:

$$\lim_{T_0 \to 0} G(j\omega) \approx \frac{T_0}{1 + j\omega T_0} = \frac{T_0}{1 + sT_0} = \frac{1}{s + 1/T_0} \tag{3.23}$$

A expressão (3.23) é uma representação típica de um filtro passa-baixa, na medida em que T_0 assume pequenos valores.

Portanto, o processo de amostragem associado com o bloco *Holder* de ordem zero, irá atuar como um filtro e rejeitará as componentes harmônicas de alta frequência geradas no processo de amostragem. Desta forma a filtragem desejada no sinal amostrado é realizada automaticamente pelo bloco *Holder* ou pelo processo de retenção.



x(t)
kT0
xp(t)
p(t)
x(t)
xp(t)
m(t)
Modulador
Holder
x(t)
xp(t)
m(t)

Capítulo 4

A TRANSFORMADA-Z E SUAS APLICAÇÕES

A transformada-Z é uma ferramenta matemática de grande importância no tratamento e análise de sinais ou processos discretos. Ela será usada de forma muito semelhante à transformada de Laplace aplicada a processos contínuos. Como visto pela Eq. (3.16), a transformada de Laplace aplicada em uma função discreta resulta como sendo uma séria infinita e não mais como uma relação polinomial. O uso da Transformada-Z fará uso de alguma propriedade destas séries, tais que estas possam "convergir" para uma relação algébrica conhecida e desta forma obtém-se novamente a representação dos sistemas discretos por uma relação polinomial na variável "z".

4.1 Definição da Transformada-Z

A transformada-Z é uma aplicação matemática que faz corresponder a cada sequência de números, uma função da variável complexa "z", a qual é definida como a seguir. Admitindo-se a representação de um sinal (ou função) dada por (3.15) e, seja a respectiva Transformada de Laplace dada por (3.16), a transformada-Z é obtida fazendo-se:

$$z = e^{T_0\, s} = e^{T_0\,(\tau + j\omega)} = e^{T_0\,\tau}\,\left[cos(\omega\; T_0) + j sen(\omega\; T_0)\right] \tag{4.1}$$

ou,

$$s = \frac{1}{T_0} ln(z) \tag{4.2}$$

Desta forma, usando a Eq. (4.1), a representação do sinal discreto na variável "z" será:

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}\{x(t)\} = \mathcal{Z}\{x(kT_0)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) z^{-k} = \\ &= \left[x(0) + x(T_0)z^{-1} + x(2T_0)z^{-2} + x(3T_0)z^{-3} + ... \;\;\right] \end{aligned} \tag{4.3}$$

$X(z)$ será então uma sequência infinita de potências da variável "z".

Em muitos casos é possível se obter uma função explicita em "z" que representa tal série, utilizando-se propriedades de séries de potências, ou progressões aritméticas ou geométricas.

A função assim obtida é chamada de função em "z".

Exemplo 5

Seja a função degrau unitário,

$$x(t) = u(t) = 1(t)$$

na forma discreta usando a função discreta, tem-se:

$$x_T(t) = x(kT_0) = 1(kT_0)$$

Aplicando-se a definição dada por (4.3):

$$\begin{aligned} X(z) &= = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) z^{-k} = \\ &= \left[1 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + 1z^{-3} + ...\right] \end{aligned}$$

A função $X(z)$ em (4.6), representa uma série geométrica do tipo:

$$f(r) = 1 + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ...$$

e para tal série, sabe-se que,

$$f(r) = \frac{a}{1-r}$$

No caso acima diz-se que a série $f(r)$ converge para a função dada por $a/(1-r)$. No exemplo da função degrau, fazendo-se :

$$a = 1 \qquad\qquad r = z^{-1}$$

tem-se:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \tag{4.4}$$

A expressão (4.4) é então a transformada-Z da função degrau unitário. Deste exemplo, observa-se que é possível relacionar a seguinte sequência de transformações entre a função temporal contínua e sua respectiva transformada-Z.

$$x(t) = 1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) = \frac{z}{z-1}$$

Neste exemplo ainda, observa-se que enquanto $X(s)$ tem apenas um polo na origem do plano-S, $X(z)$ tem um polo em $z = 1$ e um zero na origem do plano-Z.

Por meio da sequência das transformações indicadas será possível elaborar uma Tabela contendo as funções temporais usuais de Sistemas de Controle e suas respectivas transformadas de Laplace e Transformada-Z.

Exemplo 6

Seja agora a função contínua dada por:

$$x(t) = e^{-at} \qquad a \in \Re^{+}$$

Usando a descrição por função discreta, chega-se a:

$$x_T(t) = x(kT_0) = e^{-akT_0} \qquad a \in \Re^{+}$$

Pela definição da transformada-Z, $X(z)$ será:

$$\begin{aligned} X(z) &= = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_0) z^{-k} = \\ &= \left[1 + \left(e^{aT_0} z\right)^{-1} + \left(e^{aT_0} z\right)^{-2} + \left(e^{aT_0} z\right)^{-3} + \ldots\right] \end{aligned}$$

Como no caso anterior, pode-se obter para a série acima a seguinte expressão:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \left(e^{aT_0} z\right)^{-1}} = \frac{z}{z - e^{aT_0}} = \frac{z}{z - a_1} = \frac{1}{1 - a_1\, z^{-1}} \tag{4.5}$$

com $a_1 = e^{aT_0}$. A Eq. (4.5) tem portanto um zero na origem e um polo em $z = a_1$ do plano-Z.

A expressão (4.5) representa então a transformada-Z da função exponencial. Da mesma forma que no caso da função degrau, a transformada de Laplace da função exponencial apresenta apenas um polo no plano-S, enquanto que sua transformada-Z apresenta um polo e um zero no plano-Z. De forma geral, pode-se formular que há uma correspondência entre o número de polos no plano-S e no plano-Z, porém não há correspondência entre o número de zeros. Este fato pode ser relacionado da seguinte forma:

$$\frac{Z_1(s)}{\prod_{j=1}^{n}(s - s_j)} \Leftrightarrow \frac{Z_2(z)}{\prod_{j=1}^{n}(z - z_j)} \qquad z_j = e^{-s_j T_0} \tag{4.6}$$

Exercício 04

Obter a transformada-Z para os seguintes casos:
(a) - $x(t) = a^t$

(b) - $x(t) = sen(\omega_1 t)$

(c) - $x(t) = t$

Exercício 05

Obter a transformada-Z para a sequência abaixo:
$x(kT_0) = 1,\ 2,\ 3,\ 0,\ 0,\ 0,\ ...$

4.2 Propriedades da transformada-Z

P1 - Linearidade

$$\mathcal{Z}\Big\{\alpha\ x_1(k) + \beta\ x_2(k)\Big\} = \alpha\ \mathcal{Z}\Big\{x_1(k)\Big\} + \beta\ \mathcal{Z}\Big\{x_2(k)\Big\} \tag{4.7}$$

P2 - Deslocamento para direita - Operador Avanço

$$\mathcal{Z}\Big\{x(k-d)\Big\} = z^{-d}\mathcal{Z}\Big\{x(k)\Big\} = z^{-d}\ X(z) \qquad d \geq 0 \tag{4.8}$$

P3 - Deslocamento para esquerda - Operador atraso

$$\mathcal{Z}\Big\{x(k+d)\Big\} = z^d\left[X(z) - \sum_{q=0}^{d-1} x(q)z^{-q}\right] \quad d \geq 0 \tag{4.9}$$

P4 - Amortecimento

$$\mathcal{Z}\Big\{x(k)e^{-akT_0}\Big\} = X(ze^{aT_0}) \tag{4.10}$$

P5 - Valor Inicial

$$X(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) \tag{4.11}$$

P6 - Valor Final

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) \tag{4.12}$$

A propriedade do valor final somente é válida se $x(\infty)$ existe. De outra forma, só existe valor final para processo estáveis.

Exercício 06

Demonstrar as propriedades P1 a P6.

4.3 A Transformada-Z Inversa

A transformada-Z Inversa será sempre necessária quando se deseja analisar ou conhecer o comportamento de uma determinada função ou sinal no domínio do tempo - em geral no domínio do tempo discreto. Enquanto que a correspondência entre a transformada de Laplace $F(s)$ e sua correspondente função temporal $f(t)$ é única, o mesmo não acontece com a transformada-Z. Se a transformada-Z de uma função $f(t)$ é $F(z)$, não necessariamente a transformada-Z Inversa de $F(z)$ será a mesma $f(t)$, pois o período de amostragem T_0 exerce grande influência nessa operação. Dois métodos mais usuais serão abordados a seguir.

4.3.1 Método da fatoração

Neste procedimento as regras são basicamente as mesmas usadas na obtenção da transformada de Laplace Inversa. Este método consiste em se fatorar a função $F(z)$ em termos simples, para os quais a transformada-Z Inversa possa ser obtida por tabelas. Normalmente procura-se obter uma expansão de $F(z)$ em termos tais como:

$$X(z) = \frac{Az}{(z-1)} + \frac{Bz}{(z-1)^2} + \frac{Cz}{(z-a)} + \frac{Dz}{(a_2 z^2 + a_1 z + a_0)} + ... \tag{4.13}$$

para a qual, por consulta em tabelas específicas, obtém-se:

$$x(t) = A + B\frac{t}{T_0} + C\ e^{-at} + De^{-\alpha_1 t}\ sen(\omega_1 t) + ... \tag{4.14}$$

ou com $t = k\,T_0$:

$$x(k) = A + Bk + C\ e^{-akT_0} + De^{-\alpha_1 kT_0}\ sen(\omega_1 kT_0) + ... \tag{4.15}$$

Através deste método obtém-se a transformada-Z Inversa em forma de equação discreta, tal como indicado na Eq. (4.15). Como no caso de Laplace, se existem polos múltiplos, deve-se aplicar uma regra especial. Se Z_i é um polo múltiplo com multiplicidade de ordem "n", fatora-se em $(z-z_i)^n (z-z_i)^{n-1}\ ...\ (z-z_i)^2 (z-z_i)$.

4.3.2 Método da Divisão Contínua

Por este método, obtém-se diretamente os valores da sequência $x(kT_0)$ a partir de $X(z)$. O procedimento consiste em se efetuar uma divisão contínua do numerador pelo denominador de $X(z)$ e de forma "infinita". O resultado desta divisão será um polinômio em "z", o qual pode então ser associado com a sequência de $x(kT_0)$ usando-se a propriedade do Operador Avanço e/ou Atraso.

Portanto se $X(z)$ é tal que:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ ...\ + b_{n-2} z^2 + b_{n-1} z + b_n}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ ...\ + a_{n-2} z^2 + a_{n-1} z + a_n} \tag{4.16}$$

efetua-se uma divisão da seguinte forma:

$$b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ ... \ + b_{n-1} z + b_n \left| \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ ... \ + a_{n-1} z + a_n}{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \ ...} \right. \tag{4.17}$$

O resultado desta divisão, ou seja o quociente, pode ser interpretado segundo a expressão da Eq. (4.3) tal como:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = \left[x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + x(3) z^{-3} + ... \ \right] \tag{4.18}$$

e por comparação de coeficientes obtém-se:

$$x(kT_0) = \begin{cases} x(0) = c_0 \\ x(1) = c_1 \\ x(2) = c_2 \\ \vdots \\ x(k) = c_k \end{cases} \tag{4.19}$$

Exercício 07

Obter a transforma-Z Inversa para os seguintes casos, sendo $T_0 = 1$:

(a) $X(z) = \dfrac{1,6z^2 - 0,8}{z^3 - 2,6z^2 - 2,2z - 0,6}$

(b) $X(z) = \dfrac{0,6z}{z^2 - 1,7z)0,7}$

(c) $X(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z-2)}$

(d) $X(z) = \dfrac{0,1(z+1)z}{(z-1)^2(z-0,6)}$

Nos casos (a) e (b) usar o método da Fatoração e indicar a expressão da função discreta associada.
Nos casos (c) e (d) usar o método da Divisão Contínua até o quinto termo.
Em todos os casos (quando aplicável) :

i) - Avaliar o valor final $x(k)\big|_{k\to\infty}$

ii) - Avaliar o valor inicial $x(k)\big|_{k\to 0}$

iii) - Obter a sequência de valores de $x(k)$ para $k =_0 /^{10}$

4.4 Tabeladas de transformadas-Z

Como já indicado acima, uma forma muito usual de se operar com a transformada-Z, consiste em consultas em tabelas que relacionam a representação de diversas funções básicas no domínio do tempo, em Laplace e no domínio da transformada-Z.

Uma tal tabela é indicada na Tabela 4.1 no final do capítulo. Caso uma determinada função $F(z)$ não esteja na forma de uma das indicadas nesta tabela, há que se obter uma forma análoga de $F(z)$ por fatoração em termos representados na tabela, ou usar procedimentos numéricos para esta tarefa.

4.5 Somatório de Convolução e Função Transferência Discreta.

Seja um processo discreto (digital) com amostragem na entrada e saída tal como indicado na figura 4.1.

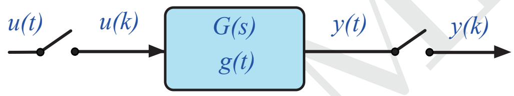


Figura 4.1: Processo com amostragem na entrada e saída.

Para a representação indicada na figura 4.1, define-se $u(t)$ como sendo a "Ação de Controle" e $y(t)$ como sendo a "Saída Controlada". O processo contínuo da figura 4.1, pode ser representado por sua Função Transferência $G(s)$ ou por sua Função Impulsiva $g(t)$, a qual é a resposta de $G(s)$ a uma entrada do tipo impulso $\delta(t)$.

O sinal amostrado $u(kT_0) = u(t)\big|_{t=T_0}$ é dado pela seguinte representação:

$$u(kT_0) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)\ \delta(t - kT_0) \tag{4.20}$$

No caso contínuo a resposta $y(t)$ do processo contínuo $G(s)$ pode ser avaliada com auxílio da Integral de Convolução entre função impulsiva $g(t)$ e da função de excitação de entrada em questão. No caso discreto a integral será então substituída pelo "Somatório de Convolução", tal como:

$$y(kT_0) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)\ g(t - kT_0) \tag{4.21}$$

Considerando-se a saída amostrada $y(nT_0)$ nos instantes de amostragem $t = nT_0$, obtém-se:

$$\begin{aligned} y(kT_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)\ g((n-k)T_0) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} u((n-\nu)T_0)\ g(\nu T_0) \qquad \text{com : } \nu = (n-k) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Tomando-se a transformada de Laplace para $y(t)$ a partir da definição dada em (3.16) e com auxílio da Eq. (4.20), chega-se a:

$$\begin{aligned} Y_T(s) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)\ g((n-k)T_0)\right] e^{-nT_0 s} \\ &= \left[\sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0)\ e^{-qT_0 s}\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty} u(kT_0)\ e^{-kT_0 s}\right] \qquad (4.23) \\ Y(z) &= G_T(s).U_T(s) = G(z).U(z) \end{aligned}$$

Portanto, analogamente aos processos contínuos, define-se a Função Transferência Impulsiva Discreta como:

$$G_T(s) = \frac{Y_T(s)}{U_T(s)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0)\ e^{-qT_0 s} \qquad (4.24)$$

Portanto, com base na definição da transformada-Z, a Função de Transferência Discreta também é descrita pela razão da transformada-Z da saída pela transformada-Z da entrada, tal como:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \sum_{q=0}^{\infty} g(qT_0)\ e^{-qT_0 s} = \mathcal{Z}\{g(q)\} \qquad (4.25)$$

Exemplo 7

Seja um filtro de primeira ordem contínuo com Função Transferência dada por:

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)} = \frac{K'}{(s + \mathrm{a}_1)} \qquad \begin{cases} K' = K/T_1 \\ \mathrm{a}_1 = 1/T_1 \end{cases}$$

A correspondente função impulsiva será:

$$g(t) = K'\ e^{-\mathrm{a}_1 t}$$

e

$$g(kT_0) = K'\ e^{-\mathrm{a}_1 k T_0}$$

Usando a Eq. (4.25) e o Exemplo 6, chega-se a:

$$\begin{aligned} G(z) &= K' \sum_{q=0}^{\infty}\left(e^{-\mathrm{a}_1 q T_0}\right) z^{-q} = \frac{K' z}{z - e^{-\mathrm{a}_1 T_0}} = \\ &= \frac{K'}{1 - (e^{-\mathrm{a}_1 T_0})\ z^{-1}} = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}} \qquad \begin{cases} b_0 = K' \\ a_1 = e^{-\mathrm{a}_1 T_0} \end{cases} \end{aligned}$$

Se $K = 1,\ T_1 = 7,5$seg e $T_0 = 4$seg :

$$G(z) = \frac{0,1333}{1 - 0,5866\ z^{-1}}$$

Neste exemplo, procedeu-se as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} G(s) \quad &\rightarrow\ g(t)\ \rightarrow\ g(kT_0)\ \rightarrow\ G(z) \\ \text{ou} & \\ G(z) \quad &= \mathcal{Z}\left\{ \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}\Big|_{t=kT_0} \right\} \end{aligned} \tag{4.26}$$

4.5.1 Função Transferência Discreta para processos com *Holder*

Se um *Holder* deve ser considerado no processo de discretização, uma equivalente representação deste *Holder* na variável "z", deve então ser incluída e sua representação é resumida na figura 4.2.

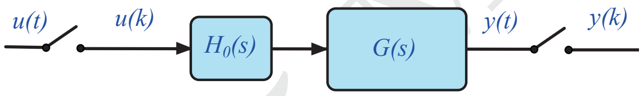


Figura 4.2: Processo amostrado com *Holder*-Zero.

Para o processo representado na Fig. 4.2, considera-se então:

$$H_0G_P(z) = \mathcal{Z}\left\{H_0(s)G_P(s)\right\} \tag{4.27}$$

ou, com auxílio da Eq. (3.21),

$$\begin{aligned} H_0G_p(z) \quad &= \quad \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-T_0 s}}{s}\ G(s)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} - \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\ \underbrace{e^{-T_0 s}}_{z^{-1}}\right\} \\ &= \quad \left(1 - z^{-1}\right)\ \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \\ &= \quad \frac{z-1}{z}\ \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \end{aligned} \tag{4.28}$$

A partir da Eq. (4.29), observa-se que a inclusão da representação do *Holder* no processo, altera-se a configuração de polos e zeros da Função Transferência original sem o *Holder*. Na análise de processos discretos, deve-se então estar atento ao fato de se incluir ou não o *Holder* para se ter uma descrição coerente do processo discreto.

A influência do *Holder* na Função Transferência Discreta pode ser vista na Tabela 4.2 do Anexo 2 deste capítulo, que relaciona a Função Transferência de diversos processos com e sem *Holder*.

Exemplo 8

Admitindo um *Holder* no processo do exemplo 7, a nova Função Transferência discreta será:

$$
\begin{aligned}
H_0G_p(z) &= \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left\{\frac{K'}{s(s+\mathrm{a}_1)}\right\} \xrightarrow{\text{Tabela}}= \frac{z-1}{z}\,\frac{(1-e^{-\mathrm{a}_1T_0})z}{(z-1)(z-e^{-\mathrm{a}_1T_0})}\,\frac{K'}{\mathrm{a}_1} = \\
&= \frac{K'}{\mathrm{a}_1}\,\frac{(1-e^{-\mathrm{a}_1T_0})}{(z-e^{-\mathrm{a}_1T_0})} = \frac{b_1z^{-1}}{1+a_1z^{-1}}
\end{aligned}
$$

Com os dados numéricos daquele exemplo, tem-se então,

$$H_0G_P(z) = \frac{0,4133z^{-1}}{1-0,5866z^{-1}}$$

Exercício 08 - IMPORTANTE

Obter a sequência $y(kT_0)$ para os exemplos 7 e 8, para $k = {}_1/^{10}$. Colocar os resultados em um mesmo gráfico e comparar as respostas considerando uma entrada do tipo degrau unitário. Avaliar a mesma situação para pelo 4 menos valores diferentes de T_0.
Resolver o exercício usando o Programa Matlab, explicitando o uso correto dos comandos ou funções necessárias.

4.5.2 Obtenção da Função Transferência Discreta a partir da Equação Diferença

Se a descrição de um determinado processo é dada ou obtida em forma de Equação Diferença do tipo:

$$
\begin{aligned}
&y(k) + a_1\,y(k-1) + a_2\,y(k-2) + \;\dots\; + a_m\,y(k-m) = \\
&\qquad b_0\,u(k) + b_1\,u(k-1) + b_2\,u(k-2) + \;\dots\; + b_m\,u(k-m)
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

Através das propriedades do operador avanço e/ou atraso, pode-se rescrever a Eq. (4.29) tal como:

$$
\begin{aligned}
&y(z) + a_1z^{-1}y(z) + a_2z^{-2}y(z) + \;\dots\; + a_mz^{-m}y(z) = \\
&\qquad b_0u(z) + b_1z^{-1}u(z) + b_2z^{-2}u(z) + \;\dots\; + b_mz^{-m}u(z)
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

e a Função Transferência Discreta será:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \;\dots\; + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \;\dots\; + a_mz^{-m}} \tag{4.31}$$

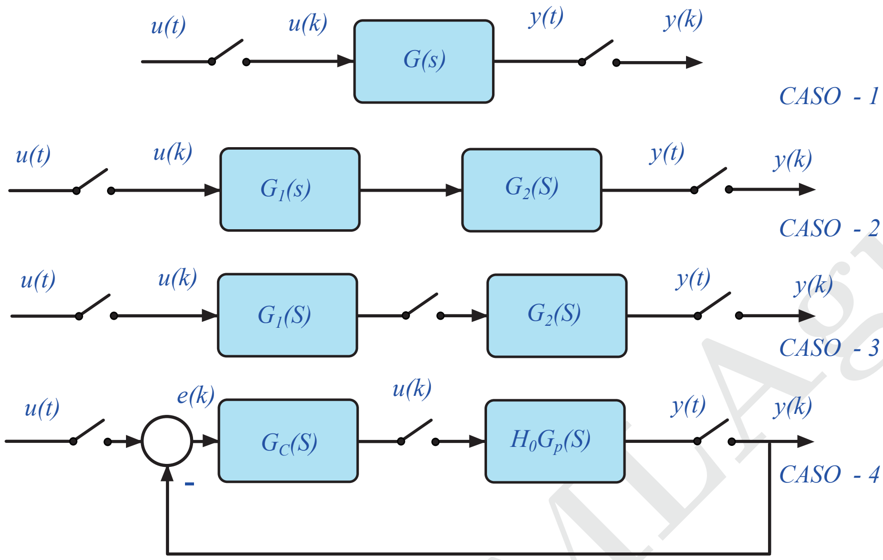


Figura 4.3: Associação de processos por amostradores.

4.6 Associação de Processos Discretos

Na análise de processos discretos envolvendo associação de sub-processos através de amostradores (*Holders*), deve-se observar algumas regras gerais antes de se proceder a devida discretização. Este fato se relaciona com a localização dos amostradores envolvidos no processo. Considere a Fig. 4.3 a seguir, onde são representadas algumas configurações básicas de processos amostrados.

No caso 1 em que o processo representado por $G_1(s)$ é amostrado na entrada e saída, a discretização será feita através da Eq. (4.25), ou seja:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \mathcal{Z}\Big\{g_T(t)\Big\} \tag{4.32}$$

No caso 2, os amostradores se encontram na entrada e na saída da associação dos processos $G_1(s)$ e $G_2(s)$, de tal forma que discretização será dada por:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \mathcal{Z}\Big\{G_1(s)\ G_2(s)\Big\} \tag{4.33}$$

No caso 3, os amostradores se encontram entre os sub-processos $G_1(s)$ e $G_2(s)$ e a discretização será dada por:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = G_1(z)\ G_2(z) \tag{4.34}$$

O caso 4 representa um processo de controle realimentado, com amostradores na entrada e saída e também entre o controlador $G_C(s)$ e processo $G_P(s)$. Para o processo

$G_P(s)$ é previsto aqui um *Holder* de Ordem Zero, para o qual deve ser aplicado as regras previstas no item 4.5.1. A discretização neste caso fornecerá a Função Transferência global de malha fechada e será dada por:

$$G_\omega(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_C(z)\ H_0G_P(z)}{1 + G_C(z)\ H_0G_P(z)} \tag{4.35}$$

Exercício 09

Dado os processos $G_1(s) = \dfrac{K_1}{T_1 s + 1}$ e $G_2(s) = \dfrac{K_2}{T_2 s + 1}$ obter:

(a) - $\mathcal{Z}\Big\{G_1(s).G_2(s)\Big\}$

(b) - $\mathcal{Z}\Big\{G_1(s)\Big\}.\mathcal{Z}\Big\{G_2(s)\Big\}$

4.7 Correspondência entre o Plano-S e o Plano-Z e Localização de Polos

O plano-S no caso dos processos contínuos fornece diversas informações relativas à localização dos polos e zeros do processo e com a qual pode se prever a estabilidade do processo e o comportamento do processo a alguns tipos de entrada padrão. Além disso, podem ser implementados diversos procedimentos de síntese dos controladores com base no plano-S. No caso discreto, introduz-se o plano-Z, o qual poderá também fornecer informações semelhantes, quanto à estabilidade e síntese de controladores. Seja um processo linear contínuo no tempo com Função Transferência:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \ ...\ + \beta_m z^{-m}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \ ...\ + \alpha_n z^{-n}} \qquad (n \geq m) \\ &= \frac{(s - s_{01})(s - s_{02})(s - s_{03})(\ ...\ )(s - s_{0m})}{(s - s_1)(s - s_2(s - s_3)(\ ...\ )(s - s_n)} \frac{\beta_m}{\alpha_n} \end{aligned} \tag{4.36}$$

A correspondente $G(z)$ pode então ser expressa por:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \ ...\ + \beta_m z^{-m}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \ ...\ + \alpha_n z^{-n}} \qquad (n \geq m) \\ &= \frac{(z - z_{01})(z - z_{02})(z - z_{03})(\ ...\ )(z - z_{0m})}{(z - z_1)(z - z_2(z - z_3)(\ ...\ )(z - z_n)} \frac{\beta_m}{\alpha_n} \end{aligned} \tag{4.37}$$

Como no caso contínuo as raízes de $A(z) = 0$ são os polos de $G(z)$ e as raízes de $B(z) = 0$ são os zeros de $G(z)$. Considerando-se:

$$s_i = \tau_i \pm j\omega_i \tag{4.38}$$

o mapeamento dos polos e zeros do plano-S no plano-Z será obtido por:

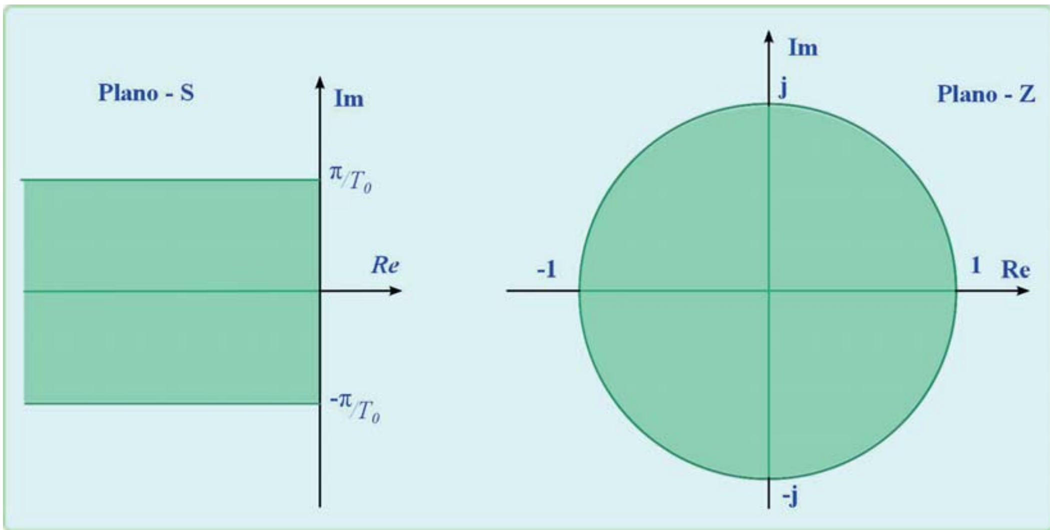


Figura 4.4: Relações entre os Planos-S e -Z.

$$z_i = e^{T_0 s_i} = e^{T_0(\tau_i \pm j\omega_i)} = e^{T_0\tau_i}\Big[\cos(\omega_i T_0) \pm j\sin(\omega_i T_0)\Big] \tag{4.39}$$

e cujo módulo e fase serão:

$$|z_i| = e^{T_0\tau_i} \qquad \text{e} \qquad \phi_i = \angle z_i = \pm\, T_0\omega_i \tag{4.40}$$

Com base na transformação dada em (4.39), este mapeamento de "s" em "z" será tal como indicado na Fig. 4.4.

A descrição do mapeamento de "s" em "z" pode ser resumida como indicado a seguir:

"Plano-s"		"Plano-z"
(a) - Eixo Imaginário Positivo: $\tau_i = 0 \quad 0 \leq j\omega_i \leq j\pi/T_0$	....	Resulta no Semicírculo superior de raio 1
(b) - Eixo Imaginário negativo: $\tau_i = 0 \quad -j\pi/T_0 \leq j\omega_i \leq 0$	....	Resulta no Semicírculo inferior de raio 1
(c) - Eixo real negativo: $\omega_i = 0 \quad -\infty \leq \tau_i \leq 0$	....	Resulta no trecho do eixo real : $0 \leq z_i \leq 1$ do plano-Z

4.8 Casos especiais do mapeamento de " s " em "z"

Alguns casos especiais relacionados a fatores de amortecimento constante, frequência angular constante e parte real constante do plano-S são indicados na figura 4.5 no final

"Plano-s"		"Plano-z"
(d) - Eixo real positivo: $\omega_i = 0 \quad 0 \leq \tau_i \leq \infty$	....	Resulta no trecho do eixo real : $1 \leq z_i \leq \infty$ do plano-Z
e)- Estabilidade: Semiplano-Esquerdo	....	Estabilidade: Interior do círculo unitário
f)- Polos tais que: $j\omega \geq j\pi/T_0$ (não satisfazem o teorema da amostragem)	....	São mapeados em um plano-Z sobreposto ao plano definido nos itens a-d

deste capítulo.

Algumas funções específicas representadas pela localização de polos e suas respectivas respostas temporais a entrada degrau são apresentadas na figura 4.6 relativas às formulações contínuas e discretas, sendo que a descrição de cada função da figura 4.6 é indicada na tabela 4.3.

$x(t)$	$X(s)$	$X(z)$	
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	(01)
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$	(02)
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T_0^2(z+1)}{(z-1)^3}$	(03)
t^3	$\frac{6}{s^4}$	$\frac{T_0^3(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	(04)
e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_0}}$	(05)
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{T_0 z e^{-aT_0}}{(z-e^{-aT_0})^2}$	(06)
$t^2 e^{-at}$	$\frac{2}{(s+a)^3}$	$\frac{T_0 z^2 e^{-aT_0}(z+e^{-aT_0})}{(z-e^{-aT_0})^3}$	(07)
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT_0})z}{(z-1)(z-e^{-aT_0})}$	(08)
$at-1+e^{-at}$	$\frac{a^2}{s^2(s+a)}$	$\frac{(aT_0-1+e^{-aT_0})z^2+(1-aT_0e^{-aT_0}-e^{-aT_0})}{(z-1)^2(z-e^{-aT_0})}$	(09)
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{(b-a)}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{z(e^{-aT_0}-e^{-bT_0})}{(z-e^{-aT_0})(z-e^{-bT_0})}$	(10)
$1-(1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$\frac{z}{z-1}-\frac{z}{(z-e^{-aT_0})}-\frac{aT_0e^{-aT_0}z}{(z-e^{-aT_0})^2}$	(11)
$\sin(\omega_1 t)$	$\frac{\omega_1}{s^2+\omega_1^2}$	$\frac{z\sin(\omega_1 T_0)}{z^2-2z\cos(\omega_1 T_0)+1}$	(12)
$\cos(\omega_1 t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_1^2}$	$\frac{z(z-\cos(\omega_1 T_0))}{z^2-2z\cos(\omega_1 T_0)+1}$	(13)
$e^{-at}\sin(\omega_1 t)$	$\frac{\omega_1}{(s+a)^2+\omega_1^2}$	$\frac{ze^{-aT_0}\sin(\omega_1 T_0)}{z^2-2ze^{-aT_0}\cos(\omega_1 T_0)+e^{-2aT_0}}$	(12)
$e^{-at}\cos(\omega_1 t)$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega_1^2}$	$\frac{z(z-\cos(\omega_1 T_0))}{z^2-2ze^{-aT_0}\cos(\omega_1 T_0)+e^{-2aT_0}}$	(13)

Tabela 4.1: Transformadas de Laplace e Transformadas-Z

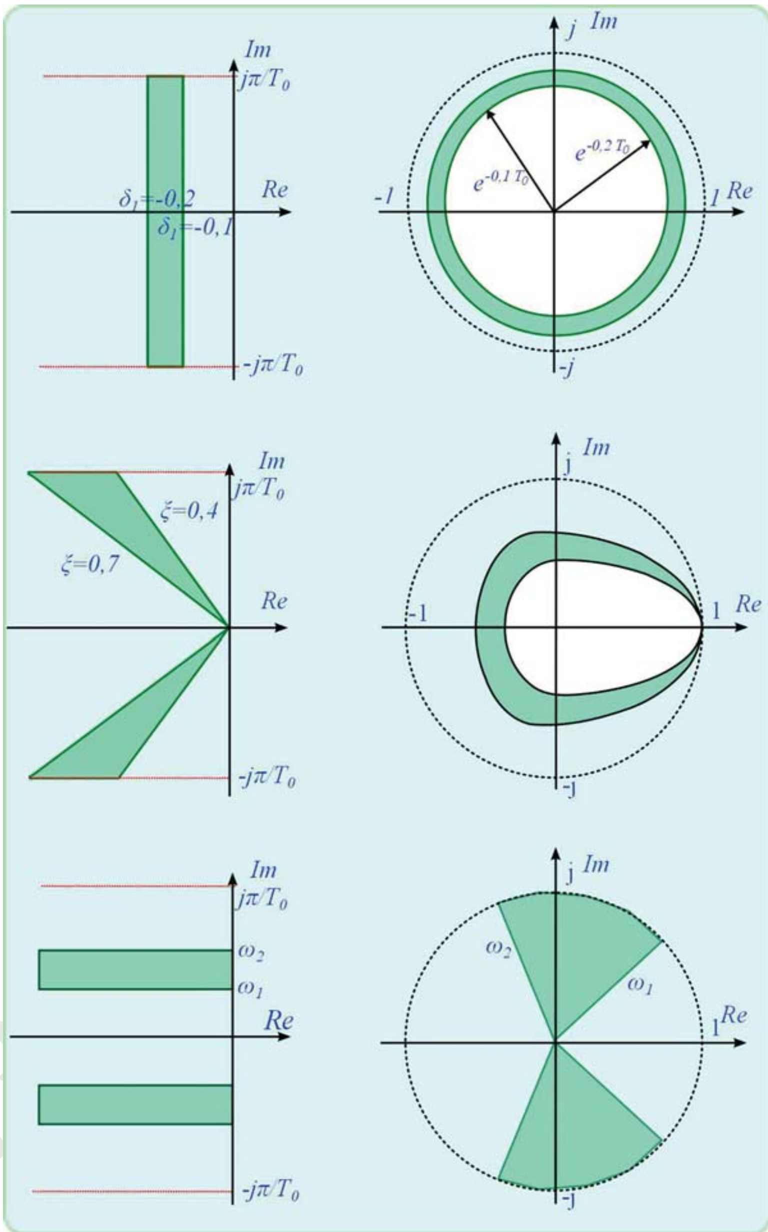


Figura 4.5: Caso (a) : Parte Real Constante; Caso (b) : Fator de Amortecimento Constante; Caso (c) : Parte Imaginária Constante.

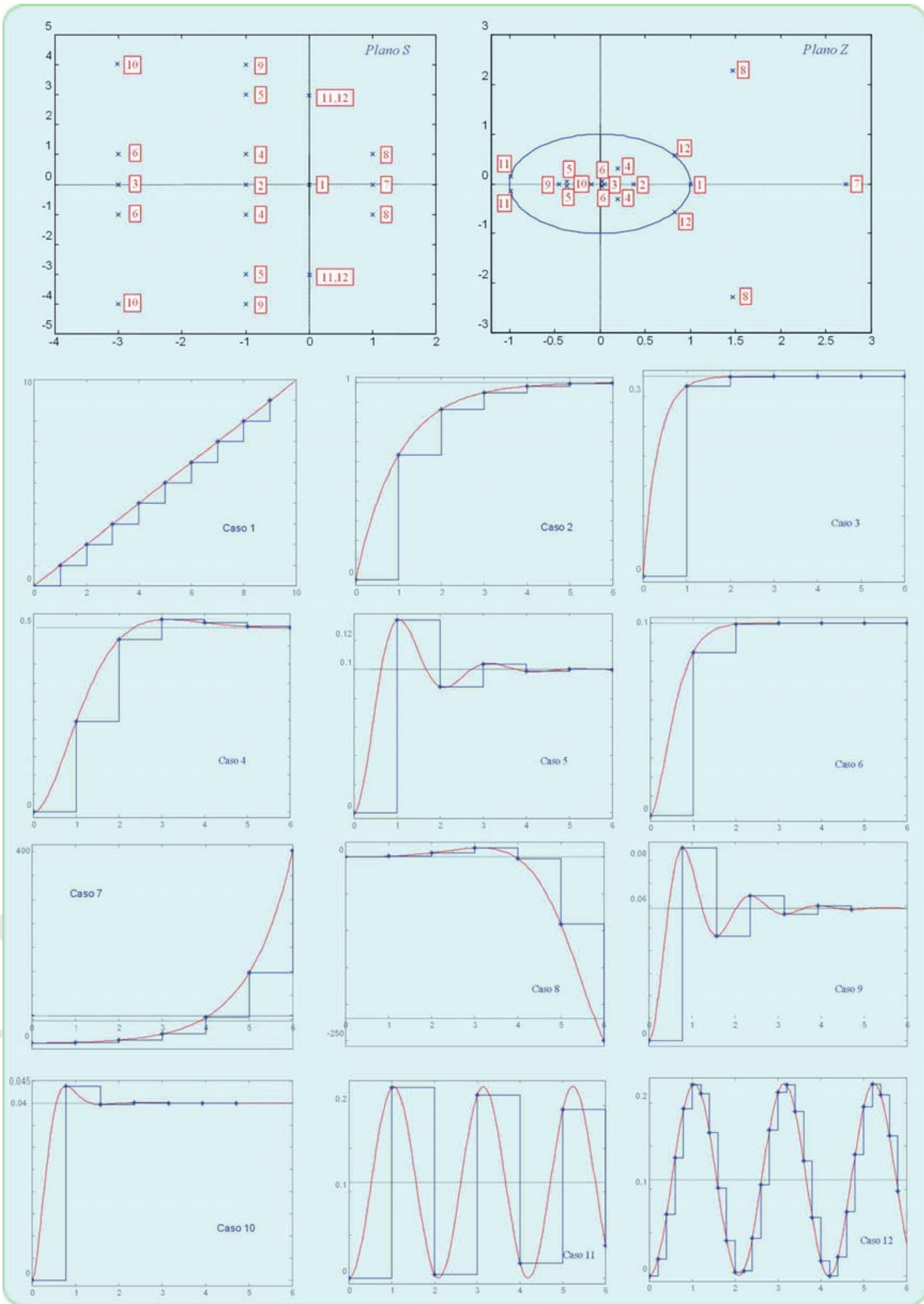


Figura 4.6: Casos especiais de mapeamento de polos e respectivas resposta ao degrau.

$G(s)$	$G(z) = \mathcal{L}\Big\{G(s)\Big\}$	$H_0G(z) = \dfrac{z-1}{z}\mathcal{L}\left\{\dfrac{G(s)}{s}\right\}$
$\dfrac{1}{s}$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\dfrac{T_0}{z-1}$
$\dfrac{1}{s^2}$	$\dfrac{T_0 z}{(z-1)^2}$	$\dfrac{{T_0}^2(z+1)}{2(z-1)^2}$
$\dfrac{1}{s^3}$	$\dfrac{T_0^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\dfrac{T_0^3(z^2+4z+1)}{6(z-1)^3}$
$\dfrac{1}{s+a}$	$\dfrac{z}{(z-e^{-aT_0})}$	$\dfrac{(1-e^{-aT_0})}{a(z-e^{-aT_0})}$
$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	$\dfrac{T_0\ z\ e^{-aT_0}}{(z-e^{aT_0})}$	$\dfrac{(Az+B)}{a^2(z-e^{-aT_0})}$ $A = \big(1-e^{-aT_0}(1+aT_0)\big)$ $B = e^{-aT_0}\big(e^{-aT_0}-1+aT_0\big)$
$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}\dfrac{\big(e^{-aT_0}-e{-}bT_0\big)z}{(z-e^{-aT_0})(z-e^{-bT_0})}$	$\dfrac{1}{ab(a-b)}\dfrac{(Az+B)}{(z-e^{-aT_0})(z-e^{-bT_0})}$ $A = a-b-ae^{-bT_0}+be^{-aT_0}$ $B = (a-b)e^{-(a+b)T_0}-ae^{-aT_0}+be^{-bT_0}$

Tabela 4.2: Transformada-Z com *Holder* de ordem Zero ZOH

Casos	$G(s)$	$G(z)$	T_0
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{z-1}$	1
2	$\frac{1}{s+1}$	$\frac{0,6321}{(z-0,3679}$	1
3	$\frac{1}{s+3}$	$\frac{0,3167}{(z-0,0498)}$	1
4	$\frac{1}{(s+1+i)(s+1-i)}$	$\frac{(0,2458z+0,1231)}{(0,2458z+0,1231)}$	1
5	$\frac{1}{(s+1+3i)(s+1-3i)}$	$\frac{(0,1347z+0,0517)}{z^2+0,7284z+0,1353}$	1
6	$\frac{1}{(s+3+i)(s+3-i)}$	$\frac{(0,0847z+0,0101)}{z^2+0,0538z+0,0025}$	1
7	$\frac{1}{(s-1)}$	$\frac{1,7183}{(z-2,7183)}$	1
8	$\frac{1}{(s-1+i)(s-1-i)}$	$\frac{(0,9093z+1,8165)}{(z^2-2,9374+7,3891)}$	1
9	$\frac{1}{(s+1+4i)(s+1-4i)}$	$\frac{(0,0856z+0,0390)}{(z^2+0,9119z+0,2079)}$	$\frac{\pi}{4}$
10	$\frac{1}{(s+3+4i)(s+3-4i)}$	$\frac{(0,0438z+0,0042)}{(z^2+0,1896z+0,0090)}$	$\frac{\pi}{4}$
11	$\frac{1)}{(s+3i)(s-3i)}$	$\frac{(0,2211z+0,2211)}{(z^2+1,9800z+1,0000)}$	1
12	$\frac{1)}{(s+3i)(s-3i)}$	$\frac{(0,0194z+0,0194)}{z^-1,6507z+1}$	0,2

Tabela 4.3: Funções $G(s)$ e $G(z)$ correspondente à figura 4.6

Capítulo 5

CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE DISCRETA

Como nos casos dos processos contínuos no tempo, é de grande interesse a informação sobre a estabilidade de um determinado processo digital. No caso contínuo estabelece-se que um processo é estável se os pólos da função transferência apresentam parte real negativa. Dessa forma, formularam-se diversos procedimentos para a verificação desta condição, tais como análise do lugar das raízes, método de Routh-Hurwitz, análise frequencial, etc. Da mesma forma serão analisados procedimentos para se verificar a estabilidade discreta.

Com base no mapeamento do "plano-s" no "plano-Z" de acordo com a Eq. (4.39) e com a Fig. 4.3, define-se que um processo discreto linear e invariante no tempo, com equação característica,

$$A(z) = (z - z_1)(z - z_2)(\ \dots\ )(z - z_m) = 0 \tag{5.1}$$

será assintoticamente estável, se os polos do sistema (raízes de $A(z) = 0$) se encontrarem no interior do círculo unitário, ou seja:

$$\left|z_i\right| \ < \ 1, \qquad\qquad i = \ _1/^m \tag{5.2}$$

Polos simples sobre a circunferência de raio "1", determina um sistema oscilante ou estável não assintótico. Polos múltiplos sobre a circunferência, no entanto, determinam sistemas instáveis.

5.1 Métodos de análise da estabilidade discreta

A finalidade dos métodos em estudo a seguir, será obter informações sobre a localização dos polos discretos com relação ao "plano-Z". Os métodos serão apresentados de forma bastante simplificada, pois na atualidade existe uma infinidade de programas de computadores ou até mesmo calculadoras científicas que resolvem ou obtêm as raízes de polinômios. Dessa forma basta verificar a localização relativa destas raízes no "plano-Z" e estabelecer as condições de estabilidade. Por outro lado, os métodos que serão vistos só fornecem informações sobre a existência ou não de polos instáveis.

5.1.1 Método da Transformação Bilinear

O método da transformação bilinear consiste basicamente em se obter um re-mapeamento do "plano-Z" em um outro "plano-W", similar ao "plano-S". Para se obter este novo mapeamento, usa-se então uma transformação bilinear do tipo:

$$w = \frac{z-1}{z+1} \tag{5.3a}$$

ou

$$z = \frac{1+w}{1-w} \tag{5.3a}$$

Pelo mapeamento de planos dado pela Eq. (5.3), o interior do círculo unitário do "plano-Z" será mapeado como sendo o semi-plano esquerdo do "plano-W". Dessa forma pode-se aplicar o conhecido método de Routh-Hurwitz e estabelecer as condições de estabilidade.

Portanto se a Equação Característica de um determinado processo é dada por,

$$A(z) = z^m + a_1\ z^{m-1} + a_2\ z^{m-2} + \ \dots\ + a_{m-1}z + a_m \tag{5.4}$$

substituindo-se a Eq. (5.3) em (5.4), chega-se a uma nova representação da equação característica, tal que:

$$\overline{A}(w) = (1+w)^m + a_1(1+w)^{m-1}(1-w) + \ \dots\ + a_m\ (1-w)^m \tag{5.5}$$

e usa-se então o método de Routh-Hurwitz em $\overline{A}(w) = 0$.

Exemplo 9

Seja um dado sistema com equação característica dada por $A(z) = z^2 + a_1 z + a_2$. Com o uso da (5.3), tem-se

$$\overline{A}(w) = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + a_1\left(\frac{1+w}{1-w}\right) + a_2$$

ou

$$\begin{aligned}\overline{A}(w) &= (1+w)^2 + a_1\ (1+w)(1-w) + a_2(1-w)^2 = \\ &= (1-a_1+a_2)w^2 + 2(1-a_2)w + (1+a_1+a_2)\end{aligned}$$

Aplicando-se o Critério de Routh-Hurwitz, chega-se a:

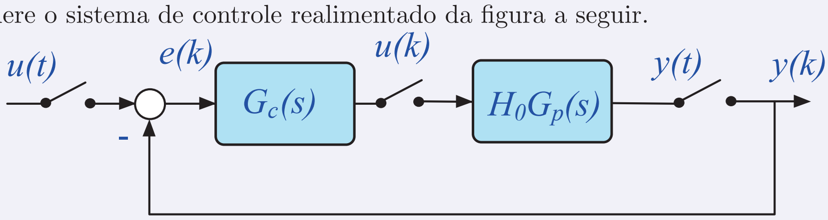
Etapas	Coeficientes	
Etapa 1	$(1 - a_1 + a_2)$	$(1 + a_1 + a_2)$
Etapa 2	$2(1 - a_2)$	0
Etapa 3	$(1 + a_1 + a_2)$	$-$

Portanto, para que tal processo seja estável, devem valer as seguintes condições:

$$\begin{cases} (1 + a_1 + a_2) > 0 \\ (1 - a_1 + a_2) > 0 \\ (1 - a_2) > 0 \end{cases}$$

Exercício 10

Considere o sistema de controle realimentado da figura a seguir.



$$H_{)}G_P(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$G_C(z) = q_0$$

Avalie a faixa de valores de q_0 que garantem a estabilidade do sistema em malha fechada.

5.1.2 Método 2 - Critério de Schur-Cohn-Jury

Este método é análogo ao método de Routh-Hurwitz, pois analisa-se diretamente o polinômio característico $A(z)$, e estabelece condições para que raízes deste polinômio tenham módulo menor que a unidade.

Se o polinômio característico de um dado processo é tal que:

$$A(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + a_{m-2} z^{m-2} + ... + a_1 z + a_0 = 0 \tag{5.6}$$

sendo $a_m > 0$ e “m” a ordem deste processo. Com base na Eq. (5.6), monta-se o seguinte esquema:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
\text{Etapas} & & & & \text{Coeficientes} & & & \\
\hline
1 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-k} & \ldots & a_{m-1} & a_m \\
2 & a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \ldots & a_k & \ldots & a_1 & a_0 \\
 & & & & & & & & \\
3 & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{m-k} & \ldots & b_{m-1} & \\
4 & b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \ldots & b_k & \ldots & b_0 & \\
 & & & & & & & & \\
5 & c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_{m-k} & \ldots & c_{m-2} & \\
6 & c_{m-2} & c_{m-3} & c_{m-4} & \ldots & c_k & \ldots & c_0 & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & & & & \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & & & & \\
(2m-5) & l_0 & l_1 & l_2 & l_3 & & & & \\
(2m-4) & l_3 & l_2 & l_1 & l_0 & & & & \\
 & & & & & & & & \\
(2m-3) & m_0 & m_1 & m_2 & & & & &
\end{array}
\tag{5.7}
$$

Os elementos das linhas pares são os mesmo das linhas ímpares em ordem inversa. Os elementos das linhas ímpares subsequentes são obtidos por:

$$b_k = \det \begin{vmatrix} a_0 & a_{m-k} \\ a_{m-k} & a_0 \end{vmatrix} \tag{5.8a}$$

$$c_k = \det \begin{vmatrix} b_0 & b_{m-k-1} \\ b_{m-k-1} & b_0 \end{vmatrix} \tag{5.9}$$

$$d_k = \det \begin{vmatrix} c_0 & c_{m-k-2} \\ c_{m-k-2} & c_0 \end{vmatrix} \tag{5.10}$$

$$m_0 = \det \begin{vmatrix} l_0 & l_3 \\ l_3 & l_0 \end{vmatrix} \tag{5.11}$$

$$m_2 = \det \begin{vmatrix} l_0 & l_1 \\ l_1 & l_0 \end{vmatrix} \tag{5.12}$$

Depois de processado o esquema acima até a linha $(2m-3)$, procede-se a seguinte análise dos coeficientes obtidos.

Segundo o critério de Shur-Cohn-Jury, para que as raízes de um polinômio $A(z) = 0$ tenham módulo menor ou igual à unidade, devem valer as seguintes condições:

$$A(1) > 0 \tag{5.13a}$$

$$(-1)^m A(-1) > 0 \tag{5.13b}$$

$$|a_0| < a_m \tag{5.13c}$$

$$|b_0| > |b_{m-1}| \tag{5.13d}$$

$$|c_0| > |c_{m-2}| \tag{5.13e}$$

$$|d_0| > |d_{m-3}| \tag{5.13f}$$

$$\vdots$$
$$|m_0| \;>\; |m_2| \tag{5.13g}$$

De acordo com a Eq. (5.13), para um sistema de ordem "m", deve-se checar "(m+1)" condições. Dessa forma,

- para ($m = 2$) (Sistemas de 2ª ordem)

$$\left\{\begin{array}{lcl} A(1) & > & 0 \\ A(-1) & > & 0 \\ |a_0| & < & a_2 \end{array}\right. \tag{5.14}$$

- para ($m = 2$) (Sistemas de 3ª ordem)

$$\left\{\begin{array}{lcl} A(1) & > & 0 \\ -A(-1) & > & 0 \\ |a_0| & < & a_3 \\ |b_0| & > & |b_2| \end{array}\right. \tag{5.15}$$

Exemplo 10

Dado um processo com polinômio característico:

$$A(z) = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

a análise da estabilidade, com base no critério de Shur-Cohn-Jury será:

Etapas	Coeficientes			
1	a_0	a_1	a_2	a_3
2	a_3	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	

e através das condições (5.15) tem-se:

$$\begin{array}{l} A(1) = 1 + a_2 + a_1 + a_0 \;>\; 0 \\ -A(-1) = -1 + a_2 - a_1 + a_0 \;>\; 0 \\ |a_0| \;<\; 1 \\ |b_0| \;>\; |b_2| \;\Rightarrow\; |(a_0^2 - 1)| \;>\; |(a_0 a_2 - a_2)| \end{array}$$

A aplicação dos métodos enunciados acima só serão de interesse quando se deseja uma análise da estabilidade em função de algum parâmetro desconhecido no processo ou no controlador. Caso o polinômio característico seja completamente numérico, é usual o uso de programas de cálculo de raízes, e então investigar não só a localização das raízes no "plano-Z" mas também sua condição de estabilidade.

Com auxílio do Matlab é possível a inspeção e avaliação da estabilidade por diversas maneiras com os comandos: `roots`, `pzmap`, `pzmap`, `rlocus` entre outros e que serão alvo de exercícios em aula.

Capítulo 6

DESCRIÇÃO DE PROCESSOS DISCRETOS NO ESPAÇO DE ESTADOS

A representação de processo no espaço de estados pode trazer vantagens na solução e operação computacional, já que esta representação envolve uma descrição matricial. Na notação por espaço de estados, a representação do processo para diversos valores de T_0 acarretará alterações nas matrizes da descrição matemática e será ainda mais vantajosa na representação de sistemas MIMO com múltiplas entradas e saídas. Será também visto no capítulo 8.4 que esta notação proporciona a especificação de controladores de forma simples e muito eficaz.

Na figura 6.1 é indicada a correspondência entre as representações de processo SISO com uma entrada e uma saída, por Função Transferência (FT) e por Variáveis de Estado (VE). No espaço de estados, é admitido que todo processo de amostragem é acompanhado de um processo de retenção ("*Holder*"de ordem Zero).

6.1 Obtenção das Equações de Estado Discreta

Inicialmente serão considerados processos SISO, a partir do qual podem se obter o caso geral de processos MIMO. Considerando-se um processo SISO contínuo no tempo e de ordem m, sua representação em Variáveis de Estado será:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\ \underline{x}(t) + \underline{B}\ \underline{u}(t) \\ \\ \underline{y}(t) = \underline{C}\ \underline{x}(t) + \underline{D}\ \underline{u}(t) \end{cases} \tag{6.1}$$

A solução da Eq. (6.1) pode ser encontrada com o uso da Transformada de Laplace, ou por utilização de conceitos de EDO (Equações Diferenciais Ordinárias) e tal que a

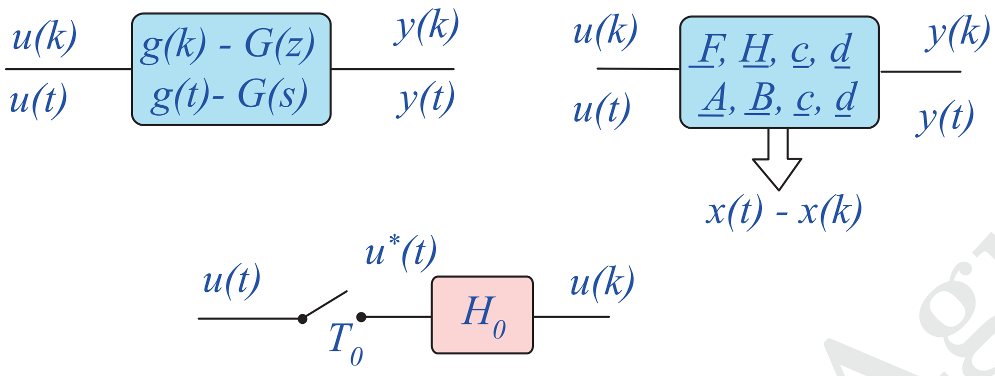


Figura 6.1: Equivalência entre as representações por FT e por VE.

solução de (6.1) possa ser expressa por:

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t - t_0)\underline{x}(0) + \int_0^t \underline{\Phi}(t - \tau)\underline{B}\ \underline{u}(t)\ d\tau \tag{6.2}$$

sendo que$\underline{\Phi}(t)$é denominada Matriz de Transição de Estados e é definida como:

$$\underline{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[s\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1}\right\} = e^{\underline{A}\ t} \tag{6.3}$$

a qual por expansão em série de Taylor, também pode ser expressa por:

$$\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}\ t} = \sum_0^\infty \frac{(\underline{A}\ t)^\nu}{\nu\ !} \tag{6.4}$$

Com base nas Eqs. (6.3) e (6.4) observa-se que há dois procedimentos para se chegar à solução das equações de estado dado em (6.1): considerando-se a expressão da função exponencial matricial ou usando-se sua aproximação pela série de Fourier.

Para o caso do processo discreto com *Holder*, vale,

$$u(t) \ \Rightarrow\ u(kT_0) \qquad\qquad kT_0\ \leq\ t\ \leq\ (k+1)T_0 \tag{6.5}$$

sendo o valor inicial dado por $\underline{x}(kT_0)$. Dessa forma a Eq. (6.1) pode ser rescrita como,

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t - kT_0)\underline{x}(kT_0) + \int_{kT_0}^t \underline{\Phi}(t - \tau)\underline{B}\ \underline{u}(kT_0)d\tau \tag{6.6}$$

Para o instante $(k+1)T_0$, a solução será então:

$$\underline{x}((k+1)T_0) = \underline{\Phi}(T_0)\underline{x}(kT_0) + \int_{kT_0}^{(k+1)T_0} \underline{\Phi}((k+1)T_0 - \tau)\underline{B}\ \underline{u}(kT_0)d\tau \tag{6.7}$$

ou com $q = (k+1)T_0 - \tau$ e $dq = -d\tau$,

$$\underline{x}(k+1) = \underline{\Phi}(T_0)\ \underline{x}(k) + \underline{u}(k) \int_0^{T_0} \underline{\Phi}(q)\underline{B}\ dq \tag{6.8}$$

Definindo-se:

$$\underline{F} = \underline{\Phi}(T_0) = e^{\underline{A}\ T_0} \tag{6.9a}$$

$$\underline{H} = \int_0^{T_0} \underline{\Phi}(q)\underline{B}\ dq \tag{6.9b}$$

chega-se à representação da equação diferença matricial ou Equação de Estado Discreta:

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \underline{F}\ \underline{x}(k) + \underline{H}\ \underline{u}(k) \\ \\ y(k) = \underline{C}\ \underline{x}(k) + \underline{D}\ \underline{u}(u) \end{cases} \tag{6.10}$$

Usando-se a representação em série como definida em (6.4), as matrizes $\underline{F}$ e $\underline{H}$ podem ser representadas de outra forma como:

$$\underline{F} = \underline{\Phi}(T_0) = e^{\underline{A}\ T_0} \approx \underline{I} + \sum_{\nu=0}^{M} \frac{(\underline{A}T_0)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} = \underline{I} + \underline{A}\ \underline{L} \tag{6.11}$$

$$\underline{H} \approx \int_0^{T_0} \sum_{\nu=0}^{M} \underline{A}^{\nu} \frac{q^{\nu}}{\nu!} \underline{B}\ dq = \sum_{\nu=0}^{M} \int_0^{T_0} q^{\nu} \frac{\underline{B}}{\nu!} dq = \underline{L}\ \underline{B} \tag{6.12}$$

com:

$$\underline{L} = T_0 \sum_{\nu=0}^{M} \frac{(\underline{A}T_0)^{\nu}}{(\nu+1)!} \tag{6.13}$$

As expressões nas Eqs. (6.11) e (6.12) determinam portanto a correspondente versão discreta das matrizes $\underline{A}$ e $\underline{B}$ da versão contínua do espaço de estados respectivamente, usando-se a representação por aproximação em série de Taylor.

Exemplo 11 - Solução exata

Seja um sistema representado pela equação diferencial abaixo:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

A correspondente representação por variáveis de estado contínuas será:

$$\dot{x}_2(t) = -3x_2(t) - 2x_1(t) + u(t)$$

com

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) \end{aligned}$$

em forma matricial obtém-se então:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\dot{\underline{y}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

sendo portanto:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad d = 0$$

A denominada solução exata é obtida usando a solução pelo método da Transformada Inversa de Laplace, ou seja:

$$\begin{bmatrix} s\underline{I} - \underline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & (s+3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s\underline{I} - \underline{A} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^3 + 3s + 2} \begin{bmatrix} (s+3) & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

e finalmente a matriz de transição $\underline{\Phi}(t)$ será:

$$\underline{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big\{ \begin{bmatrix} s\underline{I} - \underline{A} \end{bmatrix} \Big\} = \begin{bmatrix} (e^{-t} - e^{-2t}) & (e^{-t} - e^{-2t}) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t}) & (-e^{-t} + 2e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

e no caso discreto, usando 6.9-a:

$$\underline{F} = \underline{\Phi}(T_0) = \begin{bmatrix} (e^{-T_0} - e^{-2T_0}) & (e^{-T_0} - e^{-2T_0}) \\ (-2e^{-T_0} + 2e^{-2T_0}) & (-e^{-T_0} + 2e^{-2T_0}) \end{bmatrix}$$

Pelo uso da Eq. (6.9-b),

$$\underline{H} = \int_0^{T_0} \underline{\Phi}(q)\underline{B}\, dq = \int_0^{T_0} \underline{F}(q) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dq = \begin{bmatrix} (1/2 - e^{-T_0} + 1/2e^{-2T_0}) \\ (e^{-T_0} - e^{-2T_0}) \end{bmatrix}$$

A representação deste processo por variáveis de estado discretas será então:

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \underline{F}\ \underline{x}(k) + \underline{H}\ \underline{u}(k) \\[2ex] \underline{y}(k) = \underline{C}\ \underline{x}(k) + \underline{D}\ \underline{u}(u) \end{cases}$$

com $T_0 = 1$ seg,, tem-se finalmente:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0,6004 & 0,2325 \\ -0,4651 & -0,0972 \end{bmatrix} \qquad \underline{H} = \begin{bmatrix} 0.1998 \\ 0,23251 \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad d = 0$$

Exercício 11

Obter as matrizes $\underline{F}$ e $\underline{H}$ do exemplo 11, pelo método de aproximação com expansão em série e truncamento no 3ª elemento da série. Comparar os resultados numéricos com os do exemplo 11.

Exercício 12

Para um sistema SISO dado por (6.10), mostre que a respectiva representação por Função Transferência será dada por:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \underline{c}\,\left|z\;\underline{I} - \underline{F}\right|^{-1}\;\underline{H} + \underline{d} \tag{6.14}$$

Exercício 13

Usando os valores numéricos do exemplo 11, mostre que

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}_{t=kT_0}\right\}$$

é igual a

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \underline{c}\,\left|z\;\underline{I} - \underline{F}\right|^{-1}\;\underline{H} + \underline{d}$$

6.2 Obtenção das Equações de Estado Discreta a partir da Equação Diferença

Se um processo é representado por sua respectiva equação diferença, tal como,

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \;...\; + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \;...\; + b_n u(k-n) \tag{6.15}$$

fazendo-se uma troca de índices $k = k + n$, pode-se rescrever a Eq. (6.15) como:

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \;...\; + a_n y(k) = b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \;...\; + b_n u(k) \tag{6.16}$$

e a correspondente representação por Função Transferência será:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \;...\; + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \;...\; + a_n z^{-n}} \\ &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \;...\; + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \;...\; + a_n} \end{aligned} \tag{6.17}$$

Para a representação dada na Eq. (6.16), escolhe-se as Variáveis de Estado como sendo:

$$\begin{cases} y(k) = x_1(k) \\ y(k+1) = x_2(k) = x_1(k+1) \\ y(k+2) = x_3(k) = x_2(k+1) \\ \vdots \\ y(k+n=1) = x_n(k) = x_{n-1}(k+1) \\ y(k+n) = x_n(k+1) \end{cases} \tag{6.18}$$

Para a escolha feita em (6.18), observa-se o seguinte:

(a) - No instante de tempo discreto "k", as variáveis de estado discretas representam o valor da grandeza de saída nos instantes k, $(k+1)$, $(k+2), \ldots$ $(k+n-1)$, ou seja $y(k+n-1)$, $y(k+n-2)$, ... $y(k+1)$, $y(k)$. Dessa forma, para cada instante "k", as V.E. representam o valor da grandeza de saída $y(k)$ e os $(n-1)$ valores futuros desta grandeza de saída, (ou o valor da grandeza de saída $y(k+n-1)$ e os $(n-1)$ valores passados desta grandeza de saída).

(b) - De acordo com (6.18), à medida em que o tempo decorre, por exemplo, do instante k para $(k+1)$, de $(k+1)$ para $(k+2)$, etc., o valor de $y(k)$ recebe o valor de $y(k+1)$, o de $y(k+1)$ recebe o valor de $y(k+2)$, e assim por diante, tal que $x_1(k+1) = x_2(k)$, $x_2(k+1) = x_2(k)$, ... , Isso representa então o deslocamento de $y(k)$ na equação diferença dada por (6.16).

Para um sistema SISO, e admitindo momentaneamente para simplificar que $b_n = 1$ e $b_0 = b_1 = b_2 = \ \ldots \ = b_{n-1} = 0$, a Eq. (6.16) será:

$$\begin{aligned} y(k+n) &= x_n(k+1) = -a_1 x_n(k) - a_2 x_{n-1}(k) - \ \ldots \ - \\ & \quad \ldots - a_{n-1} x_2(k) - a_n x_1(k) + 1u(k) \end{aligned} \tag{6.19}$$

a qual pode ser escrita em forma matricial, tal como:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ & & & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & & \ldots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \tag{6.20}$$

e pela Eq. (6.18), a saída será:

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + [0]u(k) \tag{6.21}$$

Definindo-se adequadamente, as matrizes constantes nas Eqs. (6.20) e (6.21), chega-se à representação do sistema no espaço de estados,

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \underline{F}\ \underline{x}(k) + \underline{H}\ \underline{u}(k) \\ \\ \underline{y}(k) = \underline{C}\ \underline{x}(k) + \underline{D}\ \underline{u}(u) \end{cases} \tag{6.22}$$

Com as condições impostas acima, e com base nas Eqs. (6.17) e (6.18), tem-se,

$$y(z) = \frac{1}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \; ... \; + a_n} \; u(z) = x_1(z) \tag{6.23}$$

Entretanto, se $b_n \neq 1$ e $b_0 = b_1 = b_2 = \; ... \; = b_{n-1} \neq 0$, com base nas Eqs. (6.17) e (6.23) a saída será:

$$y(z) = b_n x_1(z) + b_{n-1} z x_1(z) + b_{n-2} z^2 x_1(z) + \; ... \; + b_0 z^n x_1(z) \tag{6.24}$$

ou

$$y(k) = b_n x_1(k) + b_{n-1} x_1(k+1) + b_{n-2} x_1(k+2) + \; ... \; + b_0 x_n(k+n) \tag{6.25}$$

Com a escolha da V.E. tal como em (6.18), vale então,

$$y(k) = b_n x_1(k) + b_{n-1} x_2(k) + b_{n-2} x_3(k) + \; ... \; + b_0 x_n(k+1) \tag{6.26}$$

Com o uso da Eq. (6.19), segue finalmente que saída pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} y(k) = \Big(b_n - b_0 a_n\Big) x_1(k) + \Big(b_{n-1} - b_0 a_{n-1}\Big) x_2(k) + \Big(b_{n-2} - b_0 a_{n-2}\Big) x_3(k) + \\ ... \; + \Big(b_1 - b_0 a_1\Big) x_n(k) + b_0 u(k) \end{aligned} \tag{6.27}$$

Em forma vetorial, a expressão (6.27) é dada por:

$$y(k) = \Big[\Big(b_n - b_0 a_n\Big) \;\; ... \;\; \Big(b_1 - b_0 a_1\Big)\Big] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \tag{6.28}$$

Para sistemas físicos realizáveis tem-se que $b_0 = 0$ na Eq. (6.28).

Pela escolha das V.E. como em (6.18), nota-se ainda que a matriz $\underline{F}$ do sistema apresenta o valor "1" na sub-diagonal superior, e a linha inferior contendo os coeficientes "a_i" do processo. Os valores "1" da sub-diagonal superior indicam a interdependência entre as V.E. através do deslocamento discreto do valor de um estado para outro. A última linha da matriz "$\underline{F}$" com os coeficientes "a_i" determina a dependência da V.E. $x_n(k+1)$ com as demais V.E., e portanto o acoplamento interno do sistema.

O vetor "H" determina como a grandeza de entrada $u(k)$ influi sobre os estados, e o vetor de saída "c" determina por sua vez, como a grandeza de saída é construída a partir dos estados.

A disposição dos elementos da matriz "$\underline{F}$", caracteriza uma forma canônica denominada "Forma Canônica Controlável". De acordo com a representação do processo no espaço de estados como dada pelas Eqs. (6.20) e (6.26), um correspondente diagrama temporal discreto pode ser elaborado, tal como indicado na figura 6.2.

O correspondente diagrama de blocos vetorial de acordo com a Eq. (6.22) será tal como indicado na figura 6.3:

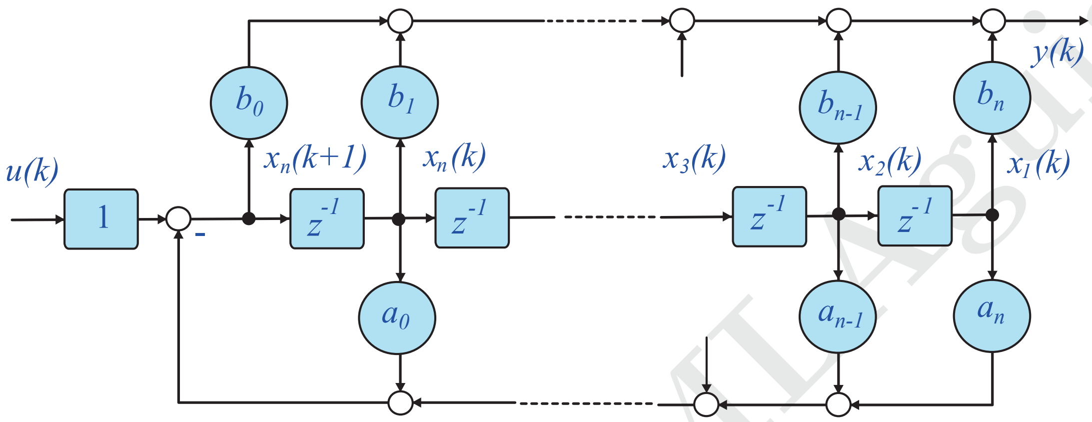


Figura 6.2: Diagrama de blocos temporal discreto da representação no espaço de estados.

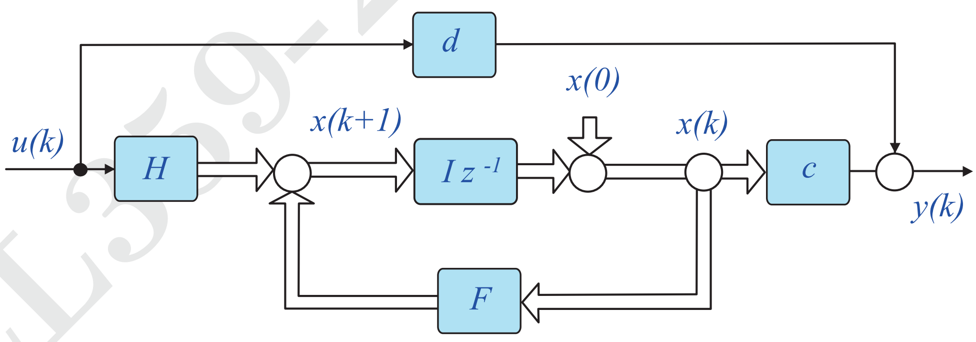


Figura 6.3: Diagrama de blocos vetorial da representação no espaço de estados.

6.3 Formas Canônicas no Espaço de Estados

A forma canônica Controlável obtida no desenvolvimento do item 6.2 é apenas uma das formas possíveis de representação de um processo no espaço de estados.

Outras formas canônicas podem ser obtidas pela aplicação de uma Transformação linear, tal como:

$$\underline{x}_T(k) = \underline{\mathbf{T}}\ \underline{x}(k) \tag{6.29}$$

de forma que o sistema transformado será representado por:

$$\begin{cases} \underline{x}_T(k+1) = \underline{F}_T\ \underline{x}_T(k) + \underline{H}_T\ \underline{u}(k) \\ \\ \underline{y}_T(k) = \underline{c}_T\ \underline{x}_T(k) + \underline{d}\ \underline{u}(k) \end{cases} \tag{6.30}$$

com

$$\underline{F}_T = \underline{\mathbf{T}}\ \underline{F}\ \underline{\mathbf{T}}^{-1} \tag{6.31a}$$

$$\underline{H}_T = \underline{\mathbf{T}}\ \underline{H} \tag{6.31b}$$

$$\underline{F}_T = \ \underline{c}\ \underline{\mathbf{T}} \tag{6.31c}$$

As principais formas canônicas são indicadas na tabela 6.1.

6.4 Controlabilidade e Observabilidade

Controlabilidade e Observabilidade são conceitos muito importantes na realização de controle por realimentação de estados, que será visto oportunamente.

Em geral o controle por realimentação de estados só será possível se o sistema em questão for completamente controlável e observável.

6.4.1 Definição da Controlabilidade

Um sistema será dito controlável se existir uma "única" sequência de ação de controle ou excitação $u(k)$, que seja capaz de levar o sistema do estado inicial $x(0)$ para um estado final $x(N)$ em um tempo finito N.

A sequência desejada de $u(k)$ é obtida com base na equação Eq. (6.22) tal que:

$$\begin{cases} \underline{x}(1) = \underline{F}\ \underline{x}(0) + \underline{H}\ u(0) \\ \underline{x}(2) = \underline{F}\ \underline{x}(1) + \underline{H}\ u(1) \\ \qquad\quad = \underline{F}^2\ \underline{x}(0) + \underline{F}\ \underline{H}u(0) + \underline{H}\ u(1) \\ \vdots \\ \underline{x}(k) = \underbrace{\underline{F}^k\ \underline{x}(0)}_{\text{S. Homogênea}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \underline{F}^{i-1}\ \underline{H}\ u(k-i)}_{\text{S. Particular}} \end{cases} \tag{6.32}$$

Para o instante "N", a Eq. (6.32) pode ser rescrita matricialmente como,

$\begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & z_m \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b_{1D} \\ b_{2D} \\ b_{3D} \\ \vdots \\ b_{mD} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_{1D} \\ c_{2D} \\ c_{3D} \\ \vdots \\ c_{mD} \end{bmatrix}$	Diagonal
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & -a_m \\ 1 & 0 & 0 & ... & -a_{m-1} \\ 0 & 1 & 0 & ... & -a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & -a_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{c}^T \underline{h} \\ \underline{c}^T \underline{F} \underline{h} \\ \underline{c}^T \underline{F}^2 \underline{h} \\ \vdots \\ \underline{c}^T \underline{F}^{m-1} \underline{h} \end{bmatrix}$	Controlabilidade
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_m & -a_{m-1} & -a_{m-2} & ... & -a_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ b_{m-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}$	Controlável
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_m & -a_{m-1} & -a_{m-2} & ... & -a_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{c}^T \underline{h} \\ \underline{c}^T \underline{F} \underline{h} \\ \underline{c}^T \underline{F}^2 \underline{h} \\ \vdots \\ \underline{c}^T \underline{F}^{m-1} \underline{h} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$	Observabilidade
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & -a_m \\ 1 & 0 & 0 & ... & -a_{m-1} \\ 0 & 1 & 0 & ... & -a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & -a_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ b_{m-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$	Observável

Tabela 6.1: Formas canônicas usuais

$$\underline{X}(N) = \underline{F}^N \underline{x}(0) + \Big[\underline{H} \quad (\underline{F}\ \underline{H}) \quad (\underline{F}^2 \underline{H}) \ \ ... \ \ (\underline{F}^{N-1} \underline{H})\Big]\ \underline{U}_N \tag{6.33}$$

com:

$$\underline{U}_N = \Big[u(-1) \quad u(N-2) \quad u(N-3)\ ...\ u(0)\Big]^T \tag{6.34}$$

Se a ordem do sistema é "m", uma solução única para a sequência $\underline{U}_N$, é obtida se $N = m$, tal que,

$$\underline{U}_m = \underline{Q}_S^{-1} \Big[\underline{X}(m) - \underline{F}^m \underline{x}(0)\Big] \tag{6.35a}$$

$$\underline{Q}_S = \Big[\underline{H} \quad (\underline{F}\ \underline{H}) \quad (\underline{F}^2 \underline{H}) \ \ ... \ \ (\underline{F}^{N-1} \underline{H})\Big] \tag{6.35b}$$

A matriz de controlabilidade $\underline{Q}_S$ tal como definida acima, será inversível se,

$$\det\Big\{\underline{Q}_S\Big\} \neq 0 \qquad\qquad ou \quad \mathcal{R}ank\Big\{\underline{Q}_S\Big\} = m \tag{6.36}$$

Para $N < m$, não haverá solução do sistema linear dado por (6.35 e se $N > m$ haverá múltipla soluções.

6.4.2 Definição de Observabilidade

Um sistema é dito observável, se a partir do conhecimento de uma sequência de saída $y(k),\ y(k+1),\ ...\ , y(k+N-1)$ e de duma sequência de entrada $u(k),\ u(k+1),\ ...\ u(k+N-1)$, é possível encontrar o vetor de estado $x(k)$ num instante qualquer.

Neste caso o ponto de partida é a equação de saída de estado,

$$y(k) = \underline{c}\ \underline{x}(k) \tag{6.37}$$

Com auxílio da Eq. (6.25), a Eq. (6.37) pode fornecer:

$$\begin{cases} y(k) = \underline{c}\ \underline{x}(k) \\ y(k+1) = \underline{c}\ \underline{F}\ \underline{x}(k) + \underline{c}\ \underline{H} u(k) \\ y(k+2) = \underline{c}\ \underline{F}^2\ \underline{x}(k) + \underline{c}\ \underline{F}\ \underline{H} u(k) + \underline{c}\ \underline{H} u(k) \\ \vdots \\ y(k+n-1) = \underline{c}\ \underline{F}^{N-1}\ \underline{x}(k) + \Big[\underline{0} \quad \underline{c}\ \underline{H} \quad \underline{c}\ \underline{F}\ \underline{H}\ ...\ \ \underline{c}\ \underline{F}^{N-2} \underline{H}\Big]\ \underline{U}_N^* \end{cases} \tag{6.38}$$

com

$$\underline{U}_N^* = \Big[u(k+N-1) \quad u(k+N-2)\ \ ...\ \ u(k+1) \quad u(k)\Big] \tag{6.39}$$

Se a sequência de entrada $\underline{U}_N^*$ é conhecida, uma solução única para os "m" elementos do vetor $\underline{x}(k)$ só será possível se existirem "m" equações em (6.38), ou seja, $N = m$ e tal que:

$$\underline{Y}_m = \underline{Q}_B\ \underline{x}(k) + \underline{S}\ \underline{U}_N^* \tag{6.40}$$

com

$$\underline{Y}_m = \Big[y(k) \quad y(k+1) \; \ldots \; u(k+m-2) \quad u(k+m-1) \Big]^T \tag{6.41a}$$

$$\underline{U}^*_m = \Big[u(k+m-1) \quad u(k+m-2) \; \ldots \; u(k+1) \quad u(k) \Big]^T \tag{6.41b}$$

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \underline{c}\,\underline{F} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \underline{c}\,\underline{FH} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \underline{c}\,\underline{F} & \underline{c}\,\underline{FH} & \ldots & \underline{c}\,\underline{F}^{m-2}\underline{H} \end{bmatrix} \tag{6.41c}$$

$$\underline{Q}_B = \Big[\underline{c} \quad (\underline{c}\,\underline{F}) \quad (\underline{c}\,\underline{F}^2) \; \ldots \; (\underline{c}\,\underline{F}^{m-1}) \Big] \tag{6.41d}$$

Portanto o estado genérico no instante k dado por $\underline{x}(k)$ será conhecido pela expressão:

$$\underline{x}(k) = \underline{Q}_B^{-1} \Big[\underline{Y}_m - \underline{S}\,\underline{U}^*_m \Big] \tag{6.42}$$

se a matriz de Observabilidade $\underline{Q}_B$ for inversível, e para isto deve ter ou verificar:

$$\det \Big\{ \underline{Q}_B \Big\} \neq 0 \qquad ou \quad \mathcal{R}ank \Big\{ \underline{Q}_B \Big\} = m \tag{6.43}$$

Exercício 14

Dado os processos a seguir:

$$\text{a) - } G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$\text{b) - } G(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

Para cada caso, obter:

i) - as formas canônicas de controlabilidade e de observabilidade;

ii) - verificar as condições para os processos serem controláveis e observáveis.