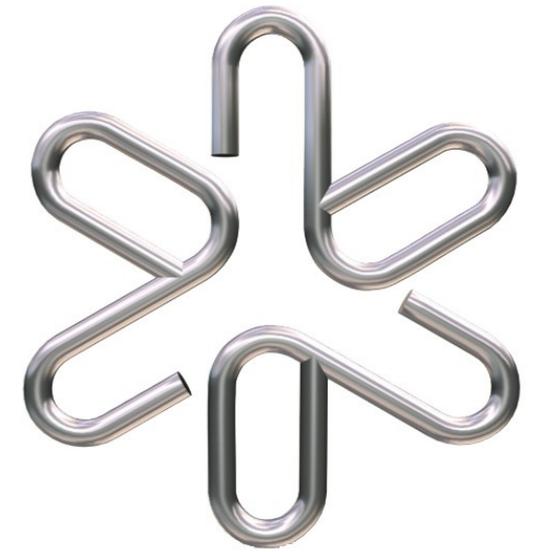


Física do Corpo Humano (4300325)



Prof. Adriano Mesquita Alencar
Dep. Física Geral
Instituto de Física da USP

A03

Leis de Escala



Gulliver

Lei de Potência - Livre de Escala

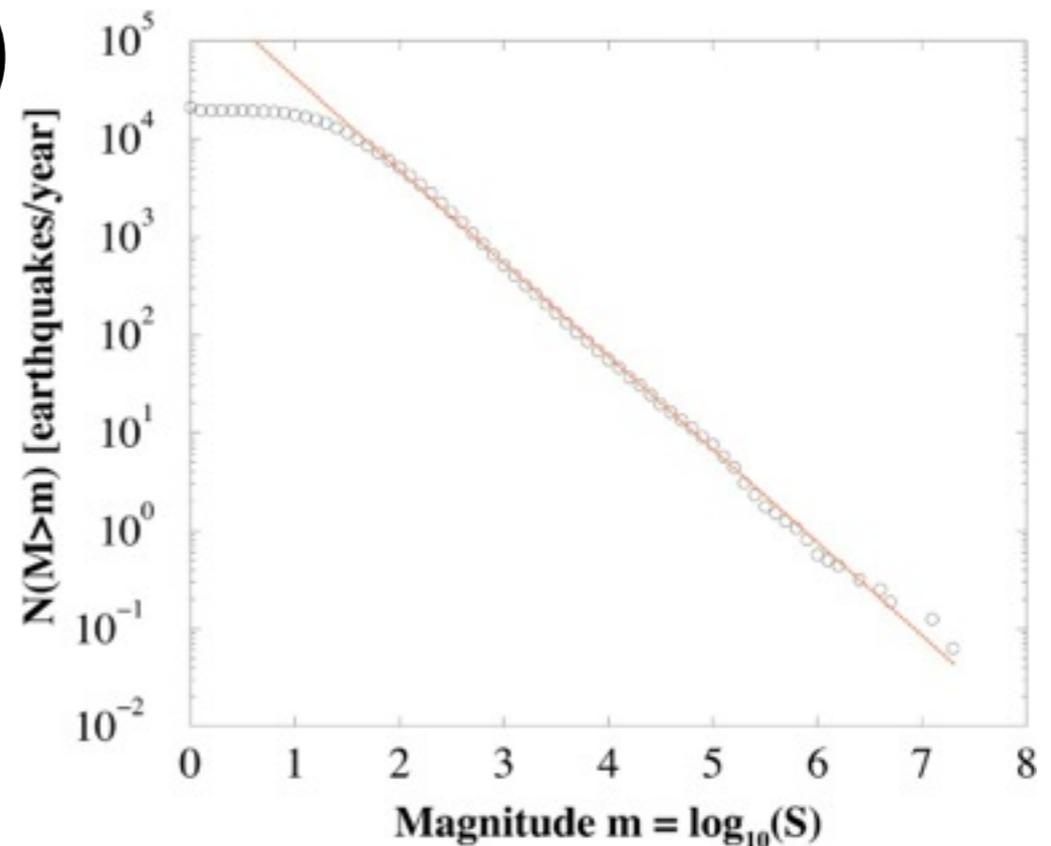
Lei de Potência: Frequência de um evento varia como uma potência de um atributo desse evento

$$f(x) = ax^k$$

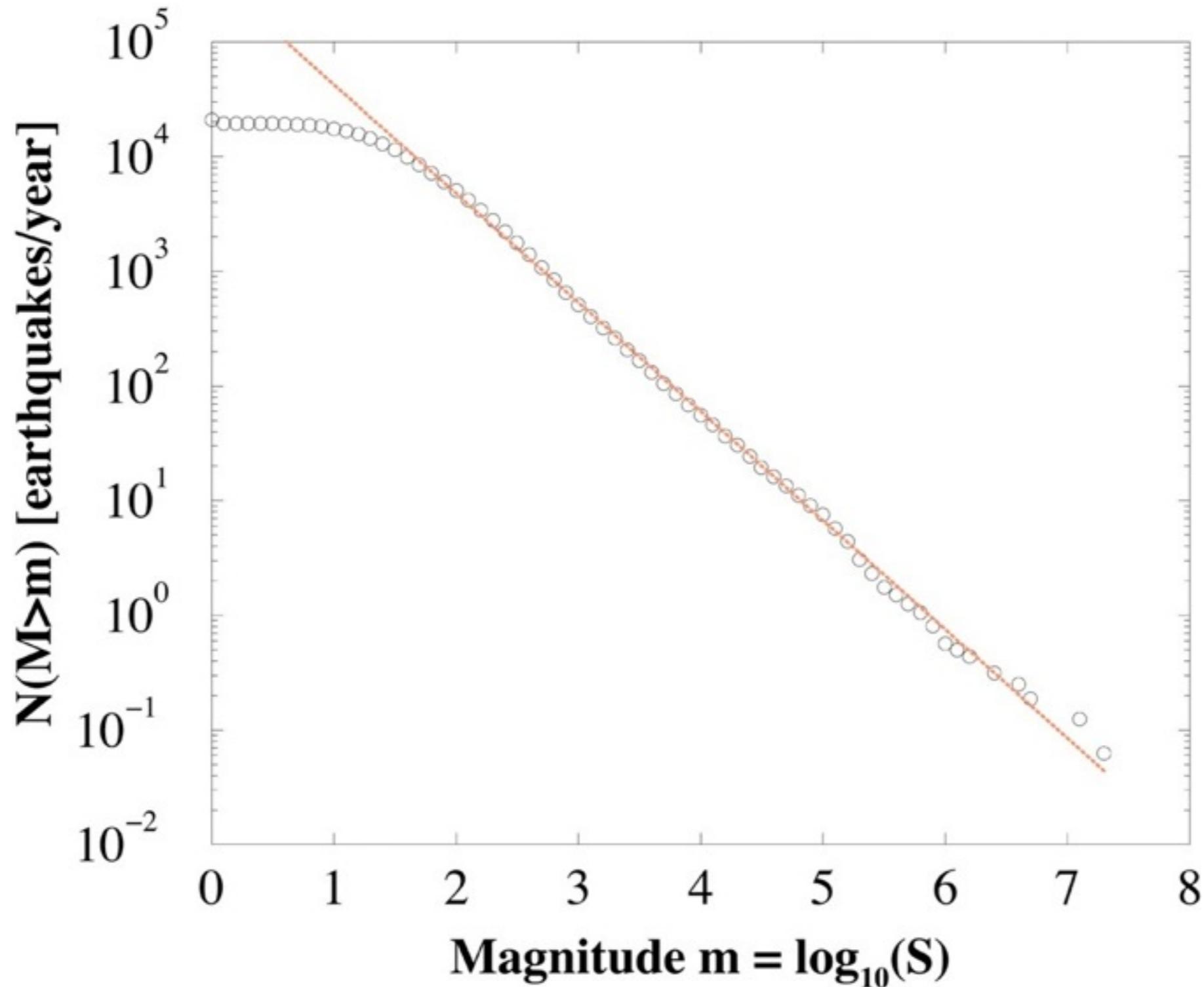
$$\log(f(x)) = k \log(x) + \log(a)$$

$$f(cx) \propto f(x)$$

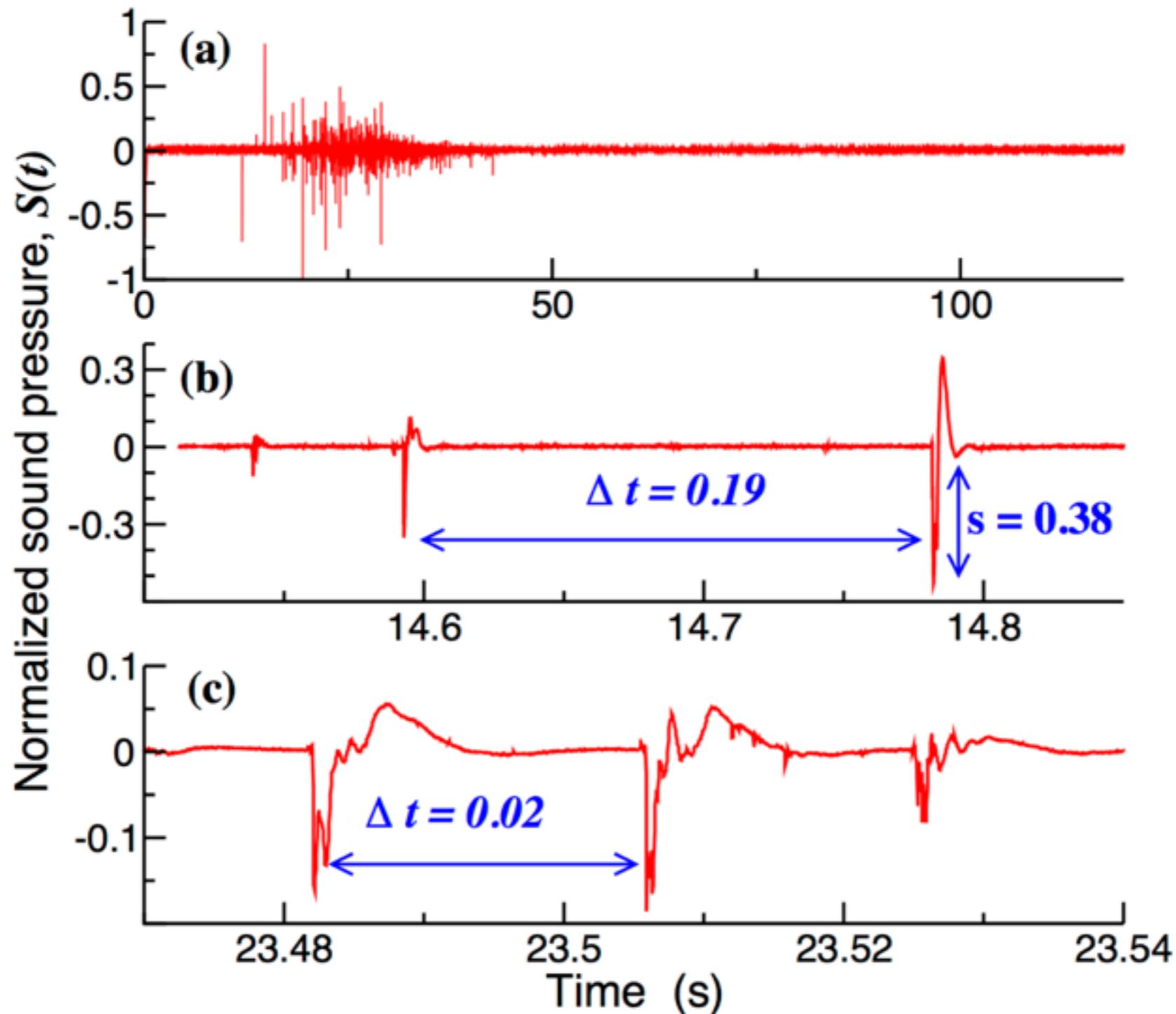
invariante de escala



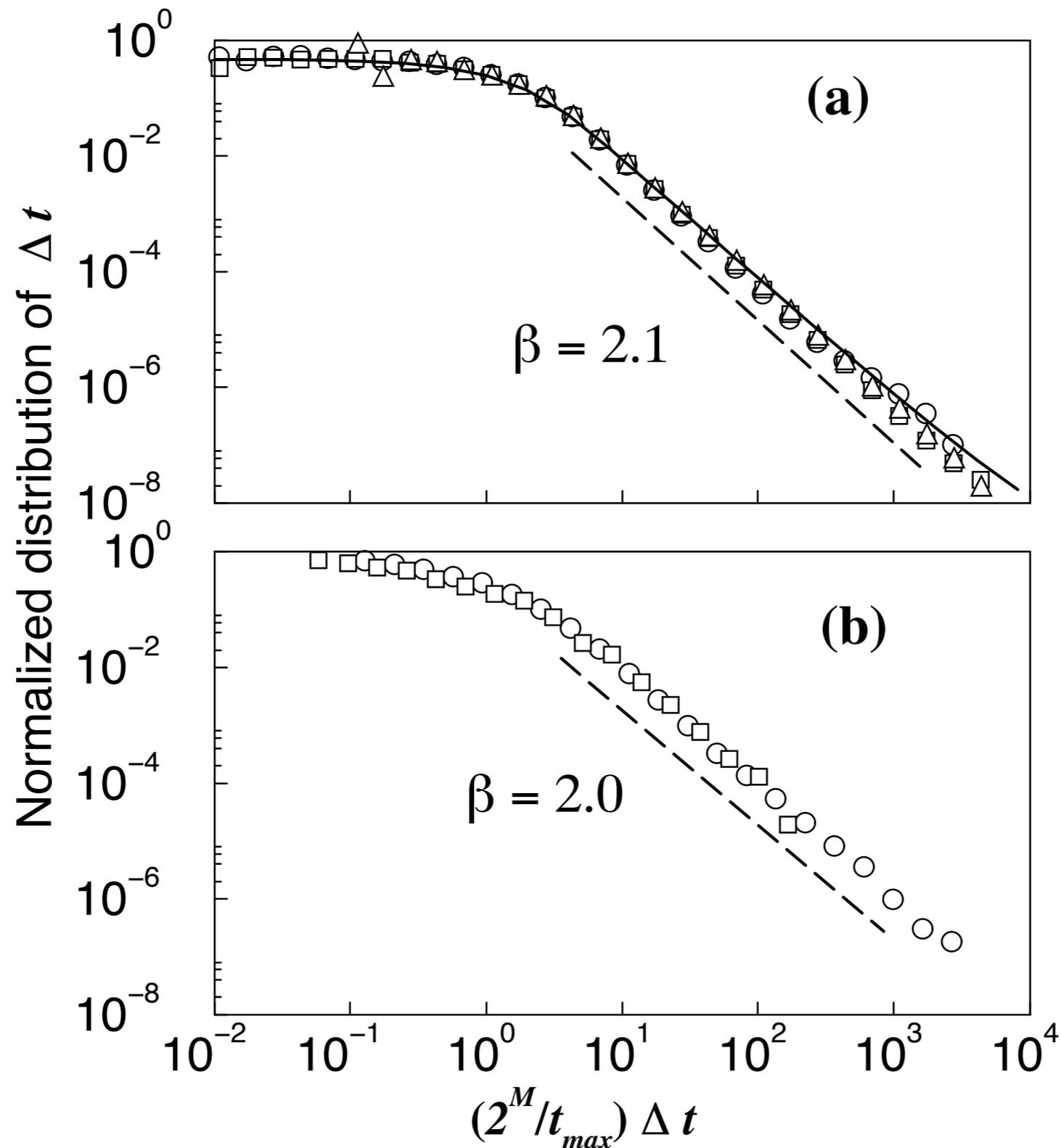
Lei de Potência - Livre de Escala



Lei de Potência - Livre de Escala

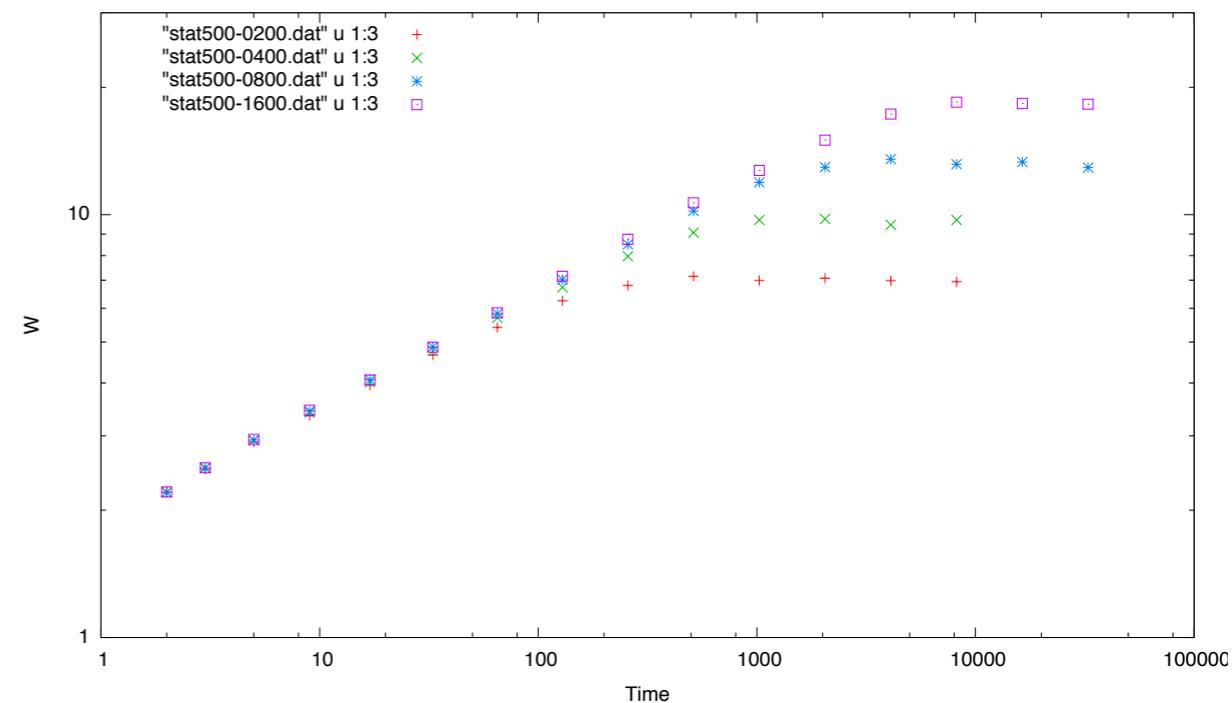


Lei de Potência - Livre de Escala



A superfície consiste de L colunas. A largura da superfície é a rms da flutuação da altura h

$$w(L, t) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [h(i, t) - \bar{h}(t)]^2}$$



$$w(L, t) \propto t^\beta$$

Lei de Potência - Livre de Escala

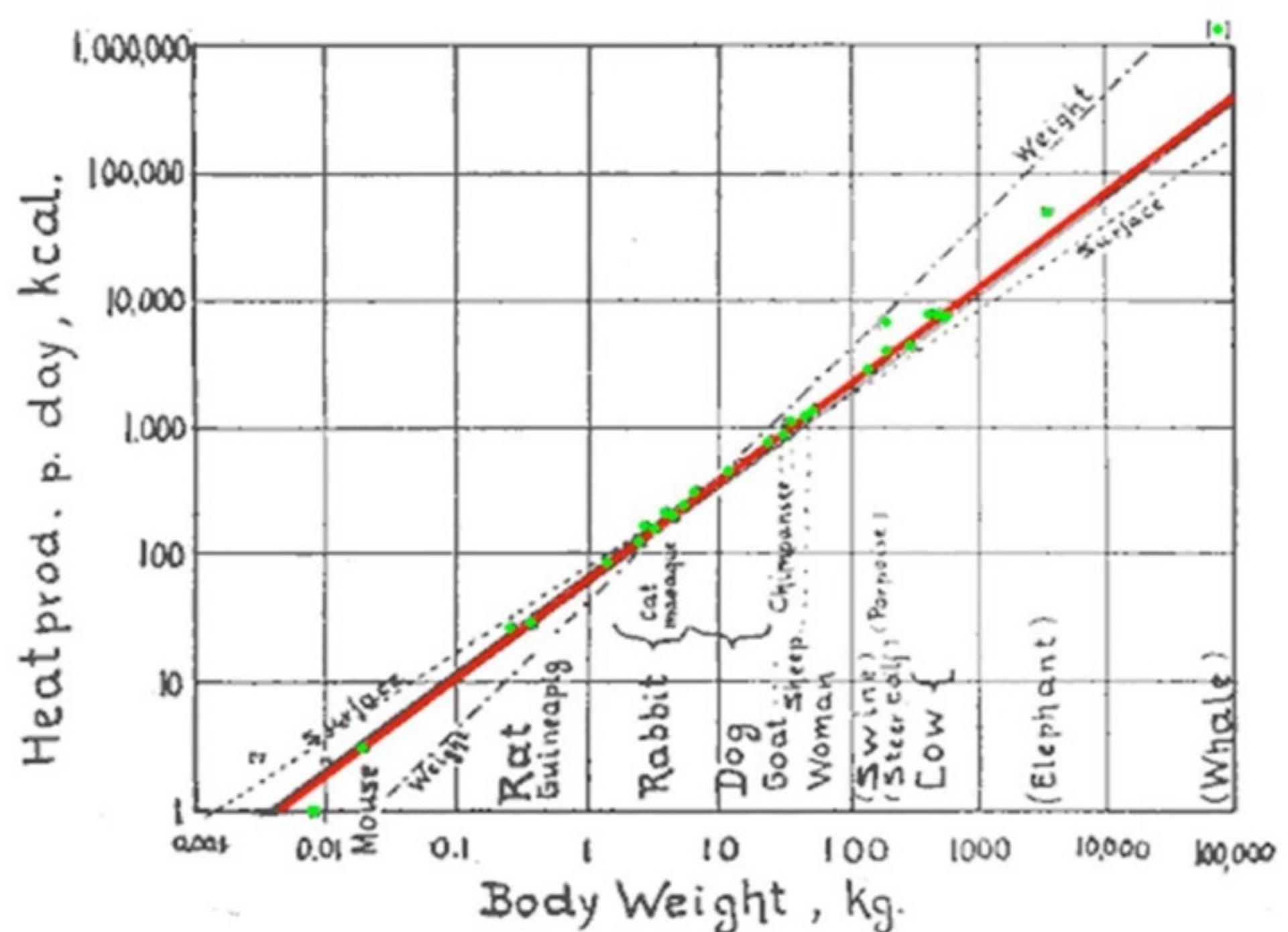


Fig. 1. Log. metabol. rate/log body weight

Leis de Escala



Leis do Mundo Físico

Todos os seres vivos estão sujeitos às leis do mundo físico, tais como: ação da gravidade, difusão e transporte de calor, propriedades elásticas dos materiais, dinâmica dos movimentos, tensão superficial etc.

Lei Universal da Vida

Os fenômenos biológicos obedecem a alguma lei universal da vida de modo que podem ser previstos e modelados matematicamente?

Jonathan Swift escreveu em 1726 - As viagens de Gulliver. Nele o mundo dos Liliputianos tinha $1/12\times$ das dimensões lineares do mundo normal, e os Gigante $12\times$. Liliputianos teriam 14 cm de altura, e uma refeição para Gulliver correspondia a $12^3=1728$ vezes a dos Liliputianos. Isso é possível?

Leis de Escala

Não, como foi explicado por Galileu (anos antes de Swift)

- Gulliver tem $\approx 12^3 = 1728\times$ mais células para alimentar que os Liliputianos
- A energia contida na comida é convertida em calor, em última instância. Todavia a taxa de perda de calor é proporcional a área corpórea (suor pela pele)
- Os Liliputianos tem $\approx 1/(12^2) = 1/144\times$ da nossa superfície, enquanto o calor produzido é 1728 menor, assim eles não poderiam ter sangue quente (por isso não existe mamíferos ou pássaros do tamanho de uma formiga)
- a solução seria, os Liliputianos comer proporcionalmente muito mais que os humanos (comer continuamente como um rato).

Leis de Escala

- Gigantes seriam $12\times$ maior que os humanos, produzindo 1728 mais calor, com uma área superficial $144\times$ maior. Eles poderiam ter orelhas gigantes para aliviar o calor, como os elefantes, ou comer menos. Porém, nesse último caso, eles teriam que ter uma taxa metabólica mais lenta, ou seja, não seriam feitos do mesmo tipo de células que nós.
- A resistência dos ossos é proporcional à área transversal. O peso do Gigante seria $1728\times$ maior com a área transversal dos ossos apenas $144\times$ maior. Assim, a pressão nos ossos seria $12\times$ maior que nos humanos.

Leis de Escala

- A área transversal dos músculos seriam $144\times$ maior ($144\times$ mais fibras e mais força) todavia o peso seria $1728\times$ maior (imagine se seu braço fosse $12\times$ mais pesado).
- Da mesma forma, os Liliputianos seriam proporcionalmente $12\times$ mais fortes. Eles poderiam levantar objetos muito mais pesados que o seu próprio peso e pular muito mais alto que sua própria altura.

Leis de Escala

- Como passar resultados experimentais de animais pequenos, em geral roedores, para seres humanos - crianças ou mesmo bebês e adultos?
- Reações adversas em animais devido a um dado agente não significa que produz necessariamente o mesmo efeito em seres humanos.
- Ausência de reações nos animais não prova que seres humanos não terão também reações.
- Espécies parecidas podem ter reações muito diferentes. Há que se considerar corretamente a lei das escalas.

Isometria

Isometria

Quando há isometria, o comprimento dos dedos ou o diâmetro da cabeça ou o comprimento do braço é proporcional à altura:

$$d_{\text{bracos}} \propto d_{\text{altura}} \propto V^{1/3} \propto M^{1/3}$$

$$\text{Índice de massa corporal (IMC)} = \frac{\text{massa } M}{\text{altura}^2} \text{ (kg/m}^2\text{)}$$

IMC

	$\text{IMC} \leq$	18 kg/m^2	(subpeso)
$18 <$	$\text{IMC} \leq$	25 kg/m^2	(normal)
$25 <$	$\text{IMC} \leq$	30 kg/m^2	(sobrepeso)
	$\text{IMC} >$	30 kg/m^2	(obeso)

Isometria

Se uma moça 1 com massa $M_1 = 45$ kg e $L_1 = 1,50$ m de altura é considerada esteticamente perfeita, qual deve ser a massa M_2 de uma moça 2 com $L_2 = 1,725$ m (15% mais alta) de altura?

Aplicando uma regra Isométrica: $\sigma = L_2/L_1 = 1.15$, $\sigma^3 = 1,52$ ou seja $M_2 = \sigma^3 M_1 = 68,4$ kg

Para uma moça 3 25% mais alta que a moça 1, $\sigma^3 = 1,25^3 = 1,95$, $m_3 = 1.95 \times 45 = 87,9$ kg

IMC

IMC(1)	=	45/2,25	=	20 kg/m ²
IMC(2)	=	68,4/2,97	=	23 kg/m ²
IMC(3)	=	87,9/3,51	=	25.3 kg/m ²

Organismos reais não são isométricos porque as proporções não se mantêm. São chamados alométricos [Julian Huxley].

$$y = aM^b$$

$$\log y = \log a + b \log M$$

$$Y = A + bX$$

Equação de uma
reta com
coeficiente angular
 b

Uma das grandezas y mais estudadas é a **taxa metabólica**. Outras são:

- ① tempo de vida
- ② taxa de crescimento
- ③ taxa de batimento cardíaco
- ④ comprimento das aortas e genomas
- ⑤ taxa de substituição de nucleotídeos
- ⑥ massa cinzenta
- ⑦ densidade de mitocôndrios
- ⑧ concentração de RNA
- ⑨ altura de árvores

Quando b se mantém constante para um intervalo grande de massa M , existe uma lei das escalas ou uma relação alométrica.

Alometria

$$y = aM^b$$

Valor de b	Variável y
b negativo b = -1/4	diminui com a massa do corpo M ritmo cardíaco
b = 0	não depende da massa M massa de hemoglobina por unidade de volume
b positivo b = 2/3 b = 3/4 b = 4/4	aumenta com a massa M área da superfície corporal – Rubner (1883) área da superfície corporal – Kleiber (1932) massa do coração aumenta na mesma proporção que M

Alometria

$$y = aM^b \quad b \approx 2/3$$

humanos	$y=0,08 M^{0,66}$
mamíferos	$y=0,01 M^{0,70}$
primatas	$y=0,02 M^{0,66}$
aves	$y=0,005 M^{0,66}$
répteis	$y=0,0003 M^{0,67}$

a tem valores diferentes para distintas categorias de animais
 $b = 0,66 = 2/3$ significa que a variação de y com M é universal e ajusta a uma relação alométrica.

A massa do cérebro se comporta de forma similar à área da superfície do corpo

Alometria

Há muitas grandezas que não mudam ou mudam pouco ($b = 0$) com a massa corporal M

- Resistência dos ossos
- Tamanho das hemácias
- Diâmetro dos capilares
- Pressão sanguínea
- Temperatura dos corpos

Outras Grandezas que se relacionam com M com $b = \pm 1/4 = 0,25$

- taxa de batida cardíaca (min^{-1}) = $220 M^{-0,27}$
- tempo de circulação sanguínea (s) = $17,4 M^{0,25}$
- taxa respiratória (min^{-1}) = $53,5M^{-0,26}$

Grandezas do sistema respiratório em função de M

grandeza	função de M	para M = 70 kg
capacidade total	$57M^{1,03}$	4500 ml
volume por inalação	$7,7M^{1,04}$	640 ml
ritmo de ventilação	$0,38M^{0,80}$	11 l/min
frequência respiratória	$53M^{-0,26}$	17 inalação/min
consumo de O ₂	$11,6M^{0,76}$	293 ml de O ₂ /min

Grandezas do sistema circulatório em função de M

grandeza	em função de M	para M = 70 kg
frequência cardíaca	$220 M^{-0,27}$	70 batidas/min
V do sangue por impulso	$0,66 M^{1,05}$	57 ml
pressão arterial	$89 M^{0,03}$	100 mmHg
raio da aorta	$0,21 M^{0,36}$	0,97 cm
comprimento da aorta	$17 M^{0,31}$	63 cm
massa do coração	$0,0066 M^{0,98}$	0,42 kg

Alometria

Período de gestação $\approx 1,5\%$ do tempo de vida

Para mulheres $\approx 1\%$ do tempo de vida

Tempo de vida para mamíferos = $12 M^{0,20}$ anos

Tempo de vida para aves = $28 M^{0,19}$ anos

Número de batidas cardíacas = tempo de vida/tempo de cada batida = $1,4 \times 10^9$

Número de inalações = tempo de vida/tempo de cada inalação = $1,34 \times 10^{10}$

Usando a aproximação $M^{0,20-0,27} \approx M^0 \approx 1$

West et al no artigo de 1997 propõem uma explicação teórica da Lei de Kleiber baseada no modelo fractal – nas propriedades da rede de fornecimento de energia que todo ser vivo deve possuir.

Unidades de metabolismo: mitocôndrios, principalmente.

Alimento e oxigênio devem chegar a todas as células do corpo através de uma rede ramificada: sistema circulatório e sistema respiratório.

Hipóteses:

- A rede de distribuição cobre todo o volume do organismo
- O último ramo (capilares) tem um diâmetro fixo
- Os organismos evoluíram de modo que há minimização de energia requerida para efetuar o transporte através da rede.

West et al Physics Today September 2004

Alometria no sistema Cardio-Respiratório

A General Model for the Origin of Allometric Scaling Laws in Biology

Geoffrey B. West, James H. Brown, Brian J. Enquist*

SCIENCE VOL. 276 4 APRIL 1997

Table 1. Values of allometric exponents for variables of the mammalian cardiovascular and respiratory systems predicted by the model compared with empirical observations. Observed values of exponents are taken from (2, 3); ND denotes that no data are available.

Cardiovascular			Respiratory		
Variable	Exponent		Variable	Exponent	
	Predicted	Observed		Predicted	Observed
Aorta radius r_0	$3/8 = 0.375$	0.36	Tracheal radius	$3/8 = 0.375$	0.39
Aorta pressure Δp_0	$0 = 0.00$	0.032	Interpleural pressure	$0 = 0.00$	0.004
Aorta blood velocity u_0	$0 = 0.00$	0.07	Air velocity in trachea	$0 = 0.00$	0.02
Blood volume V_b	$1 = 1.00$	1.00	Lung volume	$1 = 1.00$	1.05
Circulation time	$1/4 = 0.25$	0.25	Volume flow to lung	$3/4 = 0.75$	0.80
Circulation distance l	$1/4 = 0.25$	ND	Volume of alveolus V_A	$1/4 = 0.25$	ND
Cardiac stroke volume	$1 = 1.00$	1.03	Tidal volume	$1 = 1.00$	1.041
Cardiac frequency ω	$-1/4 = -0.25$	-0.25	Respiratory frequency	$-1/4 = -0.25$	-0.26
Cardiac output \dot{E}	$3/4 = 0.75$	0.74	Power dissipated	$3/4 = 0.75$	0.78
Number of capillaries N_c	$3/4 = 0.75$	ND	Number of alveoli N_A	$3/4 = 0.75$	ND
Service volume radius	$1/12 = 0.083$	ND	Radius of alveolus r_A	$1/12 = 0.083$	0.13
Womersley number α	$1/4 = 0.25$	0.25	Area of alveolus A_A	$1/6 = 0.083$	ND
Density of capillaries	$-1/12 = -0.083$	-0.095	Area of lung A_L	$11/12 = 0.92$	0.95
O ₂ affinity of blood P_{50}	$-1/12 = -0.083$	-0.089	O ₂ diffusing capacity	$1 = 1.00$	0.99
Total resistance Z	$-3/4 = -0.75$	-0.76	Total resistance	$-3/4 = -0.75$	-0.70
Metabolic rate B	$3/4 = 0.75$	0.75	O ₂ consumption rate	$3/4 = 0.75$	0.76

Table 1. Values of allometric exponents for variables of the mammalian cardiovascular and respiratory systems predicted by the model compared

with empirical observations. Observed values of exponents are taken from (2, 3); ND denotes that no data are available.

Cardiovascular			Respiratory		
Variable	Exponent		Variable	Exponent	
	Predicted	Observed		Predicted	Observed
Aorta radius r_0	$3/8 = 0.375$	0.36	Tracheal radius	$3/8 = 0.375$	0.39
Aorta pressure Δp_0	$0 = 0.00$	0.032	Interpleural pressure	$0 = 0.00$	0.004
Aorta blood velocity u_0	$0 = 0.00$	0.07	Air velocity in trachea	$0 = 0.00$	0.02
Blood volume V_b	$1 = 1.00$	1.00	Lung volume	$1 = 1.00$	1.05
Circulation time	$1/4 = 0.25$	0.25	Volume flow to lung	$3/4 = 0.75$	0.80
Circulation distance l	$1/4 = 0.25$	ND	Volume of alveolus V_A	$1/4 = 0.25$	ND
Cardiac stroke volume	$1 = 1.00$	1.03	Tidal volume	$1 = 1.00$	1.041
Cardiac frequency ω	$-1/4 = -0.25$	-0.25	Respiratory frequency	$-1/4 = -0.25$	-0.26
Cardiac output \dot{E}	$3/4 = 0.75$	0.74	Power dissipated	$3/4 = 0.75$	0.78
Number of capillaries N_c	$3/4 = 0.75$	ND	Number of alveoli N_A	$3/4 = 0.75$	ND
Service volume radius	$1/12 = 0.083$	ND	Radius of alveolus r_A	$1/12 = 0.083$	0.13
Womersley number α	$1/4 = 0.25$	0.25	Area of alveolus A_A	$1/6 = 0.083$	ND
Density of capillaries	$-1/12 = -0.083$	-0.095	Area of lung A_L	$11/12 = 0.92$	0.95
O ₂ affinity of blood P_{50}	$-1/12 = -0.083$	-0.089	O ₂ diffusing capacity	$1 = 1.00$	0.99
Total resistance Z	$-3/4 = -0.75$	-0.76	Total resistance	$-3/4 = -0.75$	-0.70
Metabolic rate B	$3/4 = 0.75$	0.75	O ₂ consumption rate	$3/4 = 0.75$	0.76