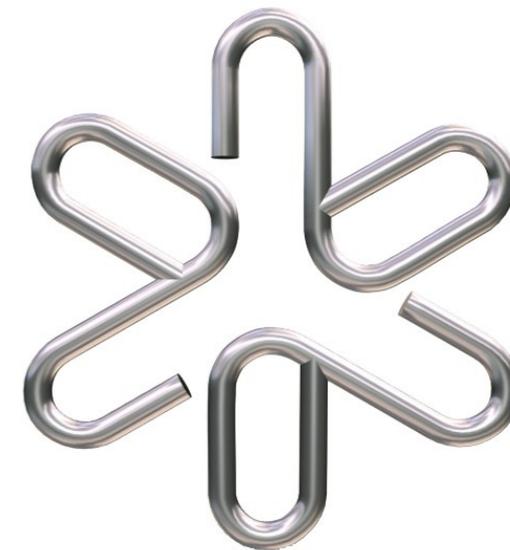


Física do Corpo Humano (4300325)



Prof. Adriano Mesquita Alencar
Dep. Física Geral
Instituto de Física da USP

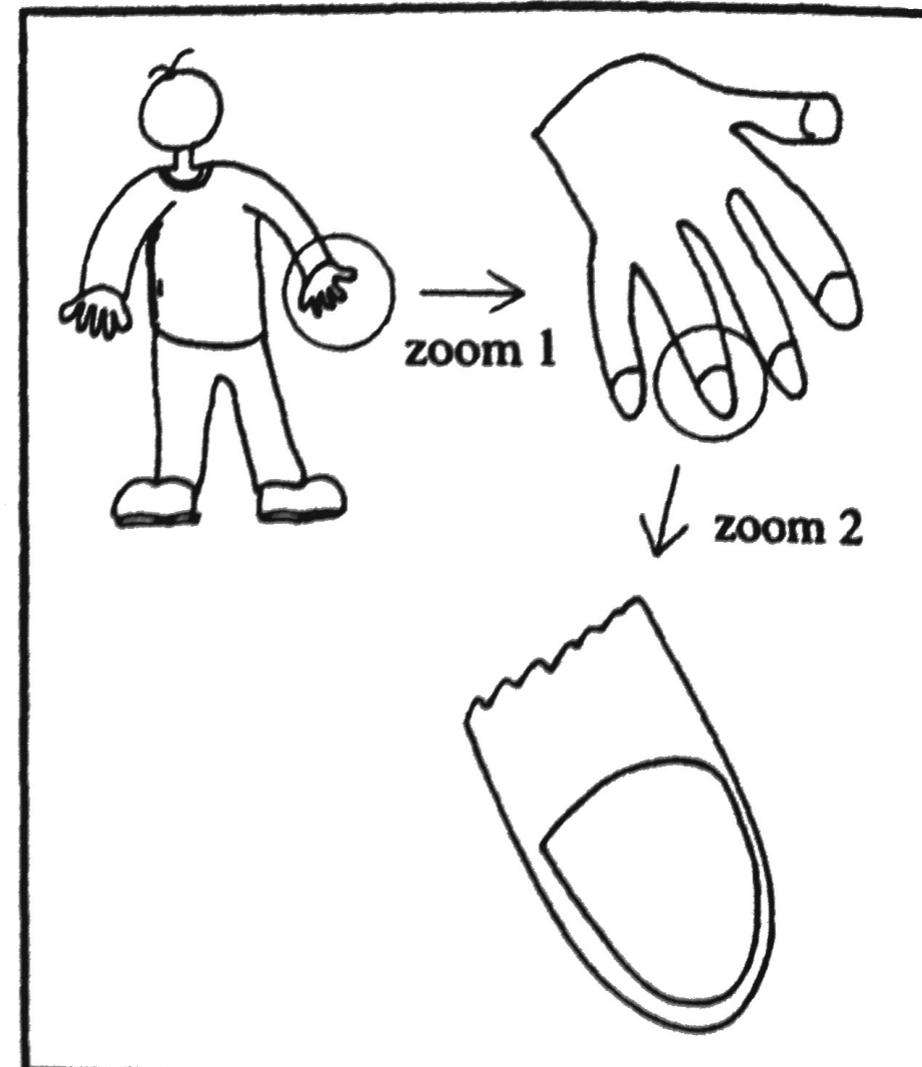
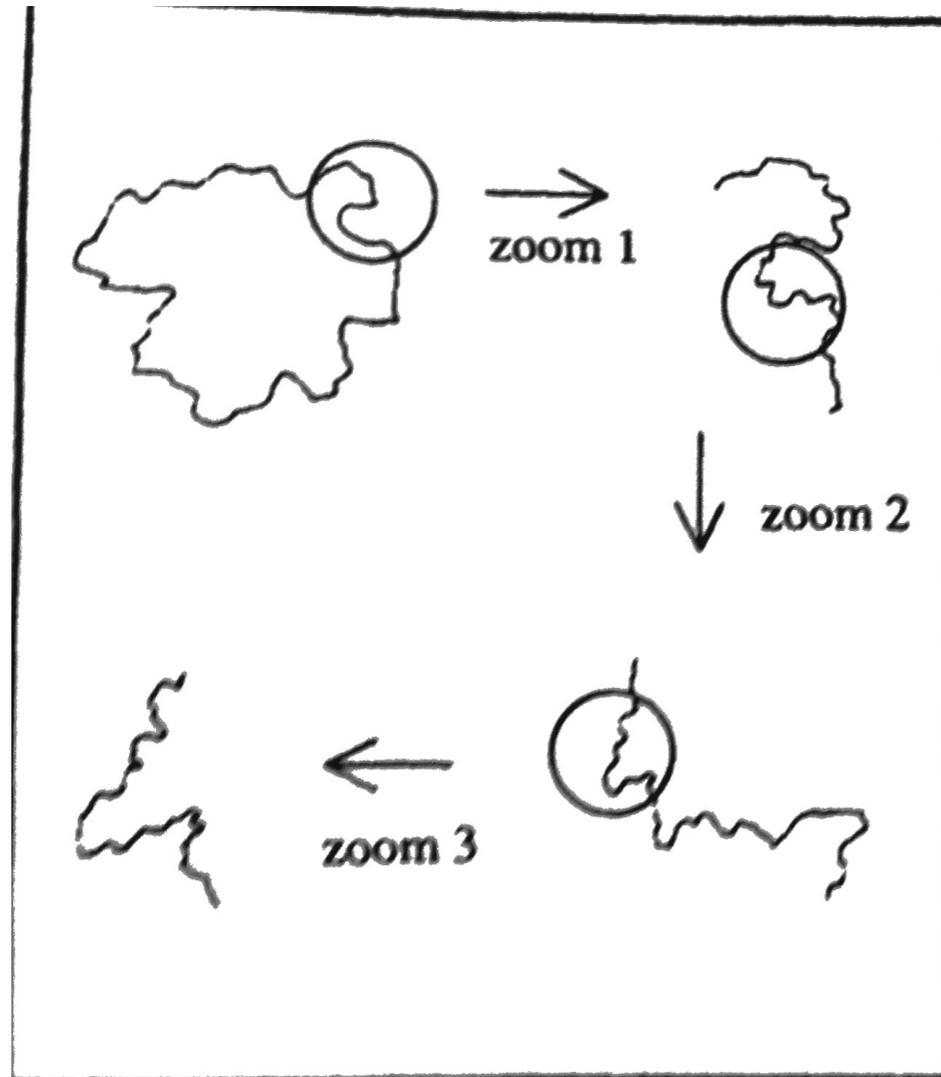
A02

Fractal e Caos



Árvore Fractal

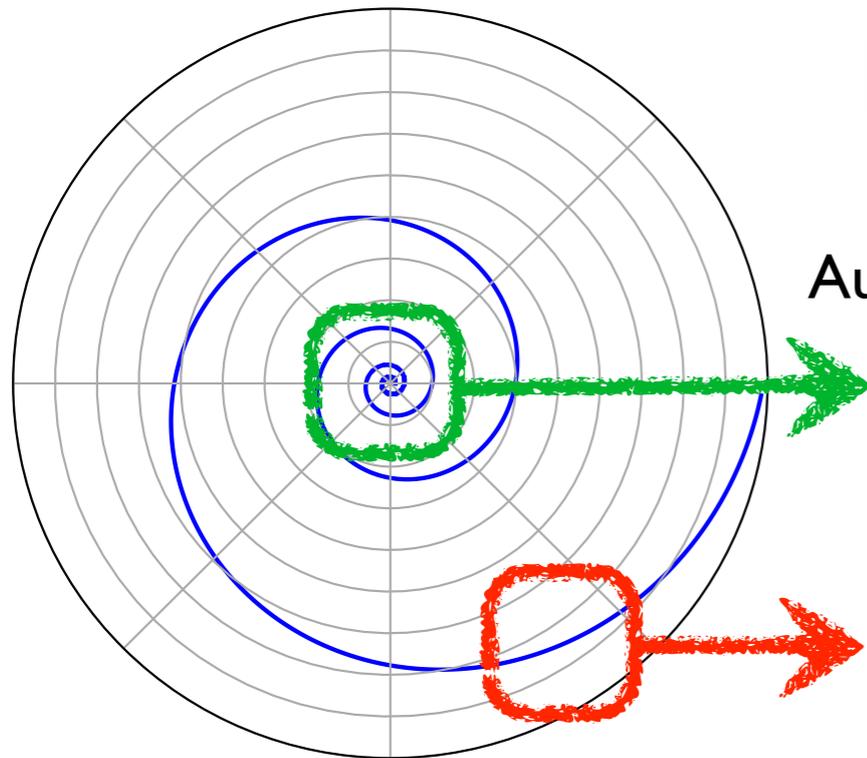
Fractal x Euclidiano



Fractal and Chaos, an Illustrated course, Paul S. Addison (1997)

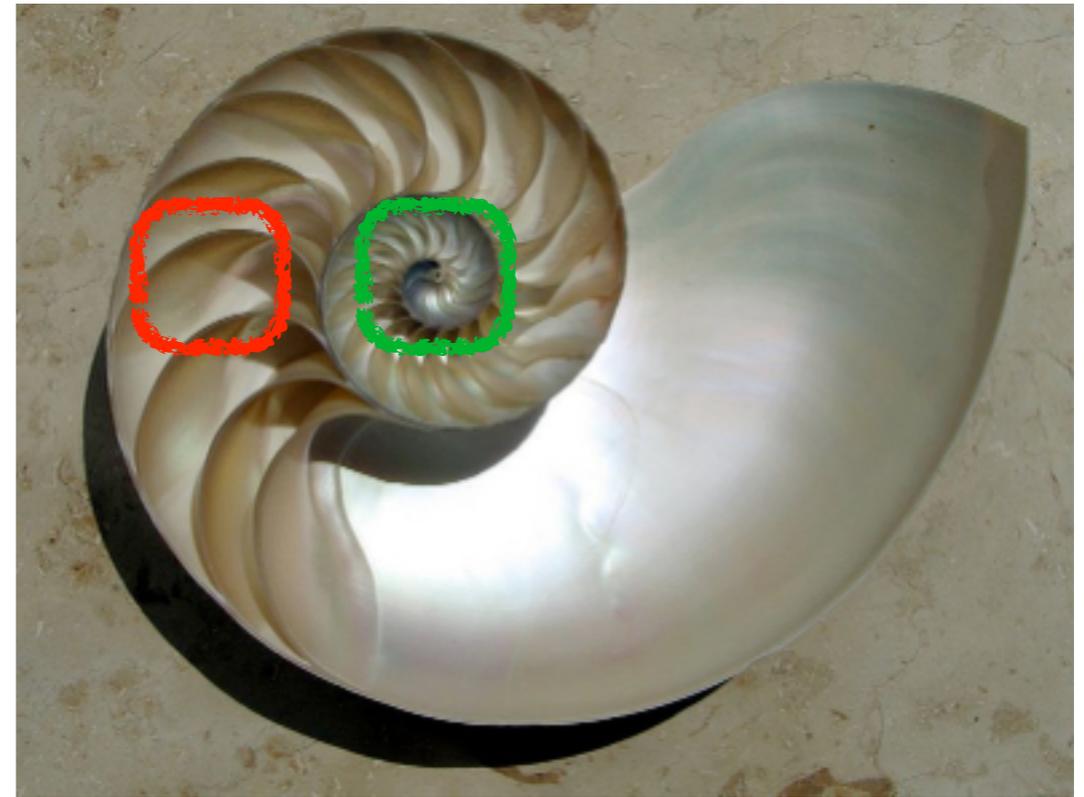
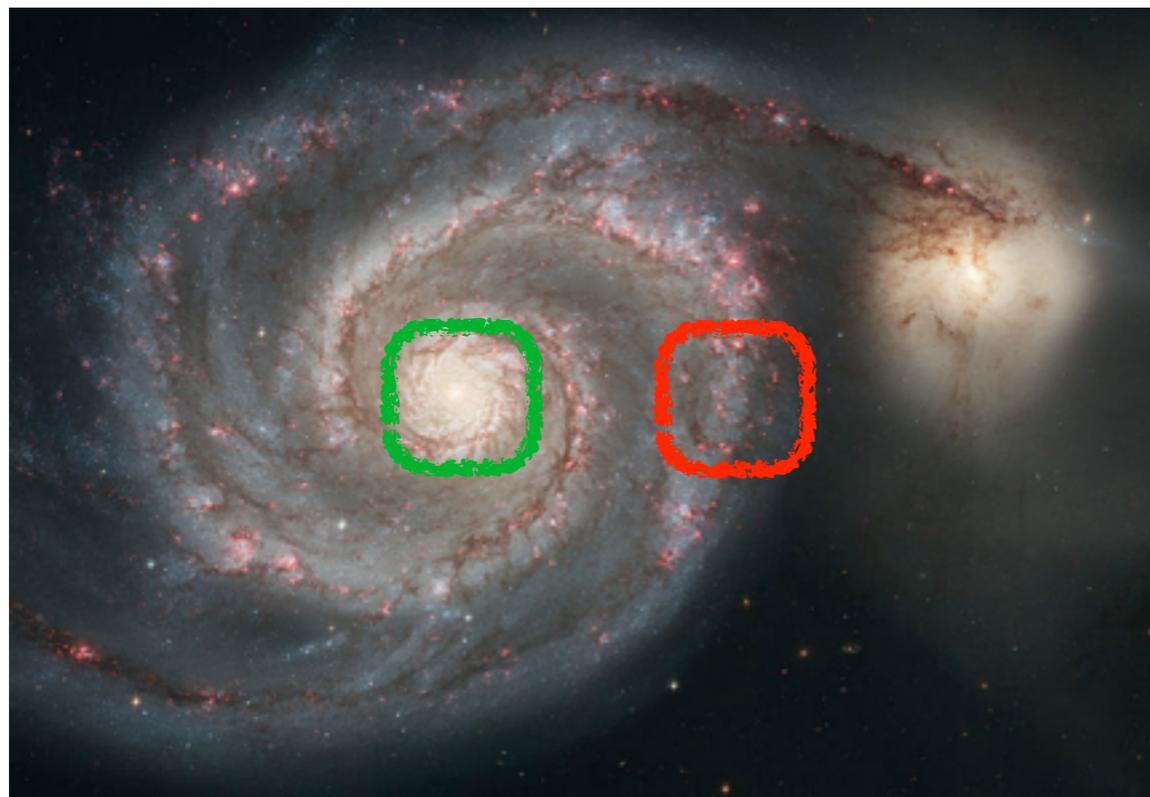
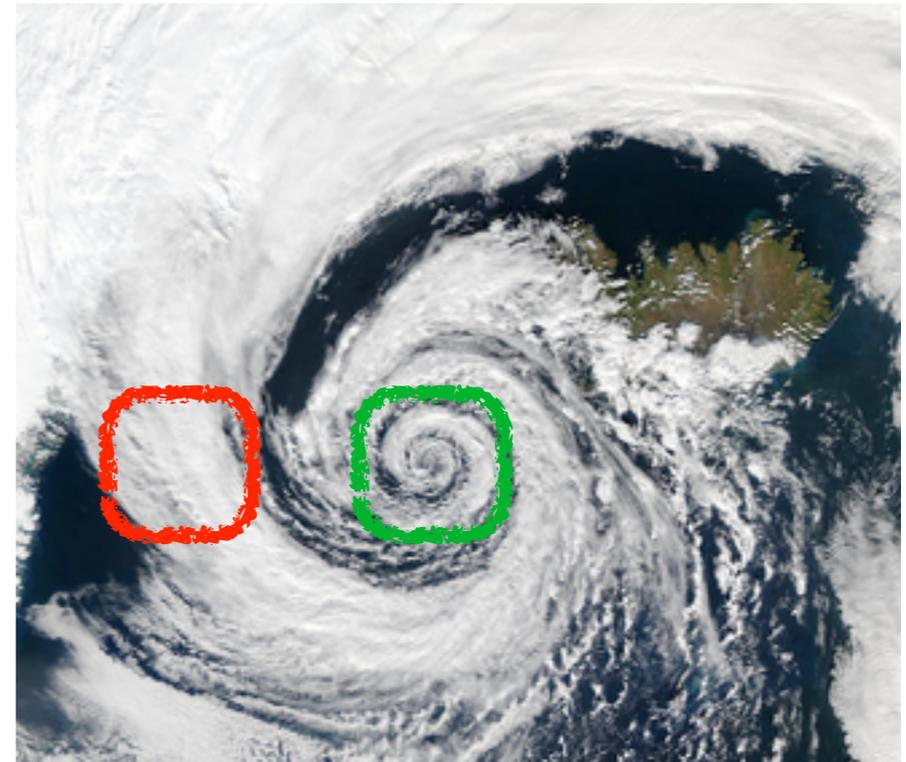
Natureza da Auto-Similaridade

Log Spiral

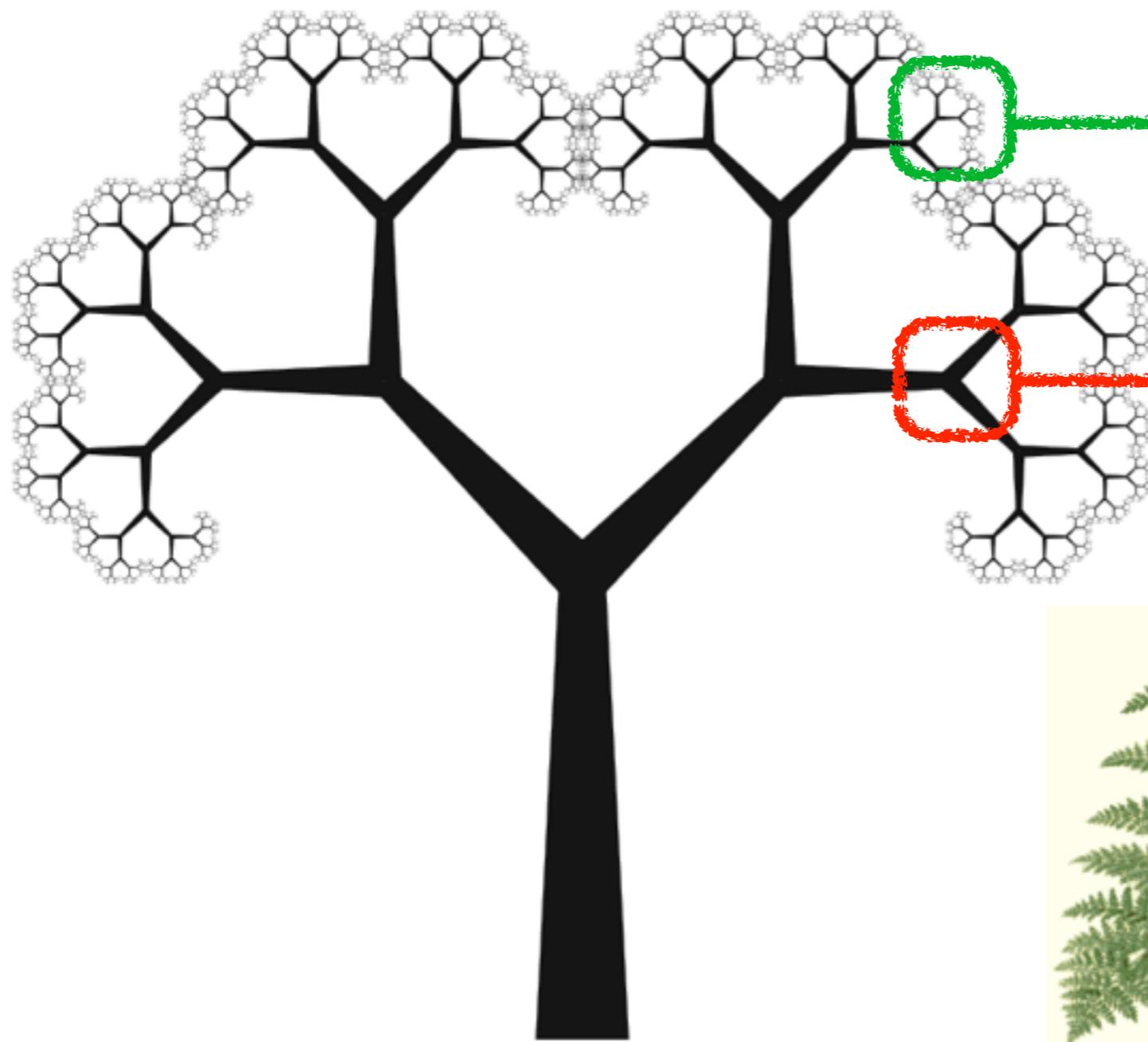


Auto similaridade no ponto de convergência

Não auto similar



Natureza da Auto-Similaridade



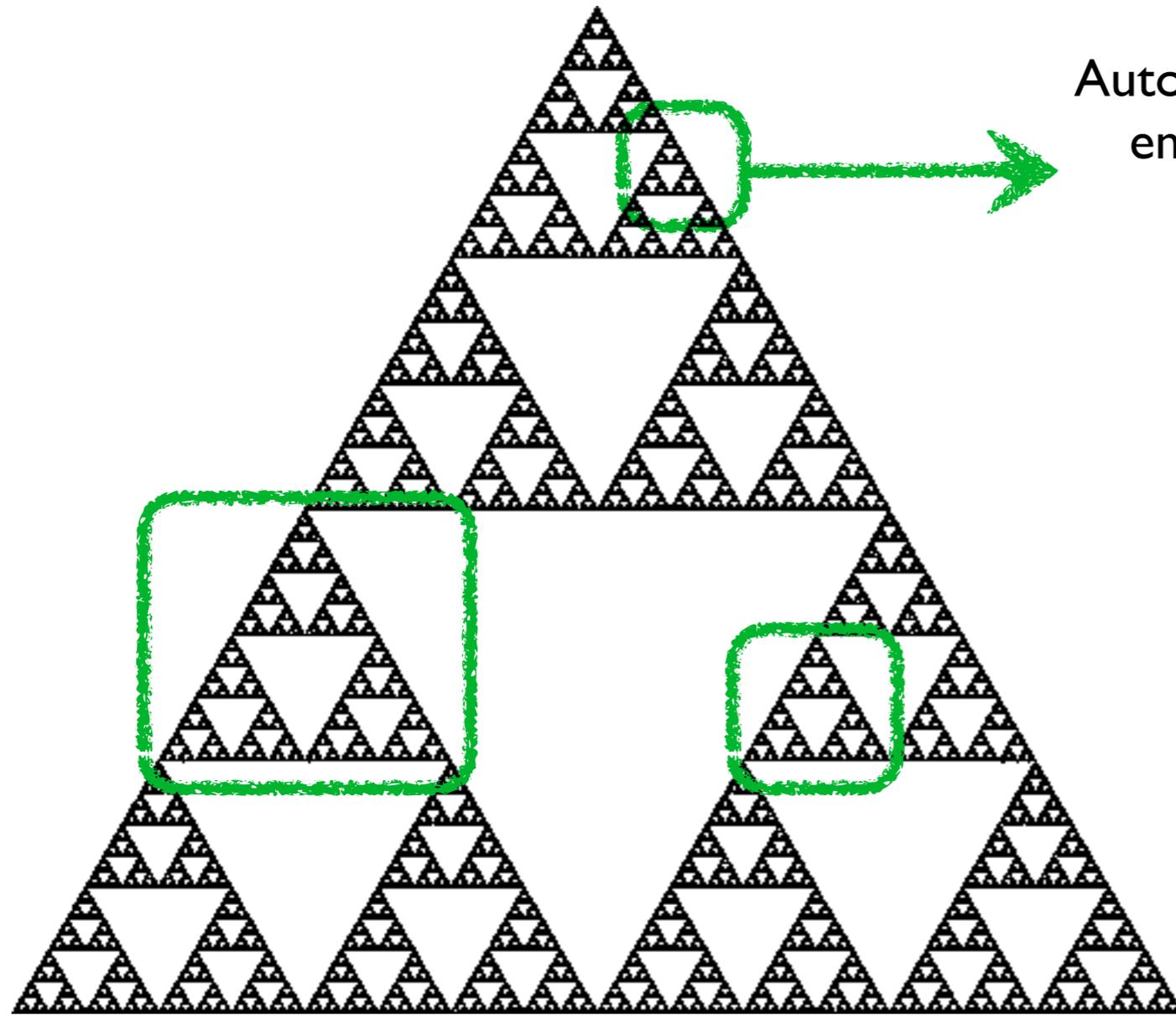
Auto similaridade
fica nas pontas de
ramificação

Não auto similar

Binary Tree

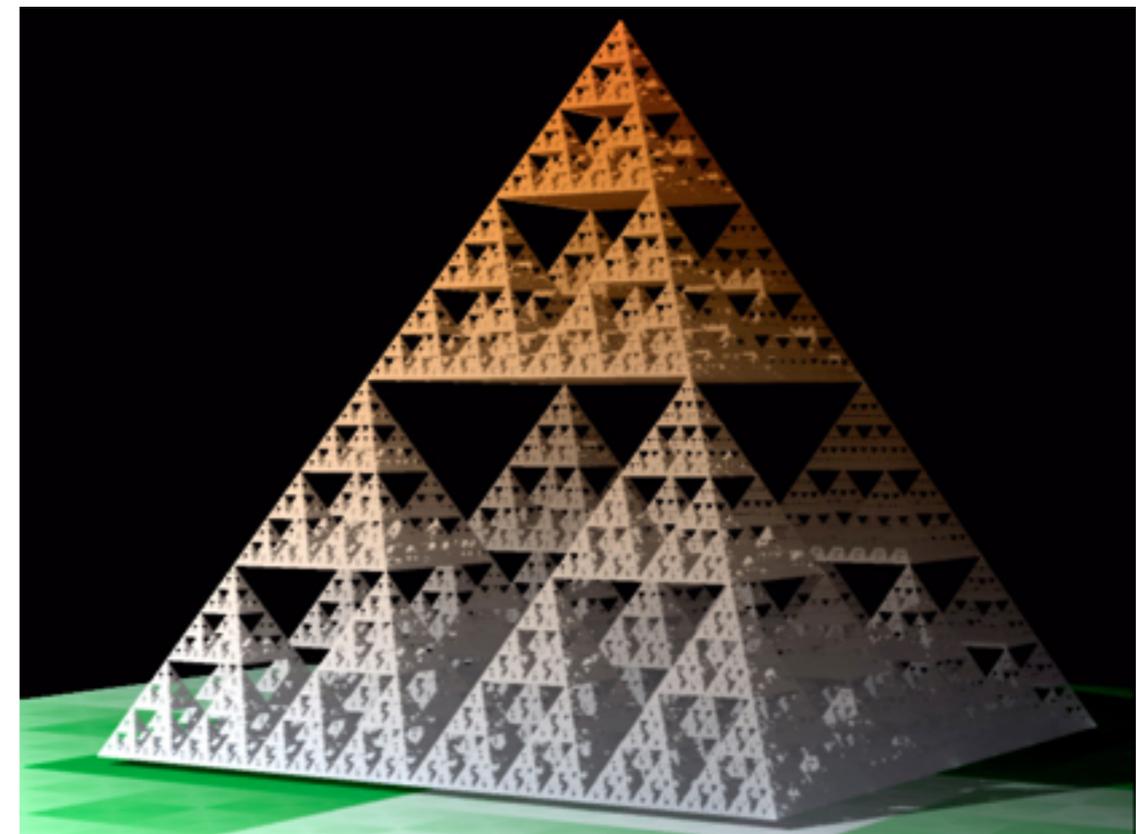


Natureza da Auto-Similaridade



Auto similaridade
em todos os
lugares

Sierpinski Triangle



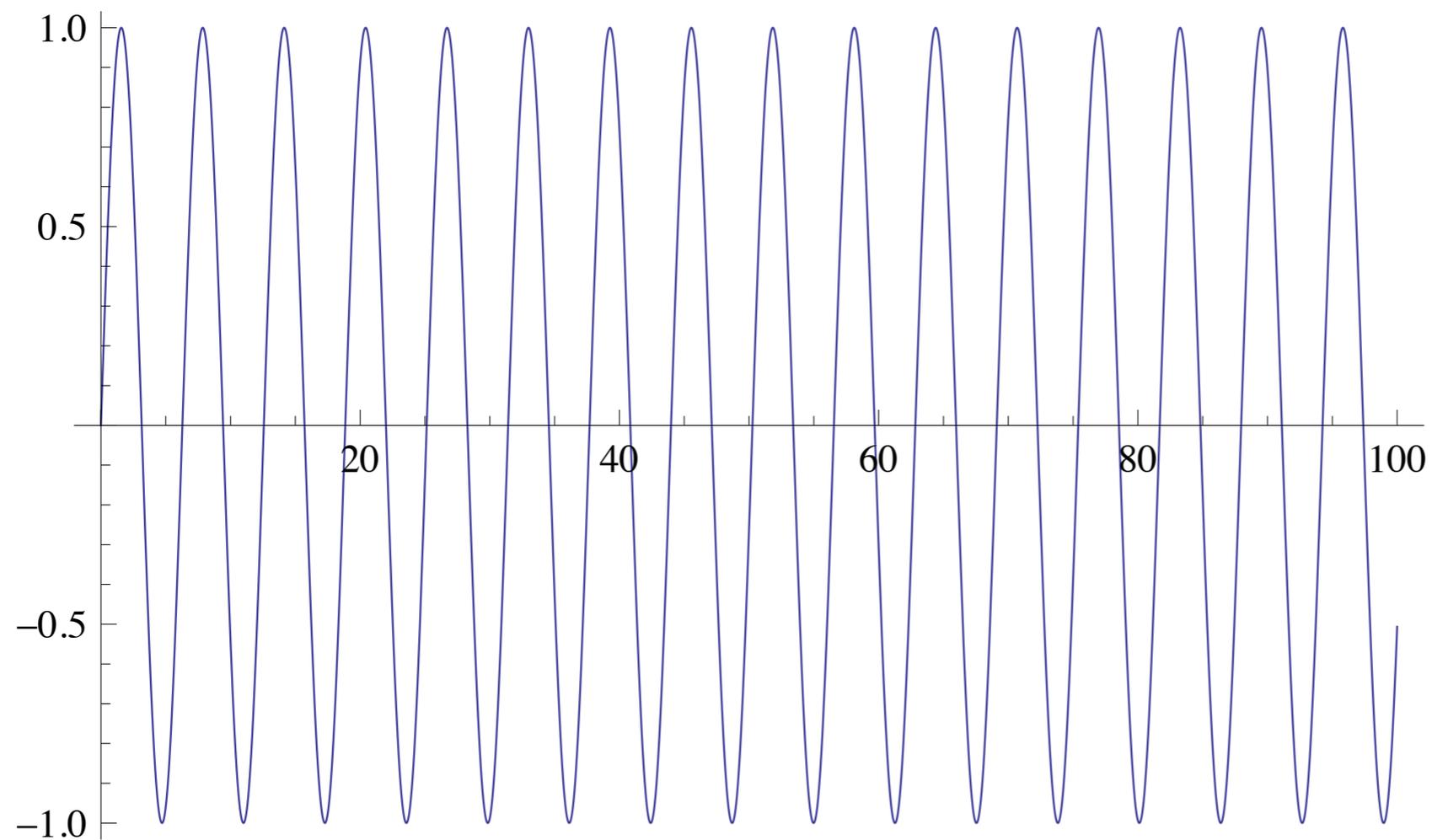
Determinismo e Caos

Oscilações são encontradas em todas as áreas das ciências naturais gerando interesse e preocupação:

1. Engenharia mecânica: oscilações regulares em barras de transmissão...
2. Engenharia civil: oscilações regulares em pontes...
3. Engenharia elétrica: saídas oscilatórias de circuitos não lineares...
4. ciclos regulares de reações químicas
5. terremotos...
6. ciclos de crescimento e decaimento de populações de animais
7. batimento regular ou irregular do coração.
8. movimentos oscilatórios de bolsas de valores
9. movimentos cíclicos de astros...

Determinismo e Caos

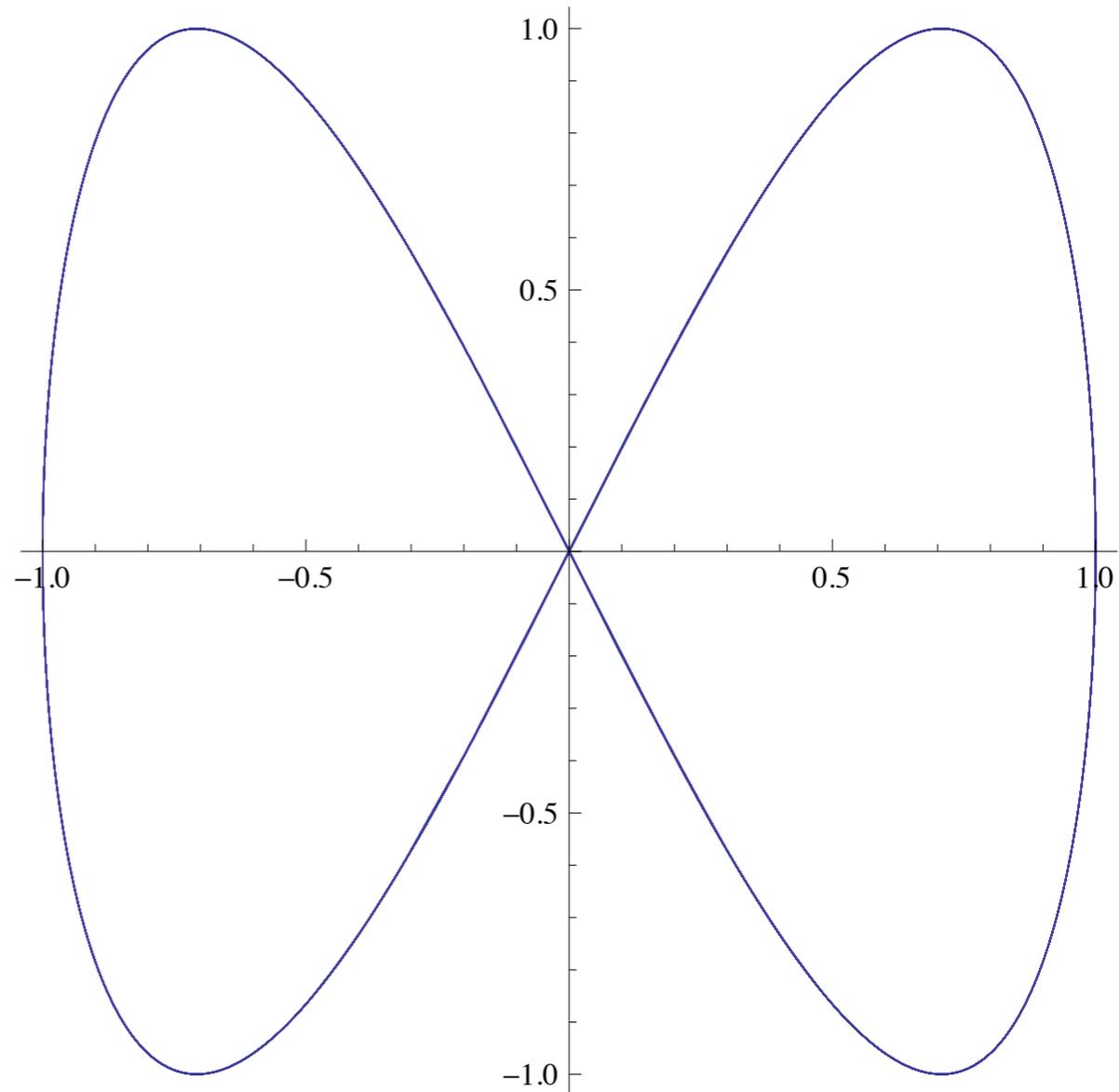
```
x[w_, t_] := Sin[w t]  
Plot[{x[1, a]}, {a, 0, 100}]
```



Determinismo e Caos

$x[w_, t_] := \text{Sin}[w t]$

`ParametricPlot[{x[1, a], x[2, a]}, {a, 0, 100}]`



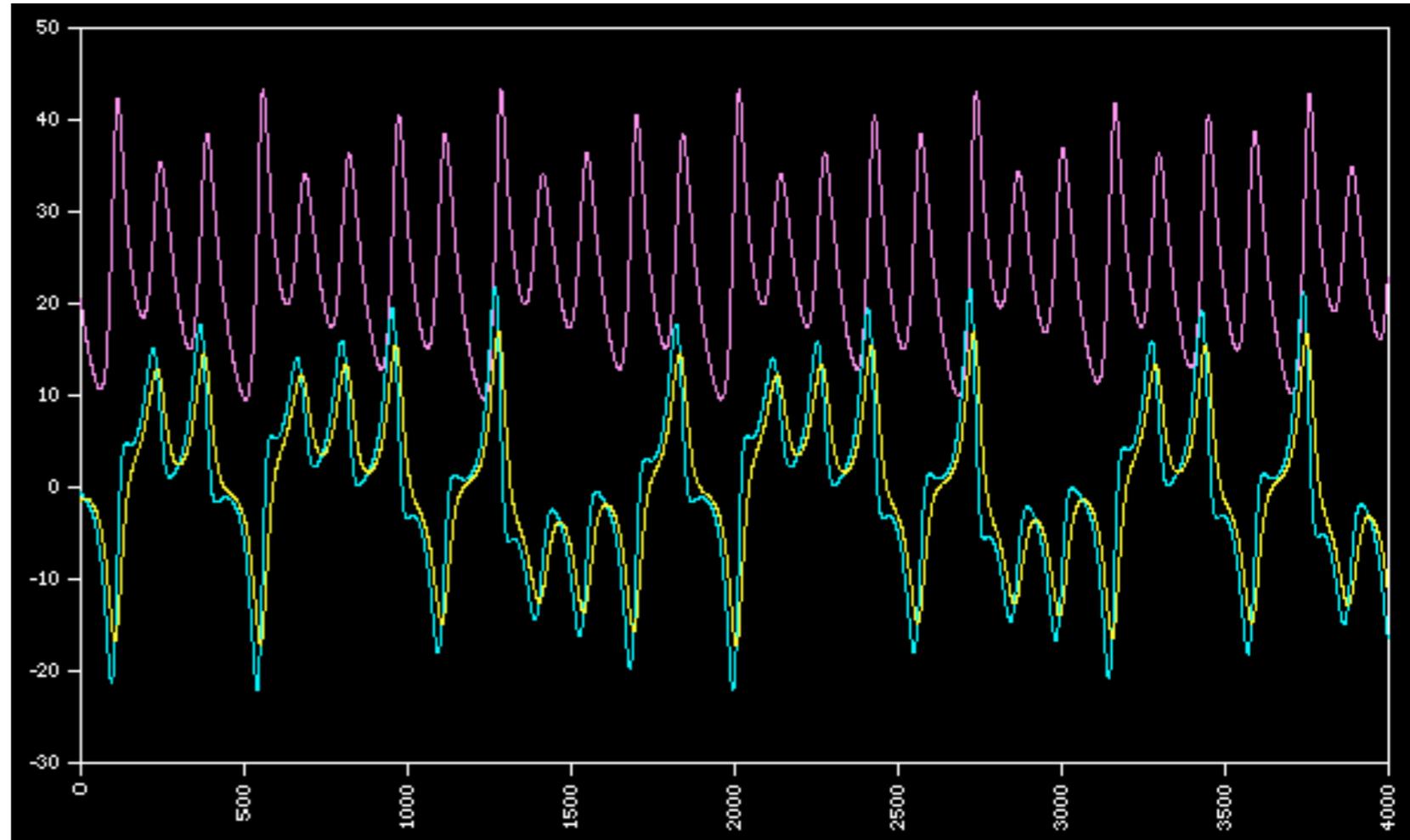
Determinismo e Caos

Lorenz model

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\beta - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \gamma z$$



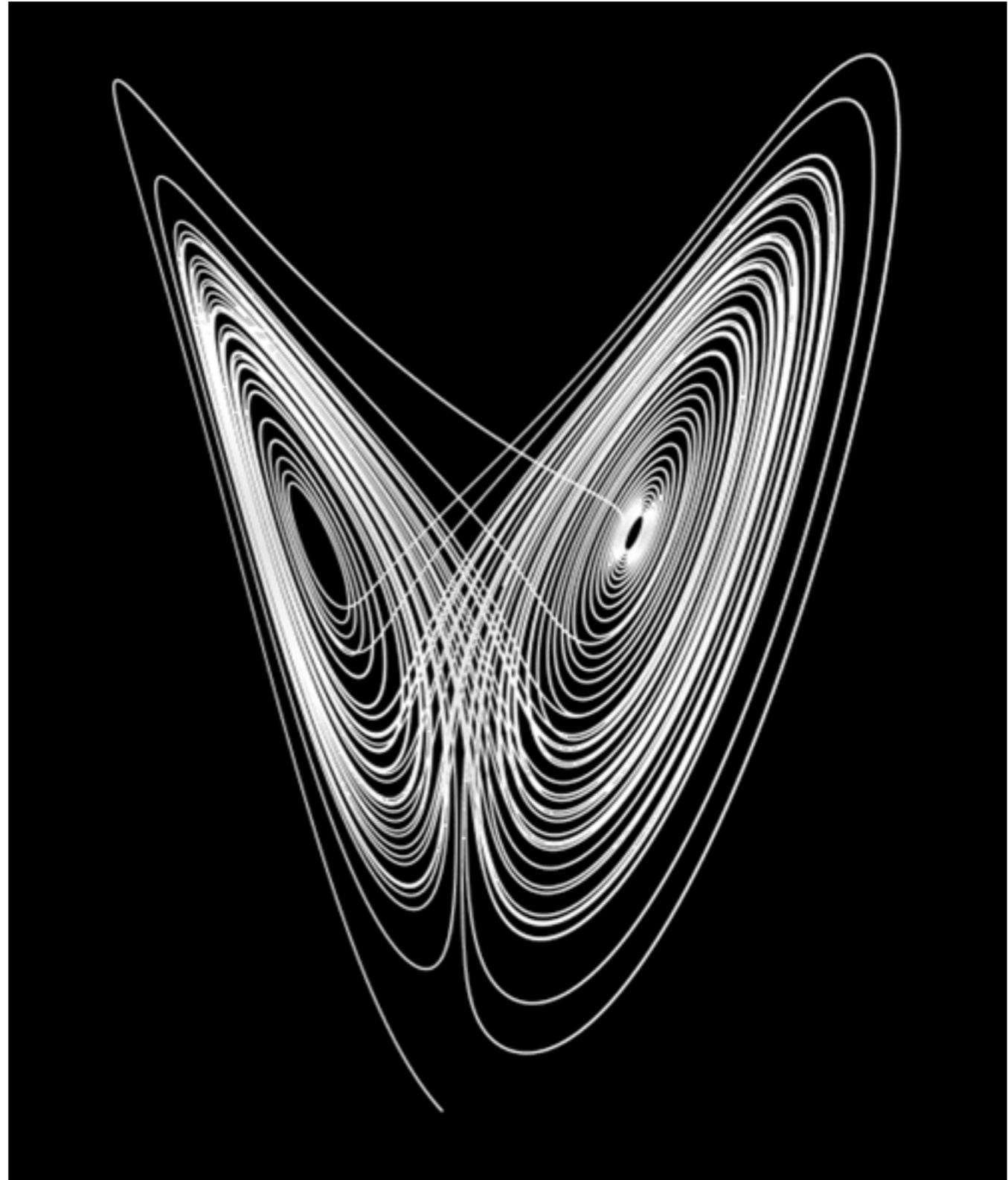
Determinismo e Caos

Lorenz Attractor

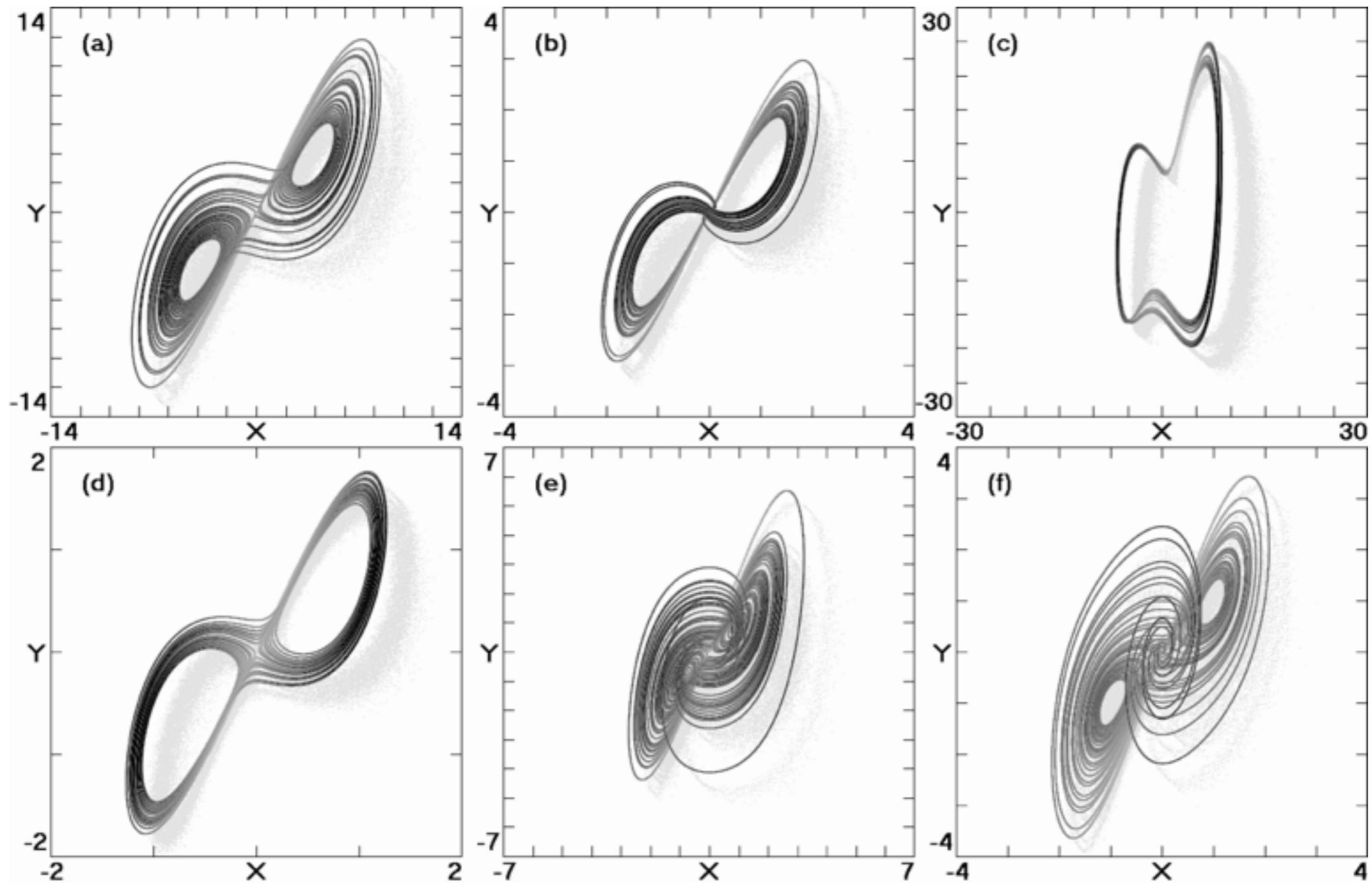
$$\frac{dx}{dt} = \alpha(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\beta - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \gamma z$$

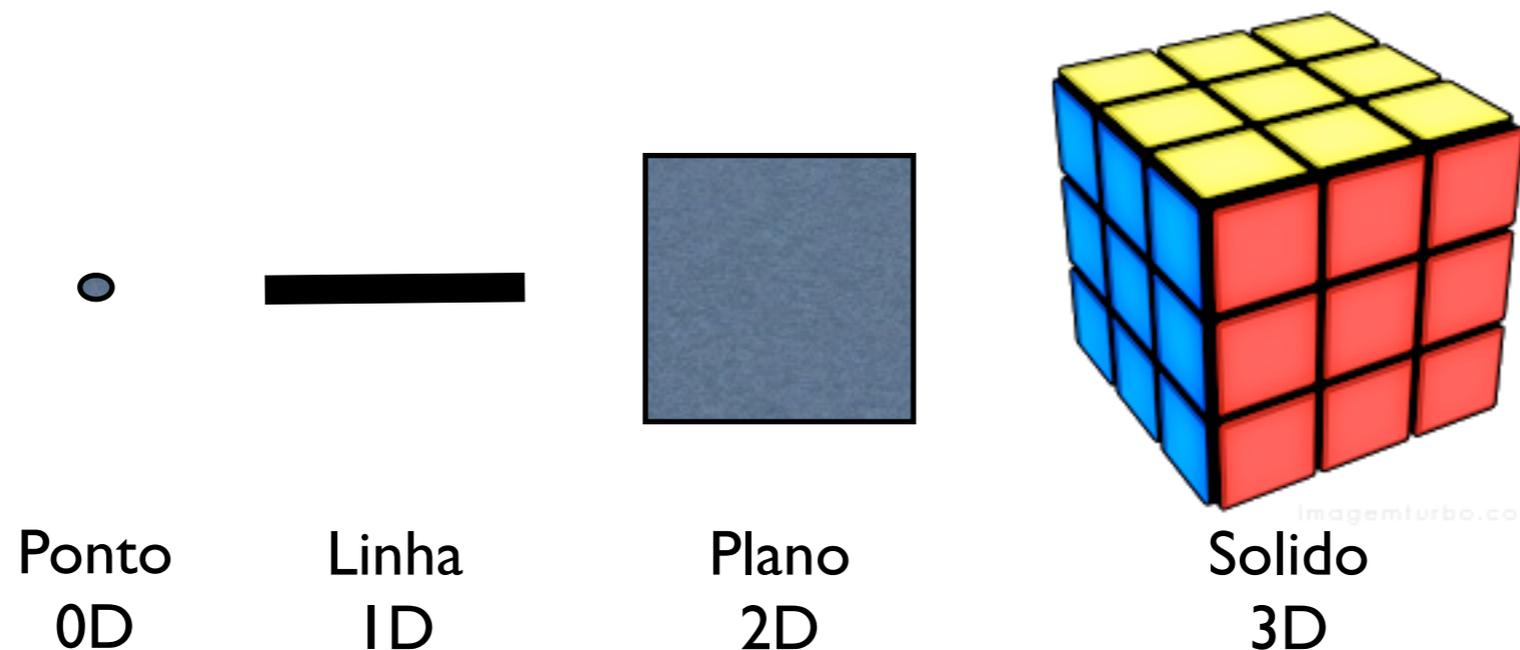


Determinismo e Caos



Esse sistema nunca repete o mesmo comportamento

Dimensão Euclidiana x Topologica



Ponto
0D

Linha
1D

Plano
2D

Solido
3D

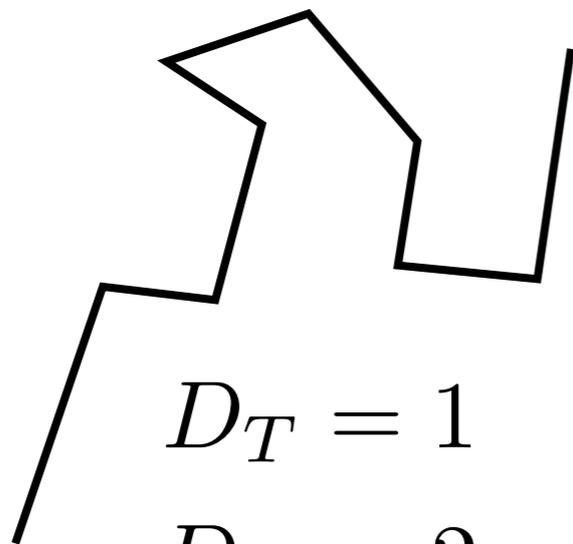
Dimensão Euclidiana é o número de coordenadas necessária para especificar o objeto

Topologia lida com as formas que um objeto pode se deformar sem perder as características principais
Enquanto a dimensão topologica de um objeto não muda durante uma deformação a Euclidiana pode mudar

Dimensão Euclidiana x Topologica

$$D_T = 1$$

$$D_E = 1$$



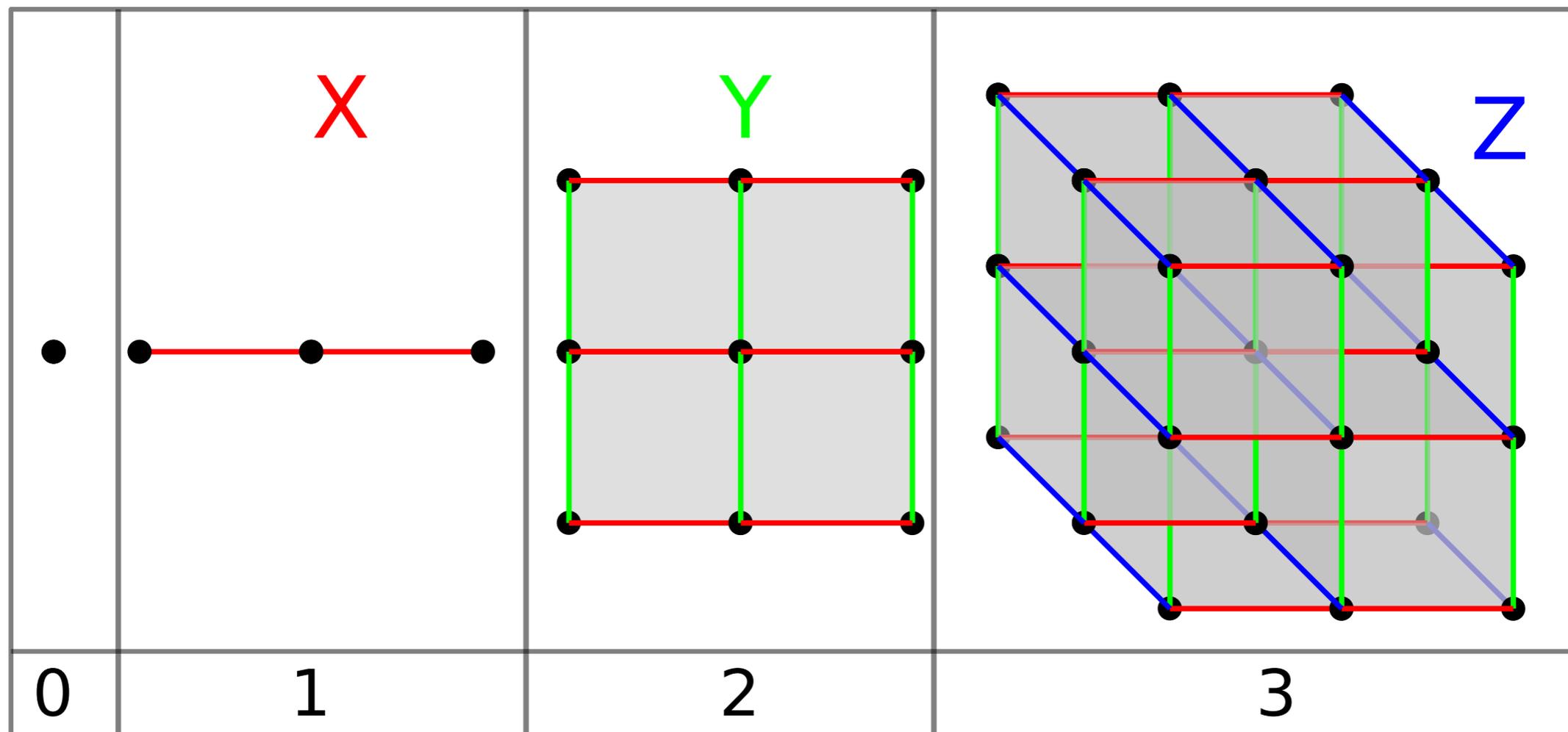
$$D_T = 1$$

$$D_E = 2$$

Essas duas curvas são topologicamente equivalentes

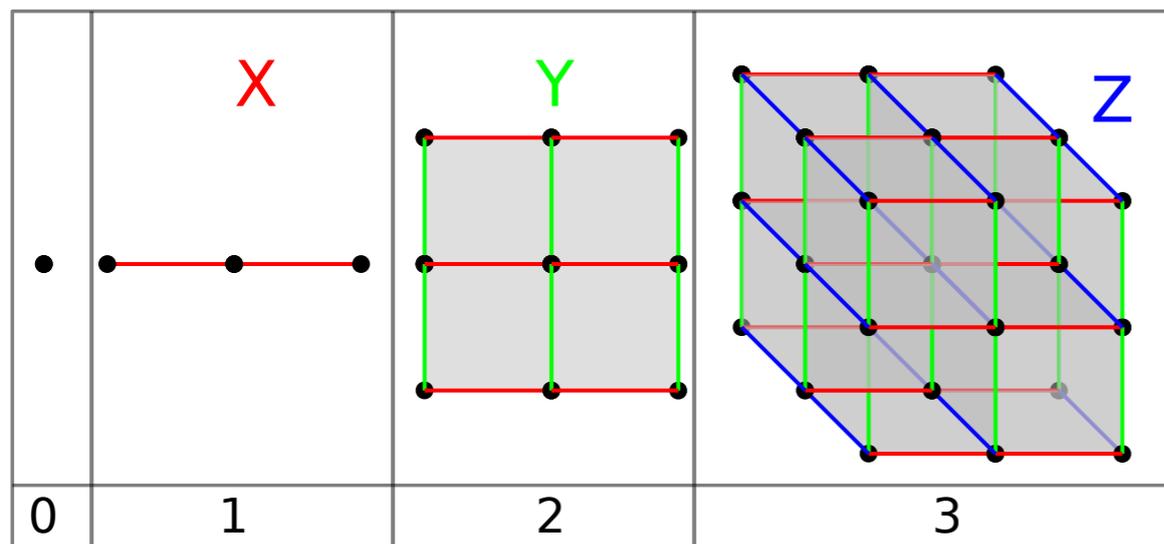
Dimensão de um sistema

Imagine um cabo (1D) , um quadrado (2D) e um cubo (3D) com dimensões lineares $X = Y = Z = L$. Nesse caso as massas serão respectivamente $M(L) = \lambda L$, σL^2 , e ρL^3 .



Dimensão de um sistema

Imagine um cabo (1D), um quadrado (2D) e um cubo (3D) com dimensões lineares $X = Y = Z = L$. Nesse caso as massas serão respectivamente $M(L) = \lambda L$, σL^2 , e ρL^3 .



$$\frac{M(L)}{M(\beta L)} = N \quad \leftarrow \text{(divisões)}$$

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)^d = N$$

$$d = \frac{\log(N)}{\log(1/\beta)}$$

Reduzindo L pela metade

$$M(L/2) = (1/2)M(L), \text{ 1D}$$

$$M(L/2) = (1/4)M(L), \text{ 2D}$$

$$M(L/2) = (1/8)M(L), \text{ 3D}$$

Ou seja

$$M(L/2) = (1/2)^1 M(L), \text{ 1D}$$

$$M(L/2) = (1/2)^2 M(L), \text{ 2D}$$

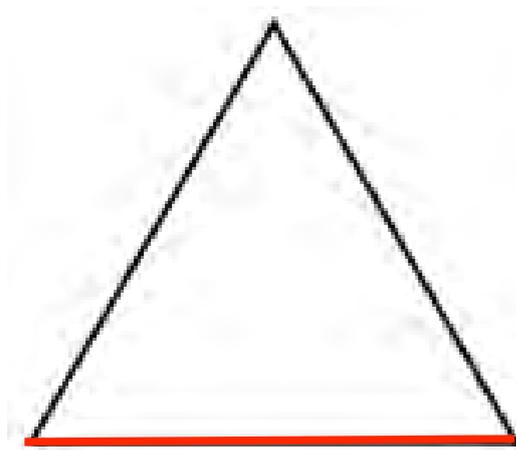
$$M(L/2) = (1/2)^3 M(L), \text{ 3D}$$

Generalizando,

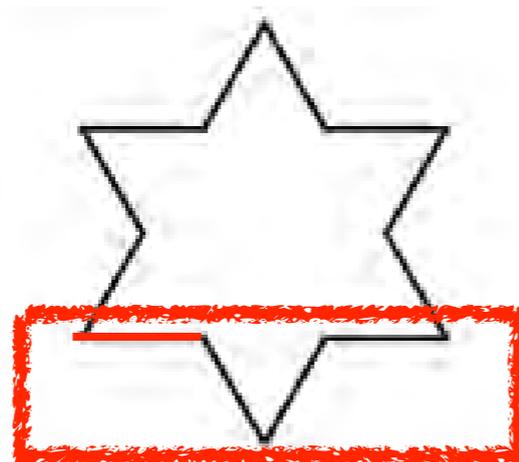
$$M(\beta L) = \beta^d M(L)$$

Fractais regulares

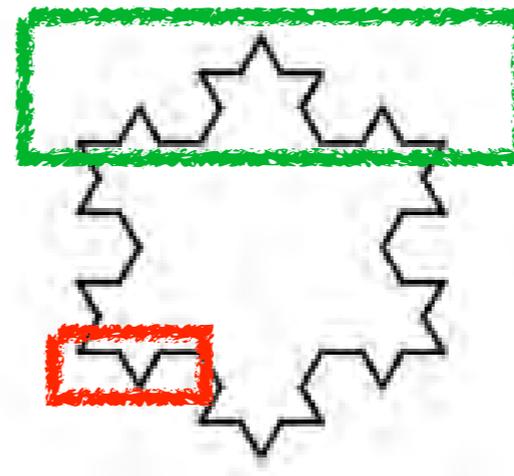
Para cada interação, $n = (0, 1, 2, 3)$, o comprimento dessa curva aumenta por um fator igual a $4/3$



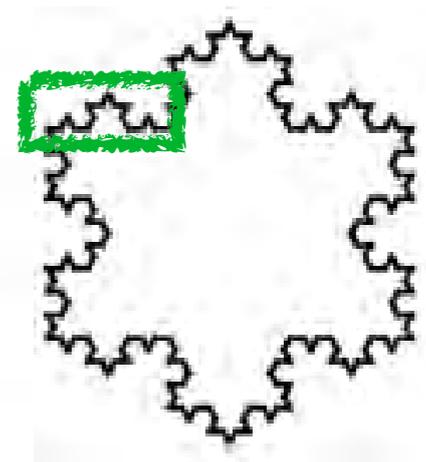
$n = 0$
Regua = 1
 $M = 3$



$n = 1$
Regua = $1/3$
 $M = 4$



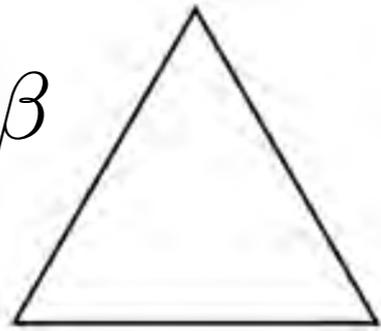
$n = 2$
Regua = $1/9$
 $M = 16/3$



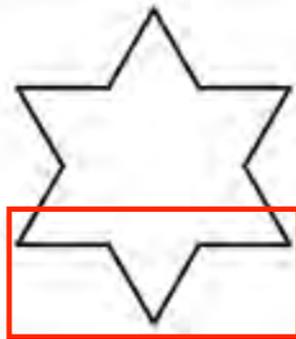
$n = 3$
Regua = $1/27$
 $M = 64/9$

Fractais regulares

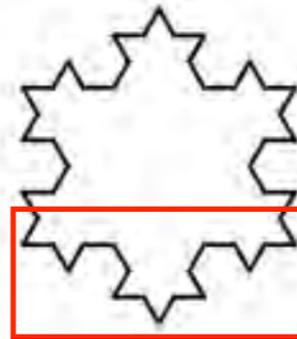
$$\text{Regua} = \beta$$



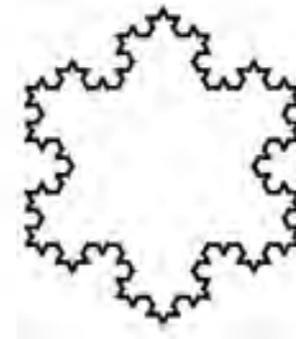
n = 0
Regua = 1
M = 3



n = 1
Regua = 1/3
M = 4



n = 2
Regua = 1/9
M = 16/3



n = 3
Regua = 1/27
M = 64/9

N = 4

N = 16

$$\frac{M(L)}{M(\beta_n L)} = N$$

$$\left(\frac{1}{\beta_n}\right)^d = N$$

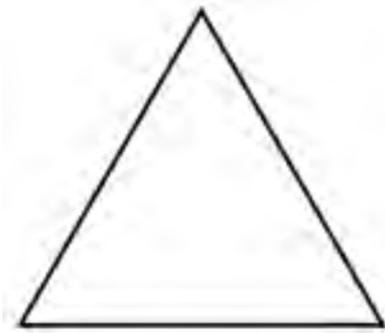
$$d = \frac{\log(N)}{\log(1/\beta_n)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.26$$

$$M_n = M_0 N \beta_n$$

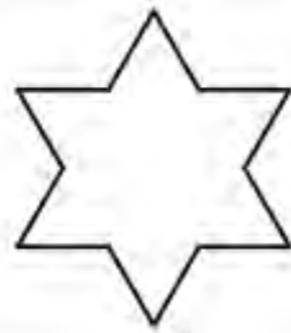
$$= M_0 \left(\frac{1}{\beta_n}\right)^d \beta_n$$

$$= M_0 \beta_n^{1-d}$$

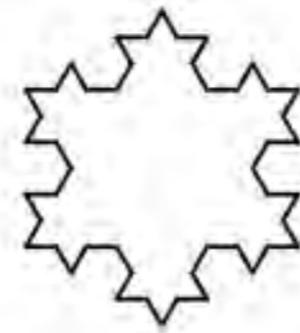
Fractais regulares



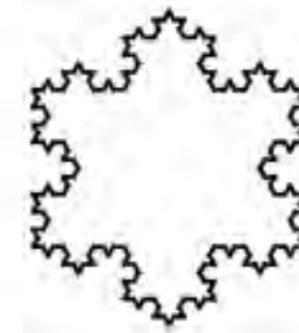
n = 0
Regua = 1
M = 3



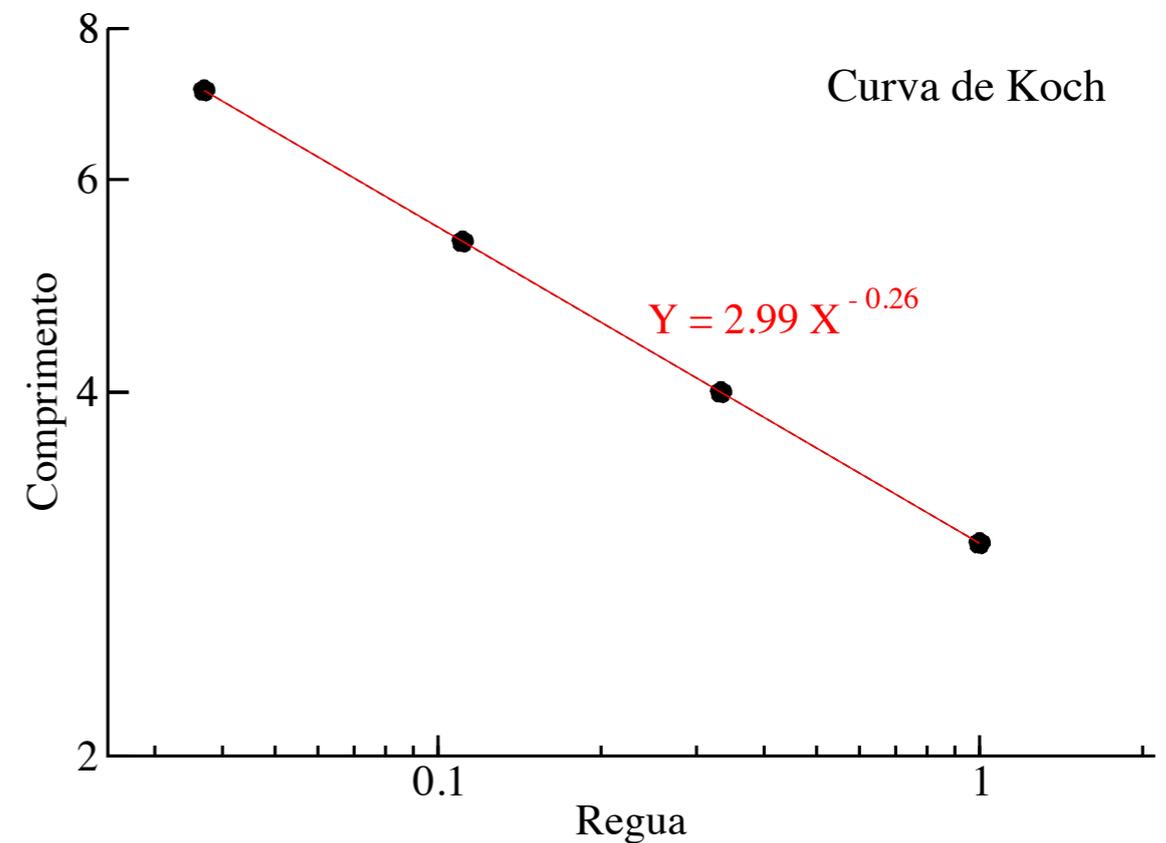
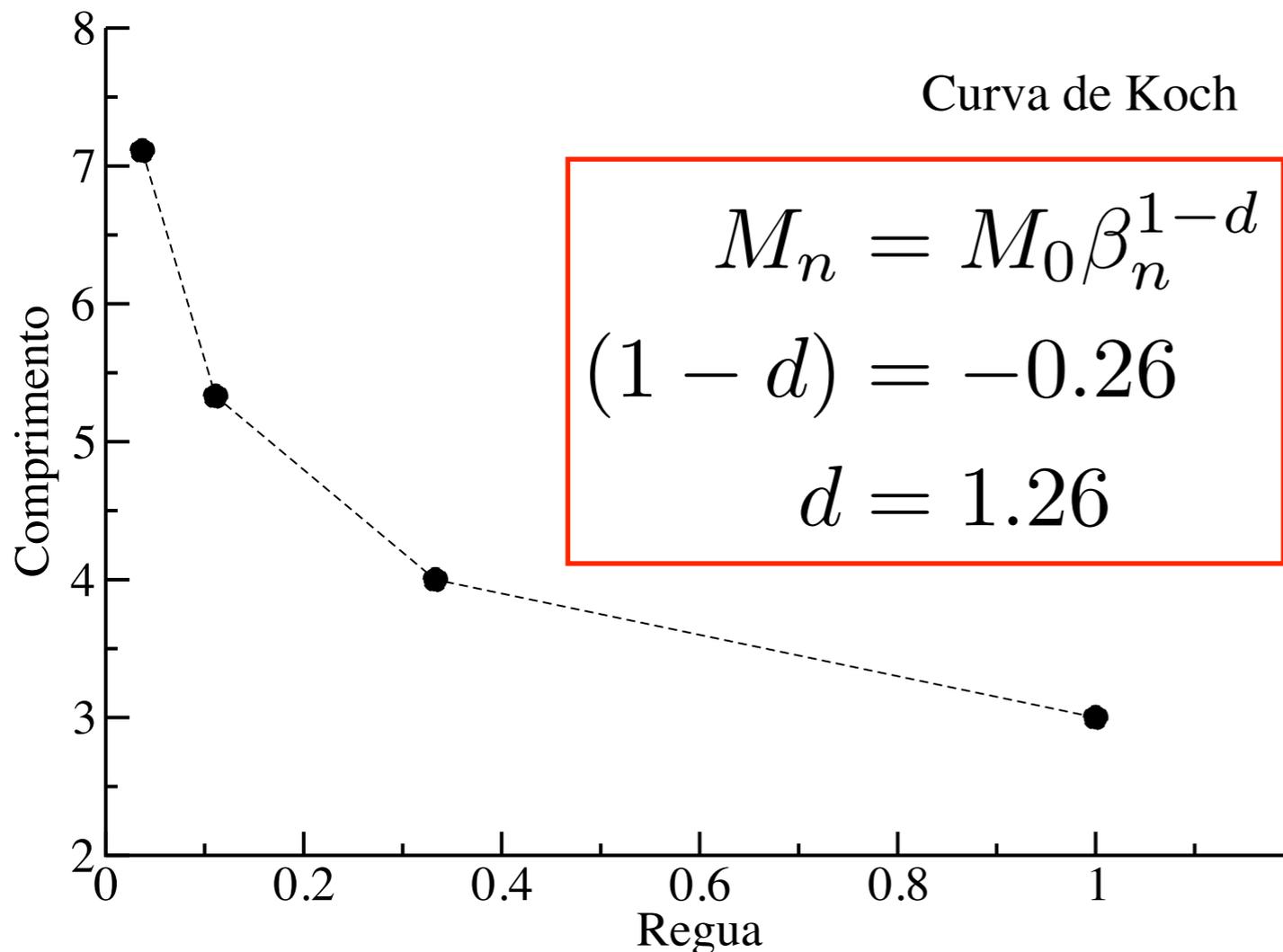
n = 1
Regua = 1/3
M = 4



n = 2
Regua = 1/9
M = 16/3



n = 3
Regua = 1/27
M = 64/9



Fractais irregulares

Costa da Inglaterra



$L=200\text{Km}$,
Costa $\approx 2400\text{Km}$

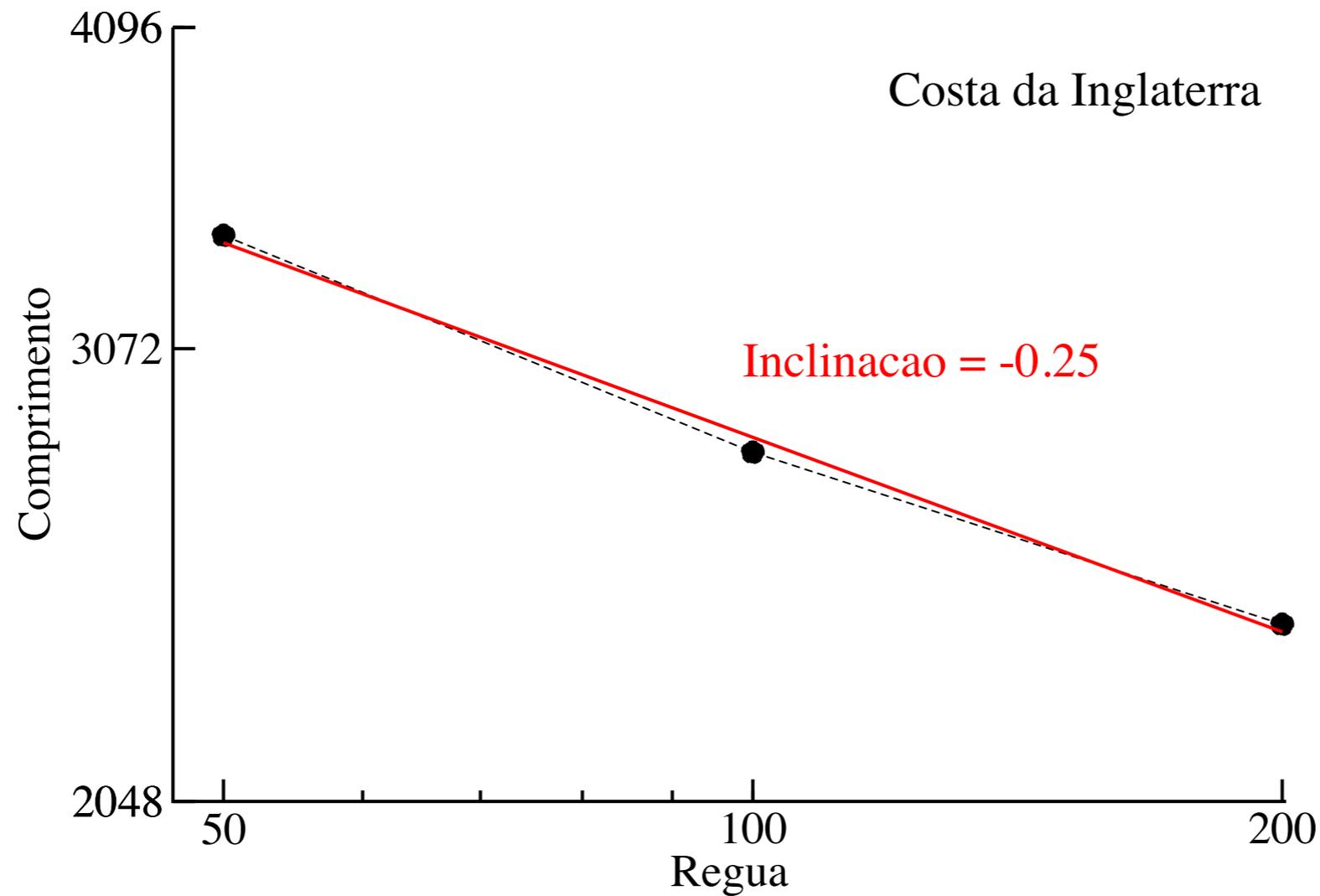


$L=100\text{Km}$,
Costa $\approx 2800\text{Km}$



$L=50\text{Km}$,
Costa $\approx 3400\text{Km}$

Fractais irregulares



Ou seja: $d_f = 1.25$

Fractais irregulares



Fractais irregulares

$$d_B = \frac{\log(N)}{\log(1/\beta)}$$

Essa expressão assume a unidade de “volume” (hipervolume, V^*) = 1, é limitada e tende a produzir valores errados para β grande.

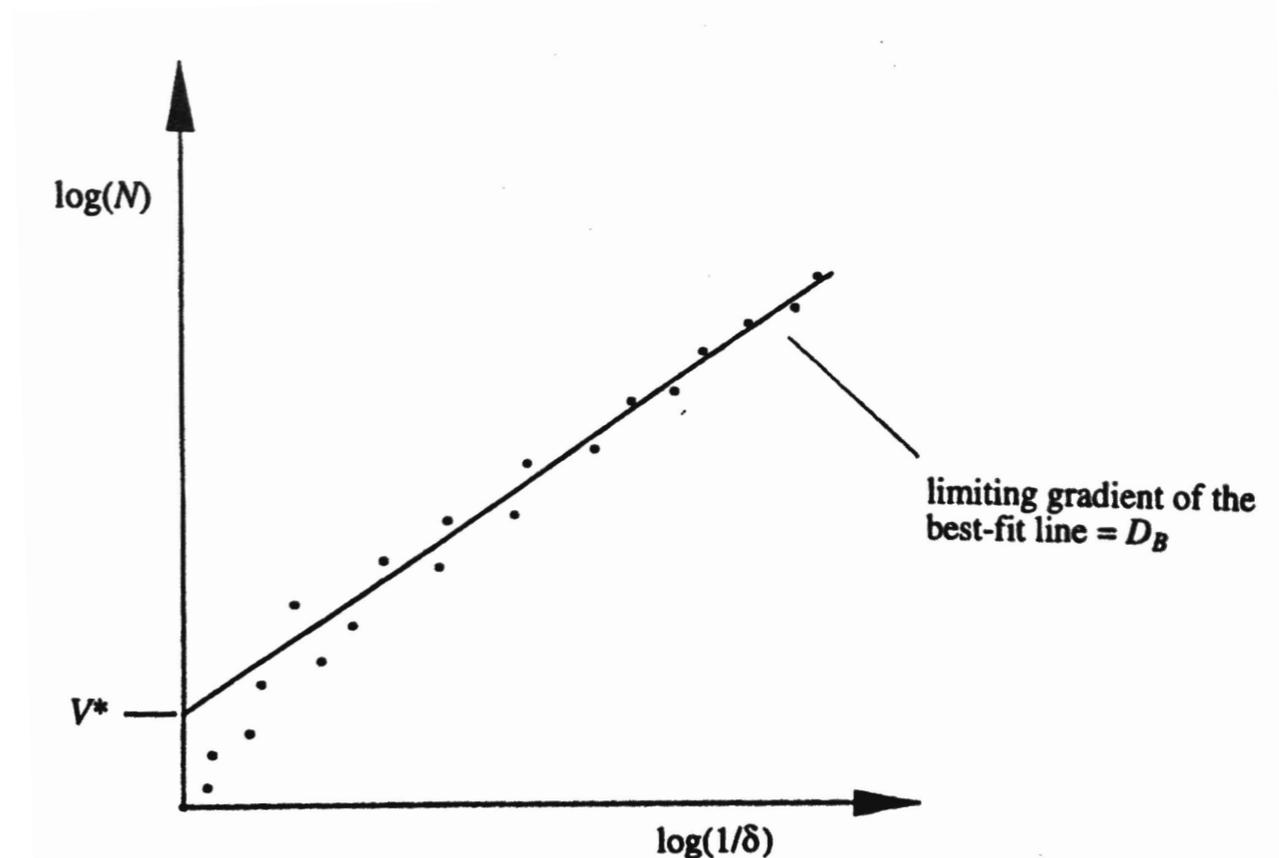
$$d_B = \frac{\log(N) - \log(V^*)}{\log(1/\beta)}$$

$$\log(N) = d_B \log(1/\beta) + \log(V^*)$$

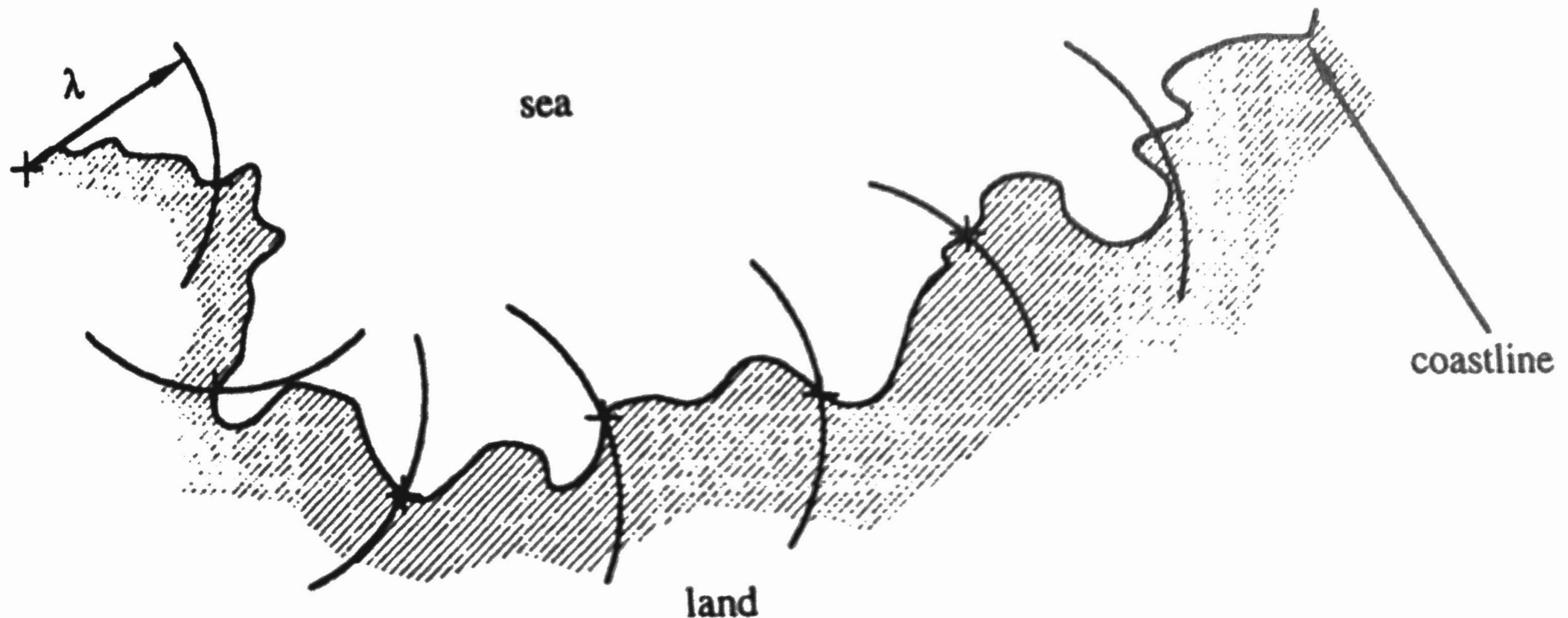
Essa é a equação de uma linha reta em que o gradiente da linha, d_B , é a dimensão do box counting

Ou seja

$$d_B = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d(\log(N))}{d(\log(1/\beta))}$$

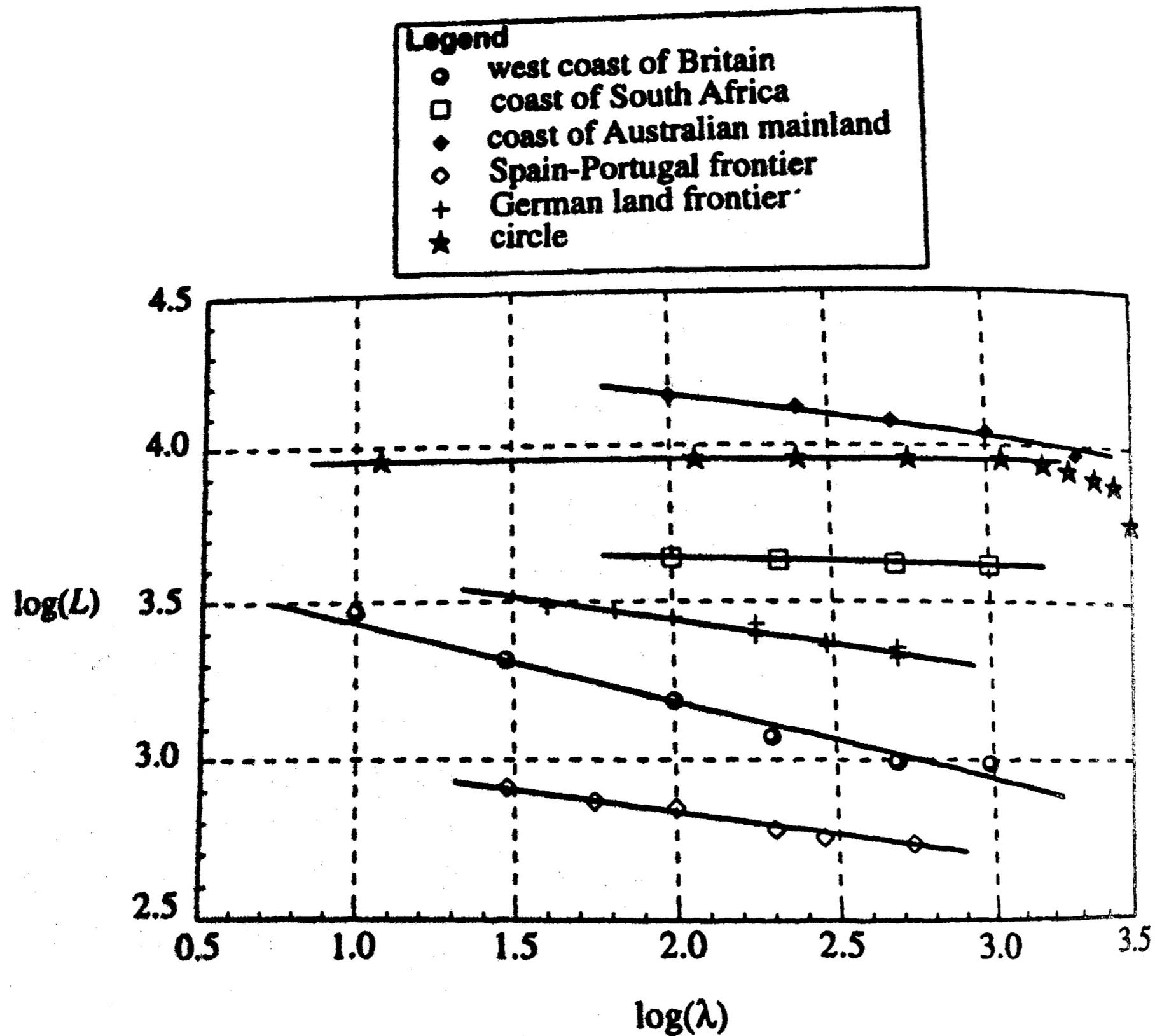


Fractais irregulares



Determinando a dimensão fractal de uma costa utilizando a “structured walk technique” (compasso)

Fractais irregulares



Fractais irregulares

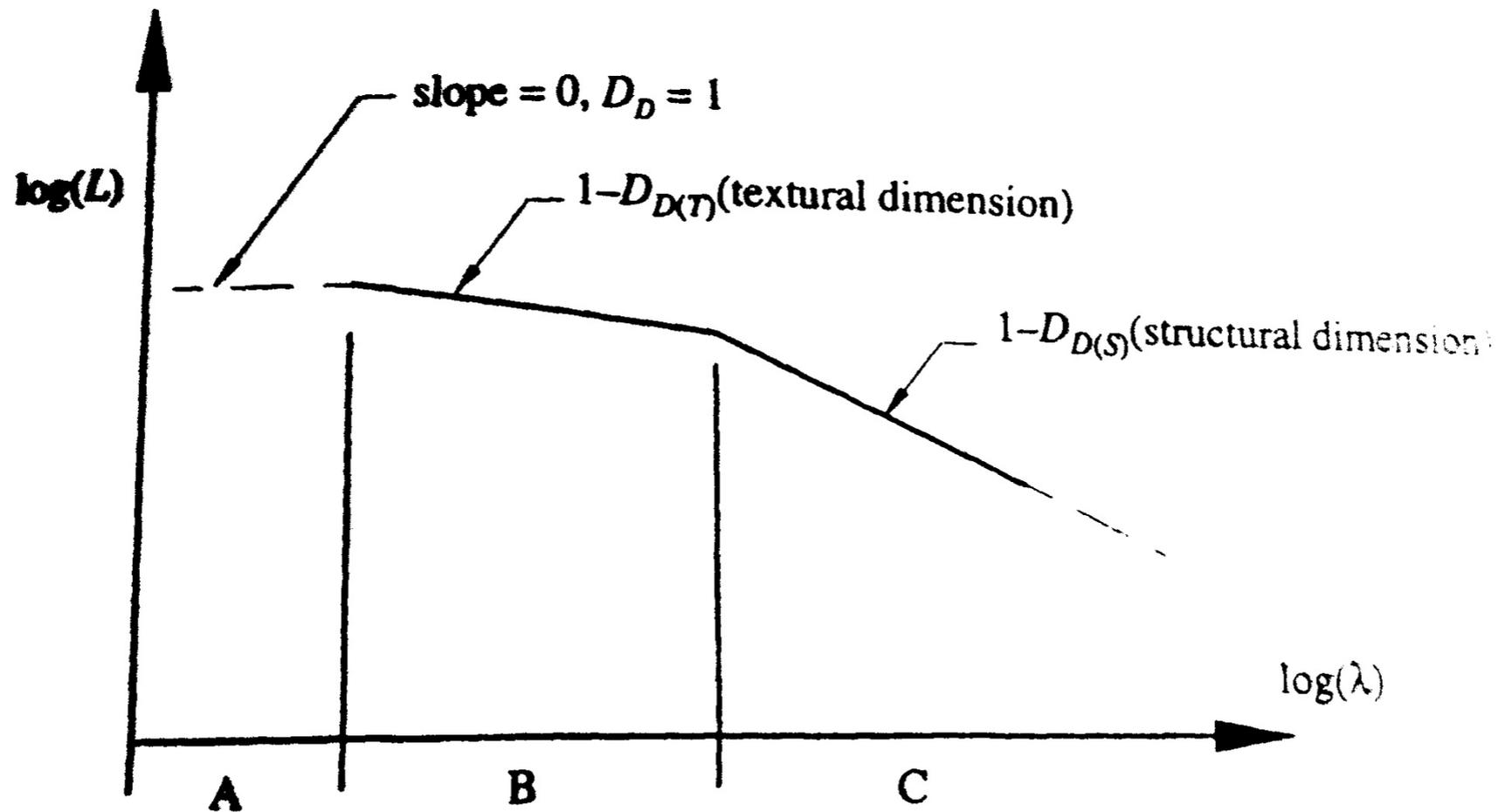


Figure 3.12. Main regions of the Richardson plot.

[A] λ é bem pequeno. Um fractal natural não é auto similar abaixo dessa escala, ou a resolução do fractal não é suficiente para permitir investigação abaixo desse ponto

[B] λ é pequeno. Estamos medindo a estrutura fina, textura

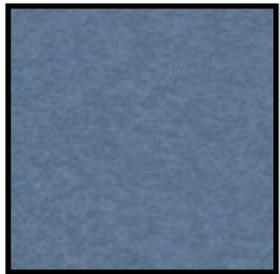
[C] λ é grande. Estamos medindo as escalas grandes do sistema: dimensão estrutural

>> objetos com mais de uma dimensão fractal é dito Multifractal <<

Relação, R , Perímetro Área

Leitura EXTRA

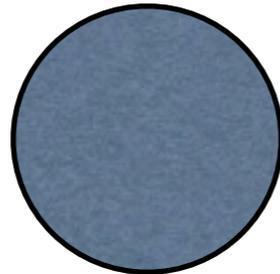
$$R = \frac{P}{\sqrt{A}}$$



$$P = 4L$$

$$A = L^2$$

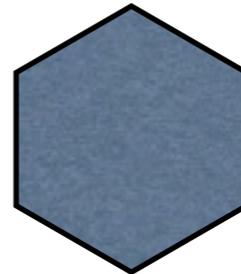
$$R = 4$$



$$P = \pi D$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$R = \sqrt{4\pi}$$



$$P = 6L$$

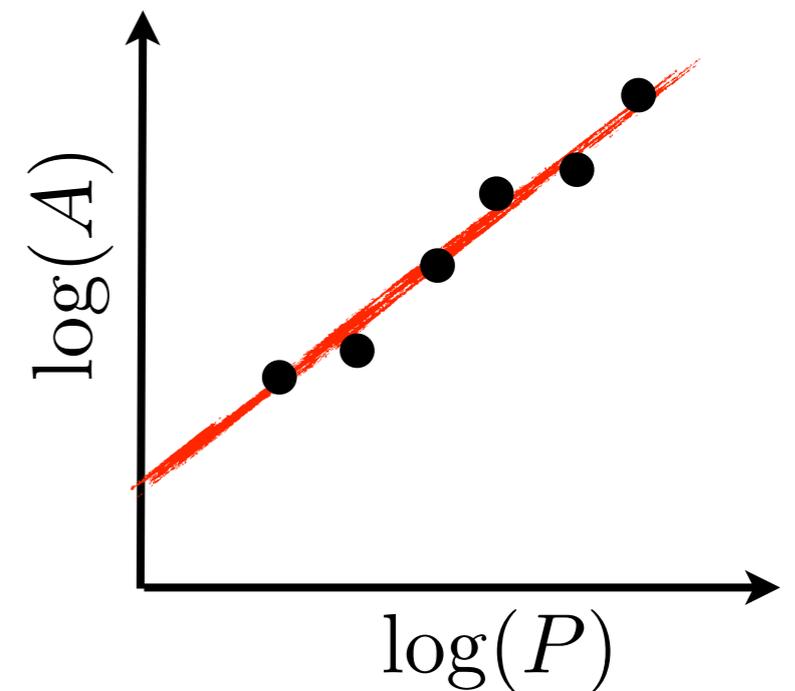
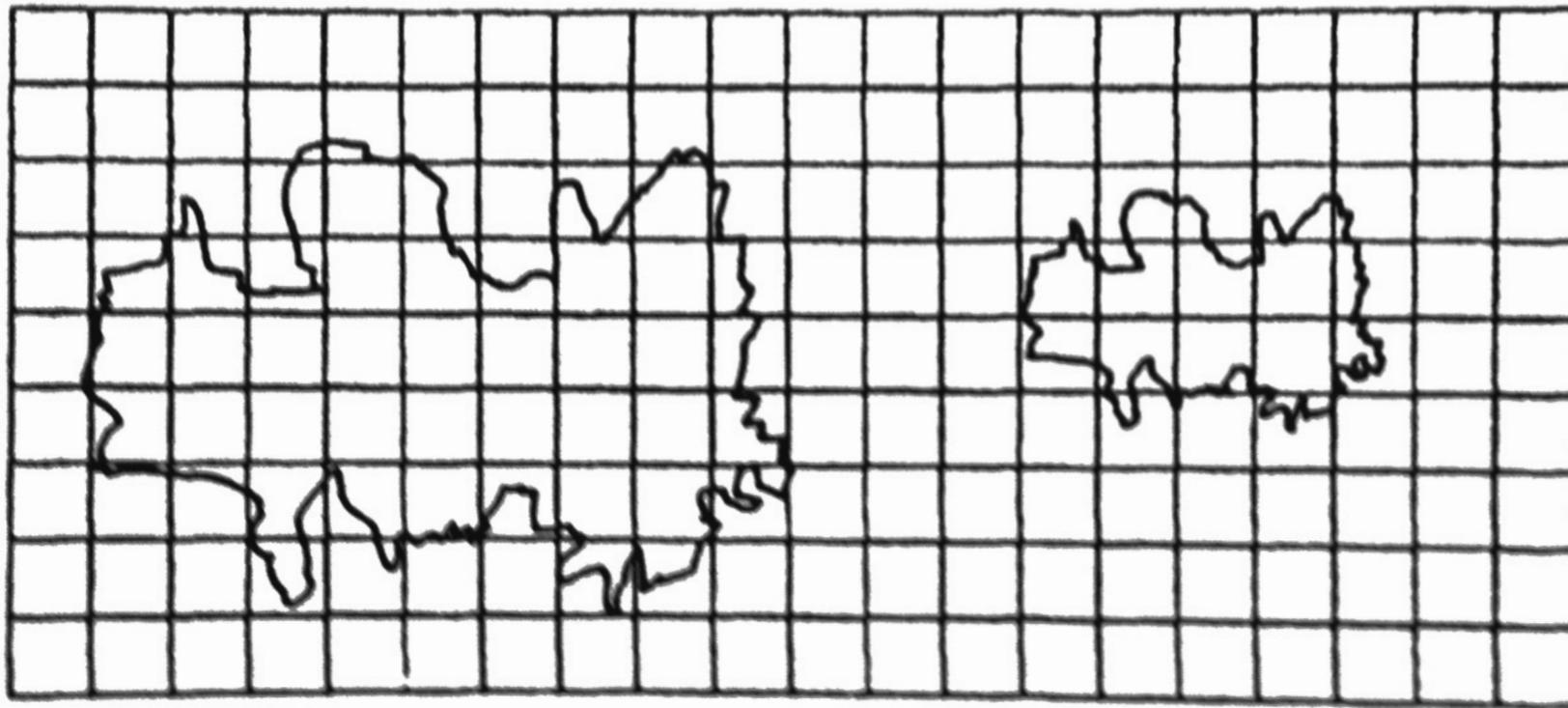
$$A = \frac{3^{3/2} L^2}{2}$$

$$R = 3^{1/4} \sqrt{8}$$

Relação, R , Perímetro Área

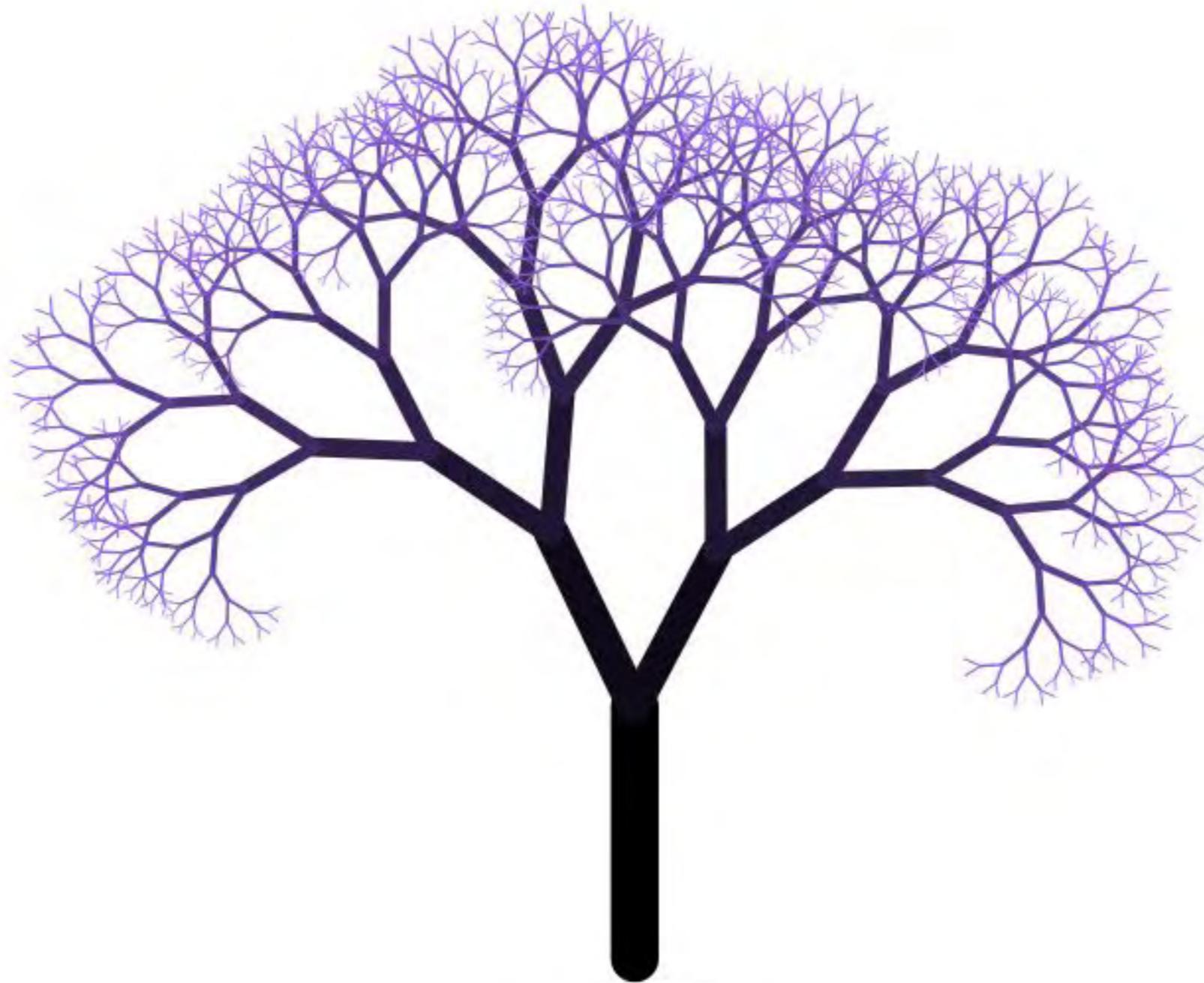
$$R = \frac{P^{1/d_b}}{\sqrt{A}}$$

Leitura EXTRA

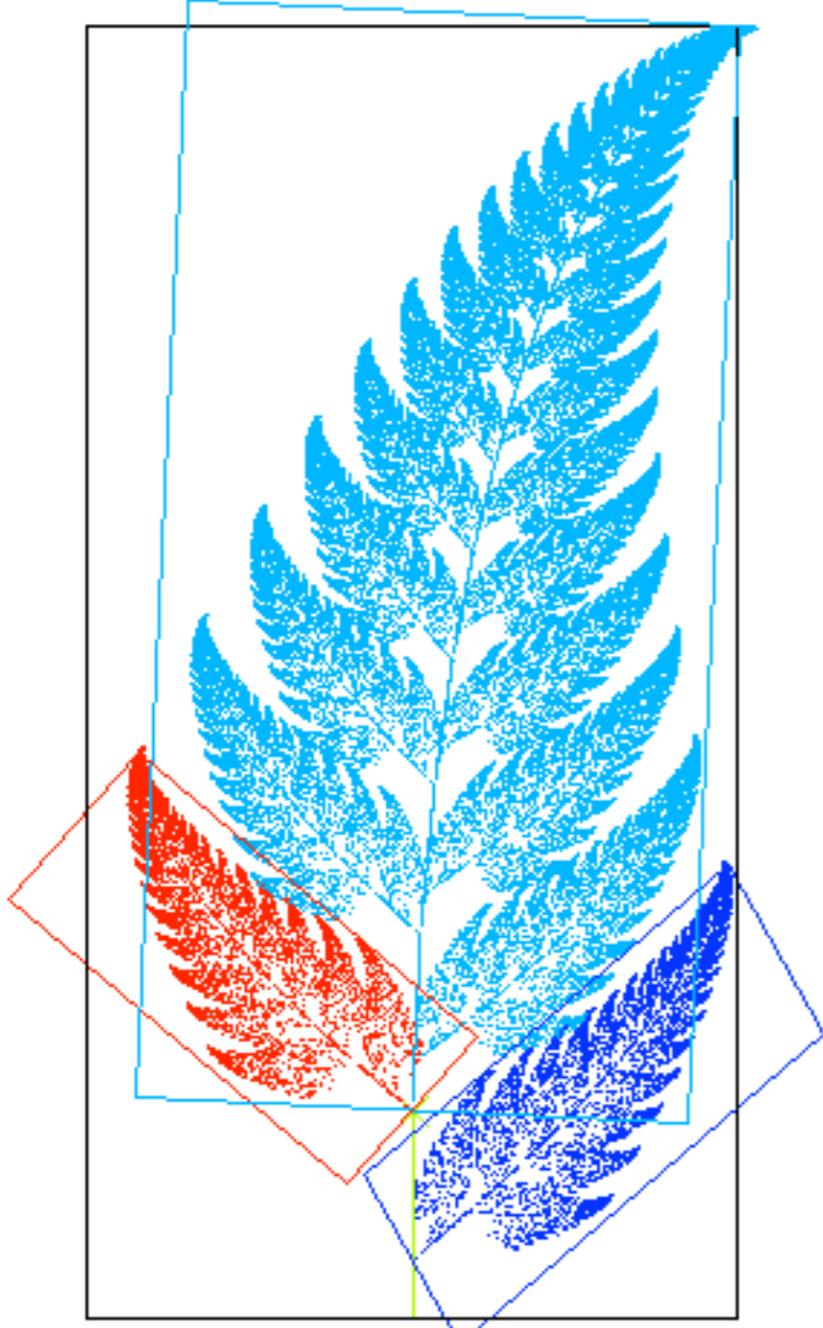


Essa técnica é útil para descobrir se um grupo de fractais são estatisticamente similar, e tem sido utilizada para classificar vários grupos de formatos fractais

Fractais irregulares



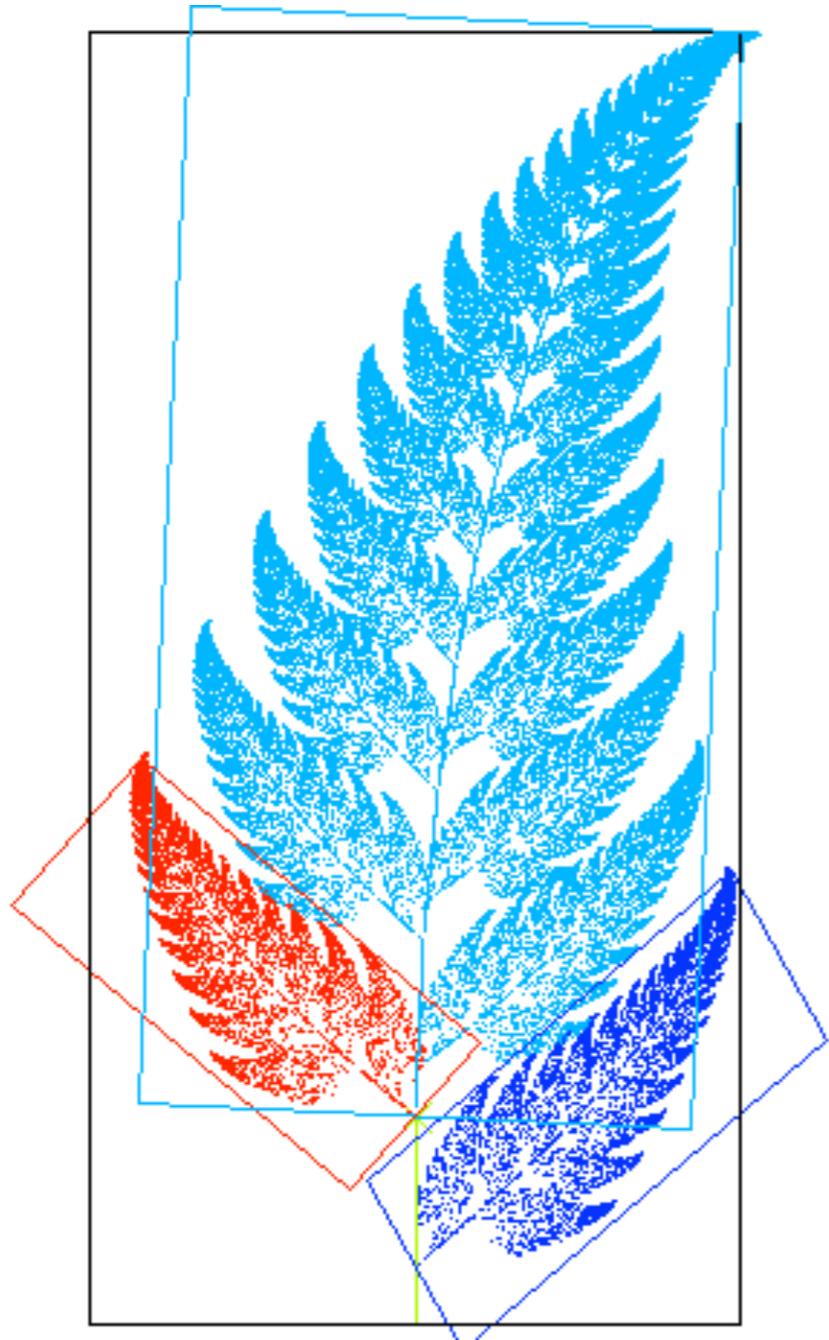
Affine Auto Similaridade



Auto Similaridade



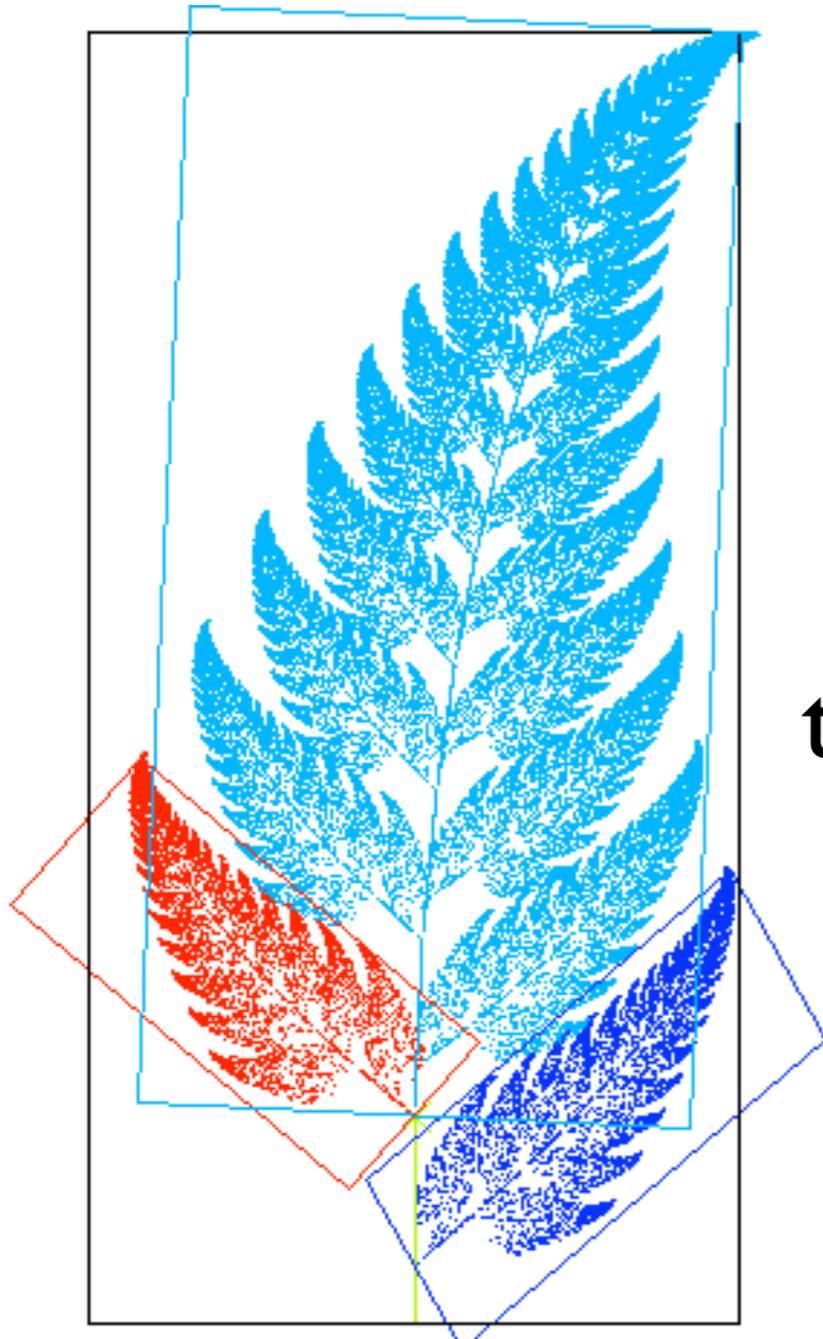
Affine Auto Similaridade



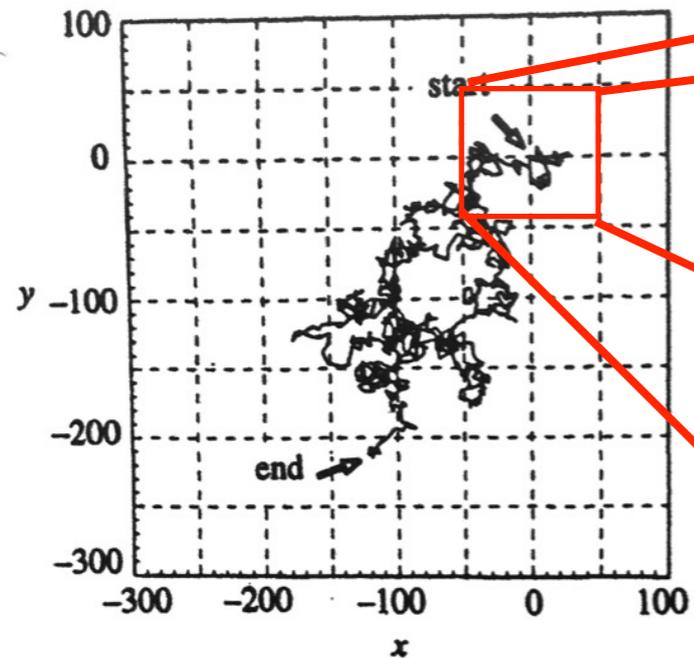
Uma imagem de um fractal tipo samambaia, exibe uma auto-similaridade afim. Cada uma das folhas da samambaia estão relacionados uns com os outros por uma transformação afim. Por exemplo, a folha de vermelho pode ser transformada na folha azul por uma combinação de reflexão, de rotação, de expansão e de tradução.

Leitura EXTRA

Em geometria, uma transformação afim ou mapa afim, ou uma afinidade (do latim, *affinis*, “ligado”) é uma função entre espaços afins que preserva pontos, retas e planos. Além disso, conjuntos de linhas paralelas permanecem paralelas depois de uma transformação afim. Uma transformação afim não necessariamente preserva os ângulos entre as linhas ou as distâncias entre os pontos, apesar de não preservar relações de distâncias entre pontos situados em uma linha reta.



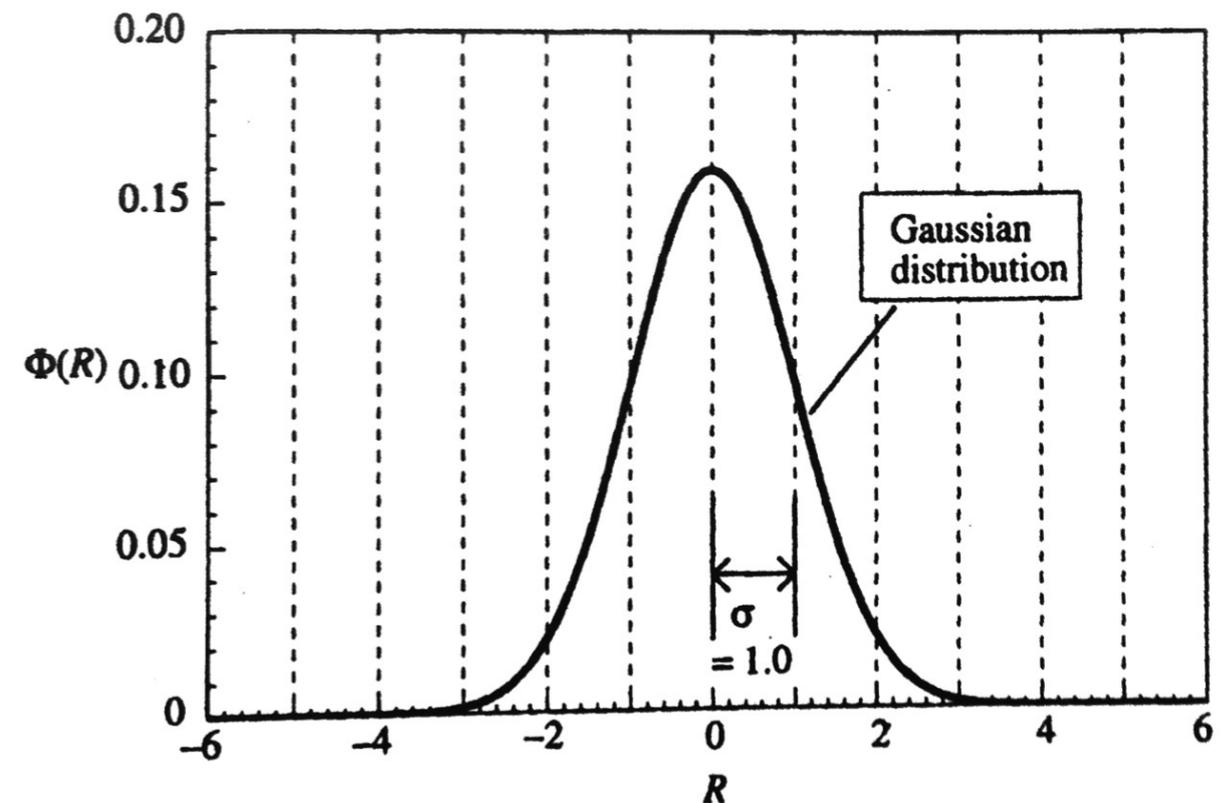
Movimento Browniano: Regular e Fracionário



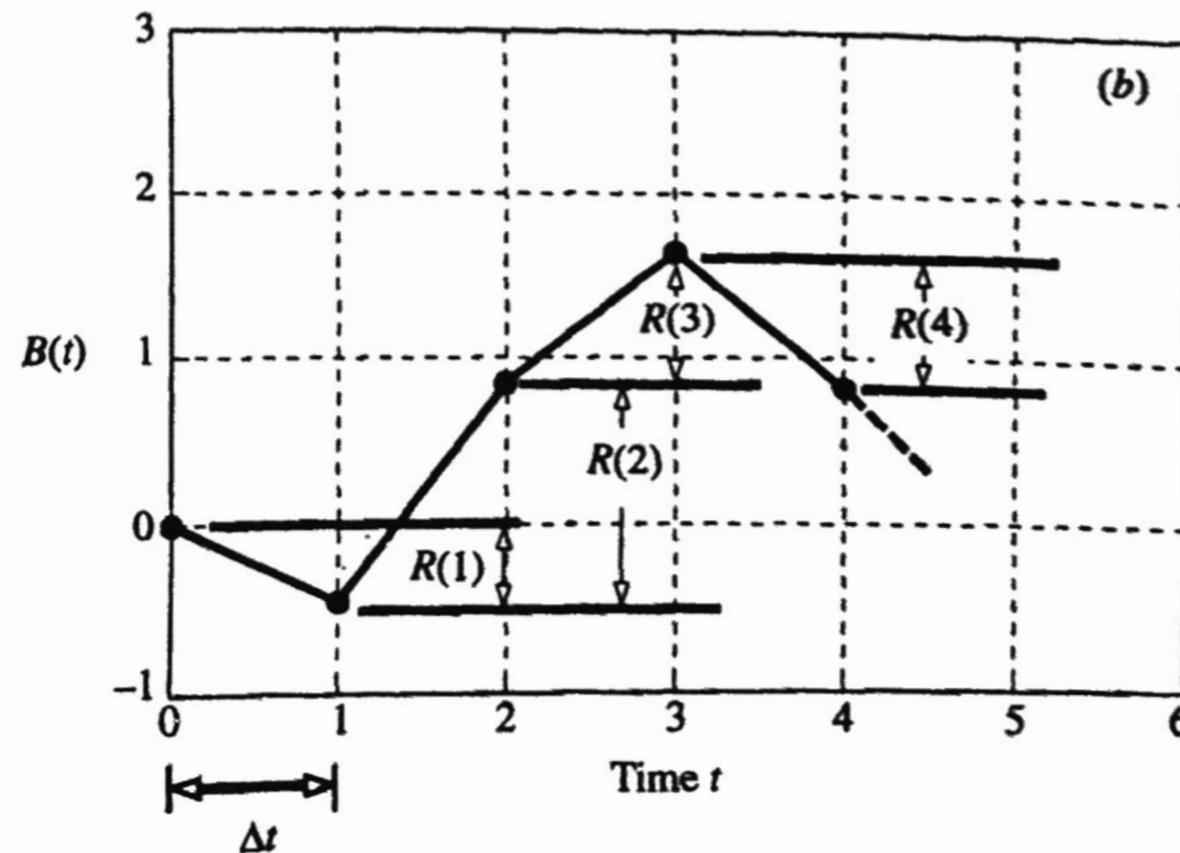
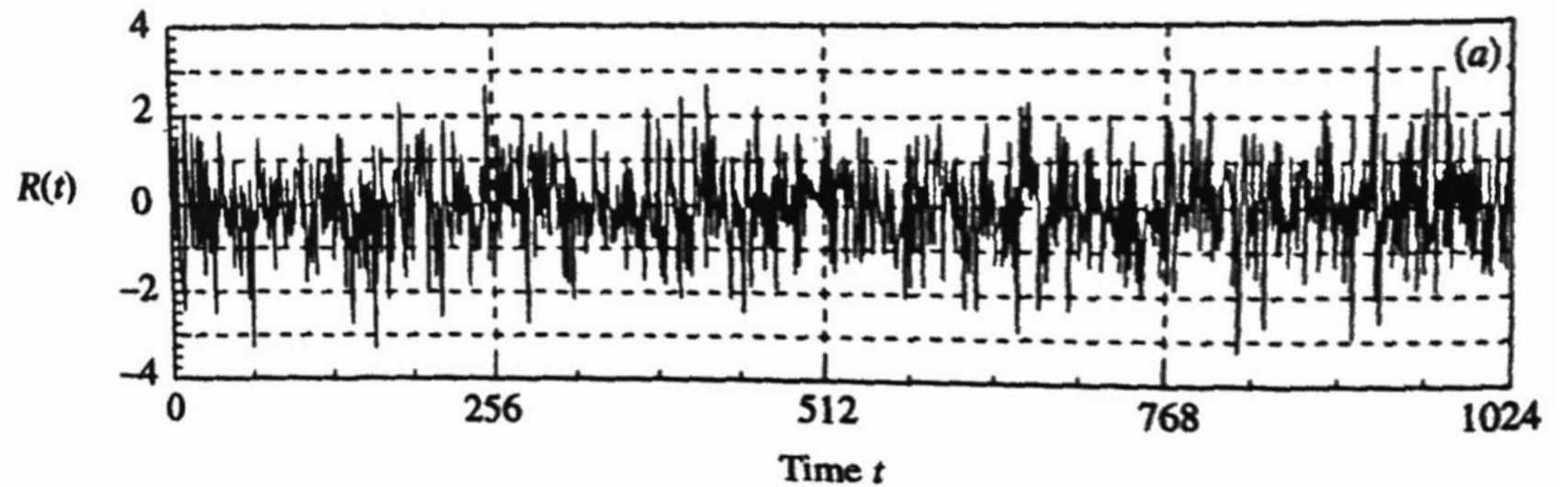
$$\Phi(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{R^2}{2}}$$

Onde a Probabilidade P de um passo de tamanho R é:

$$P(R_a \leq R \leq R_b) = \int_{R_a}^{R_b} \Phi(R) dR$$



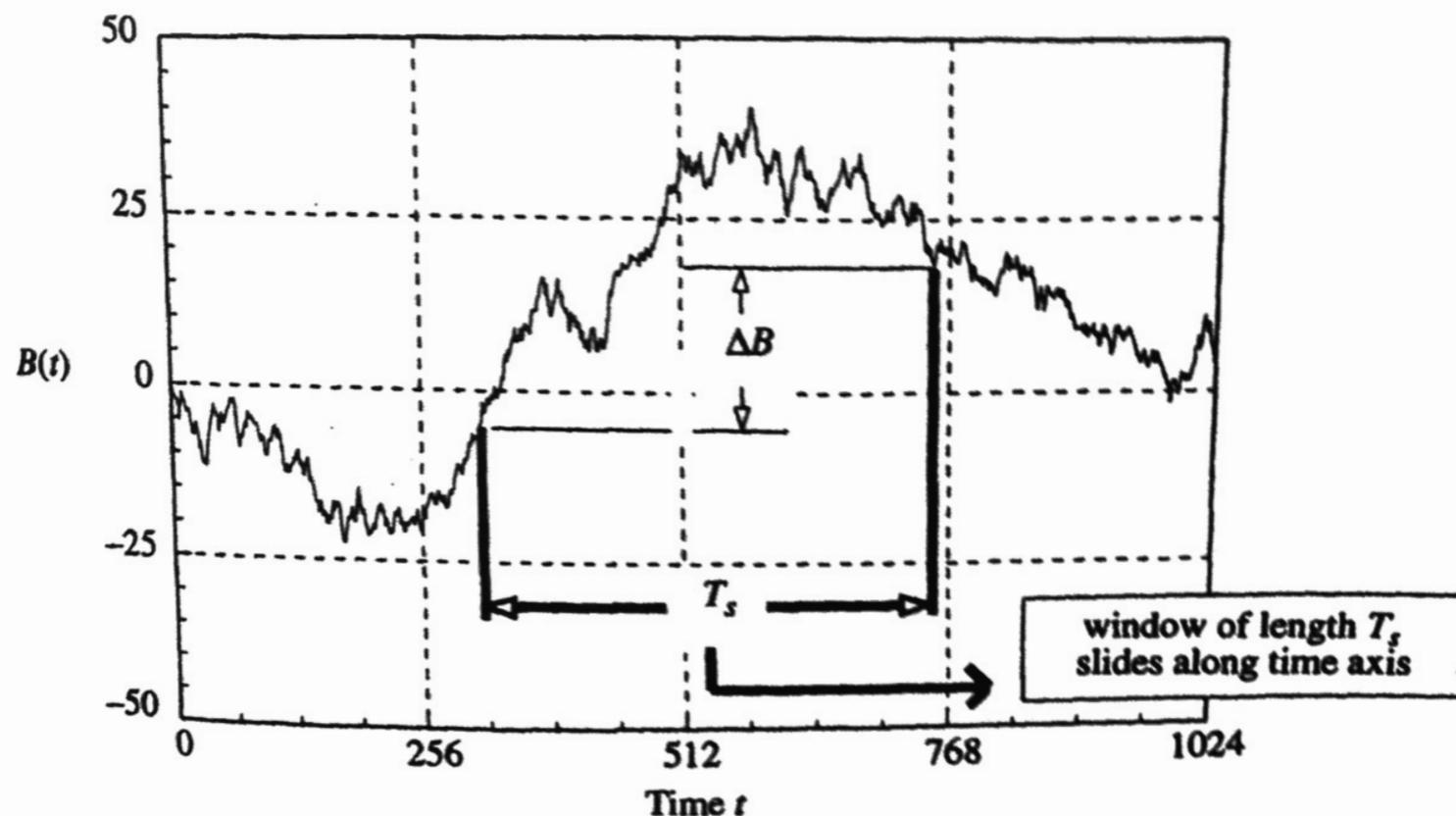
Trajetória Browniana



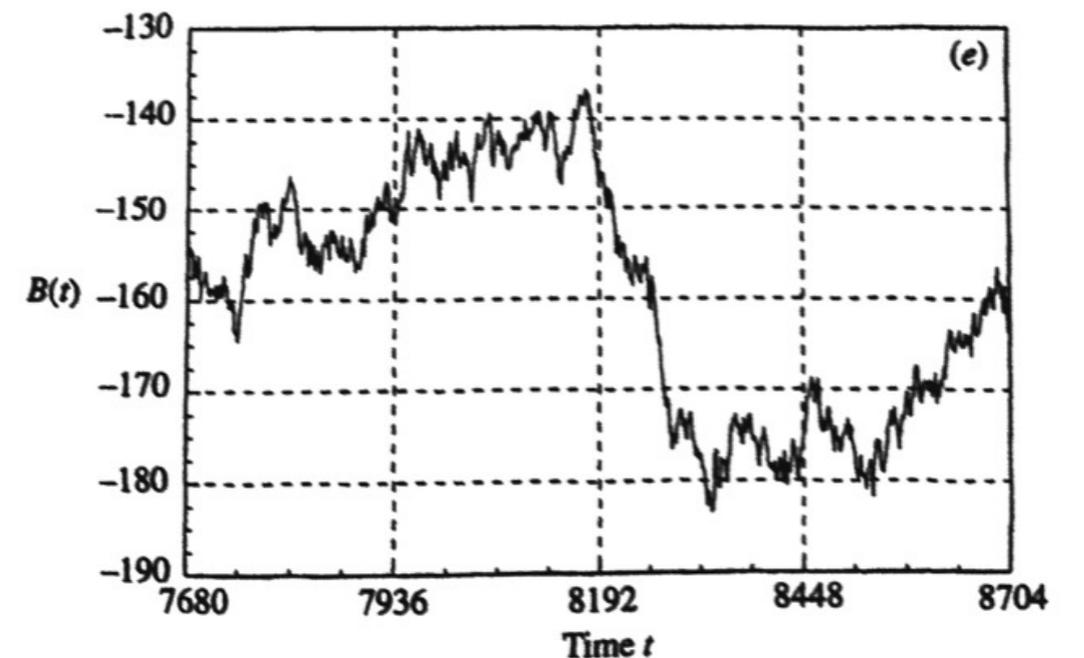
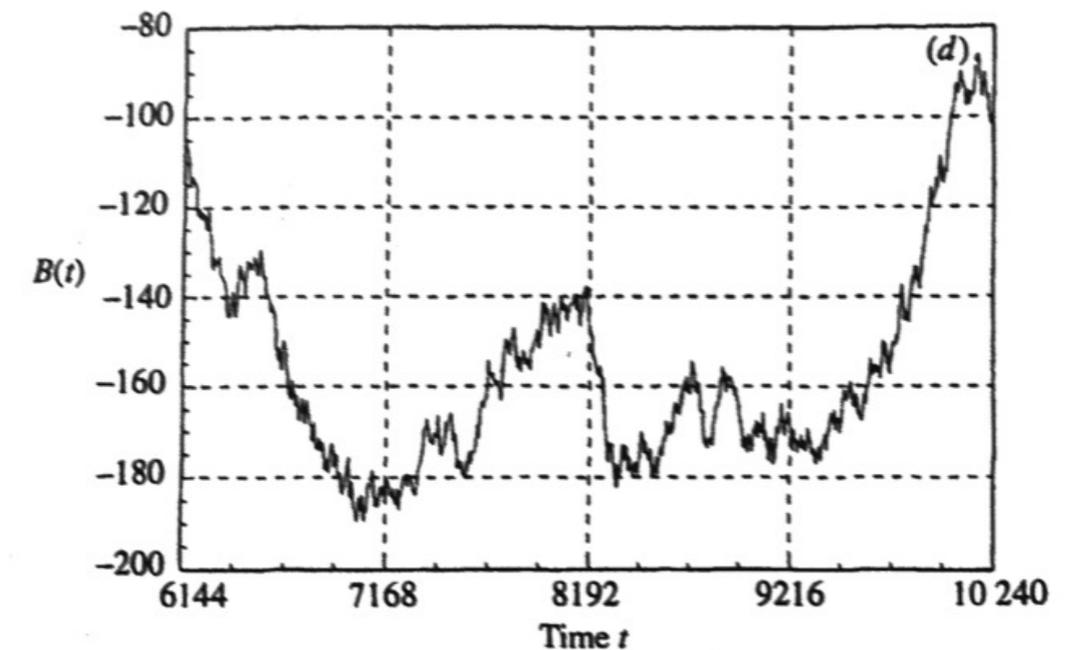
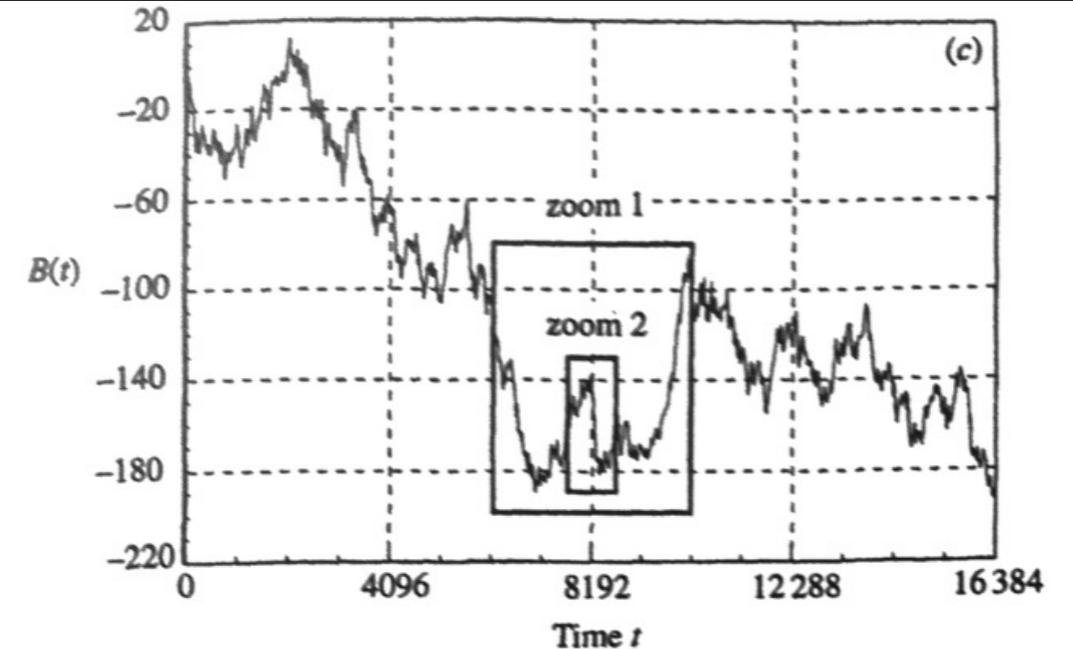
$$B(t_i) = \sum_{j=1}^i R(t_j)$$

Trajetoária Browniana

$$B(t_i) = \sum_{j=1}^i R(t_j)$$



Se considerarmos par de pontos da trajetória separados por um tempo T_s ...



Encontramos que a
média:

$$|\overline{\Delta B}| = \overline{B(t + T_s) - B(t)}$$

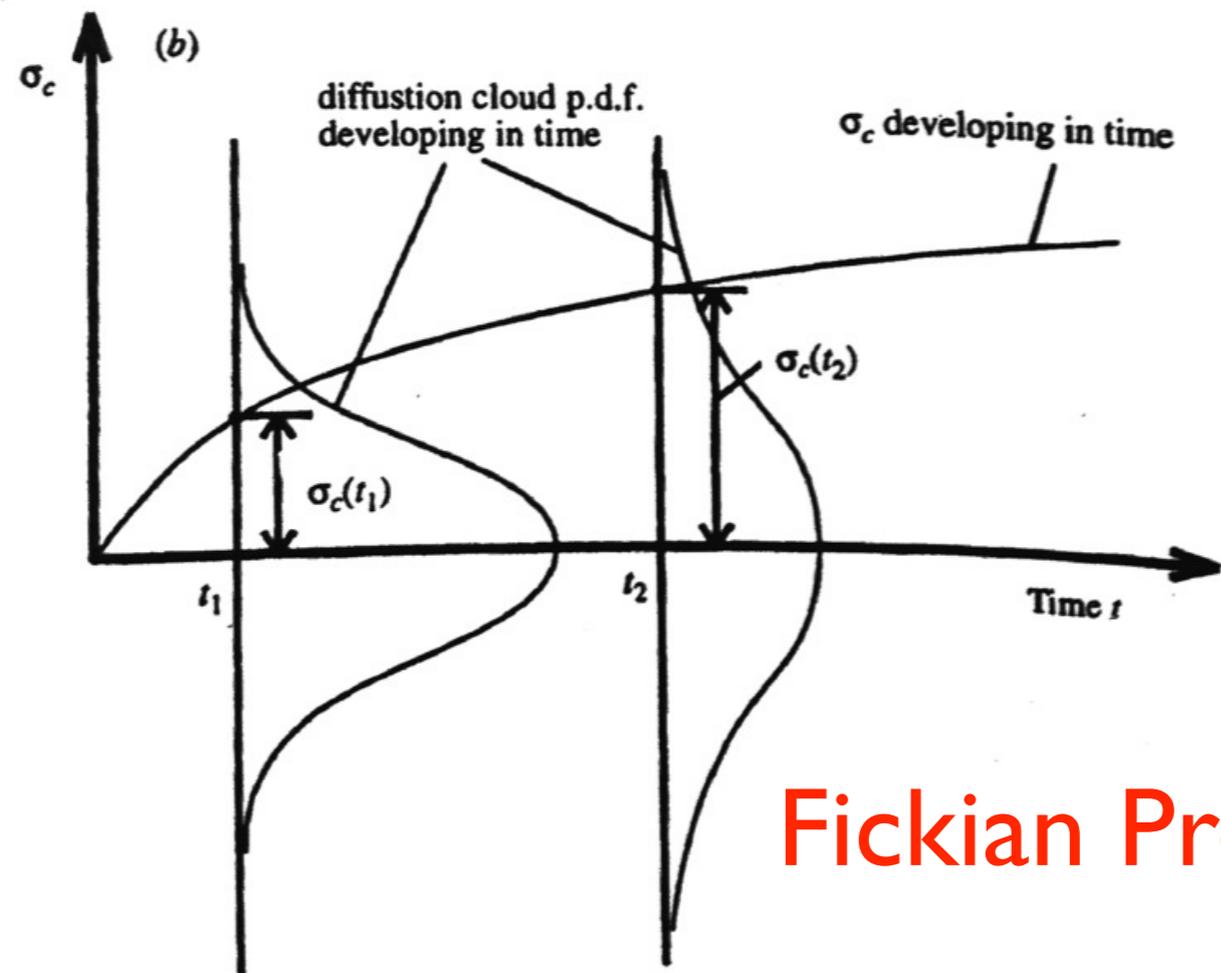
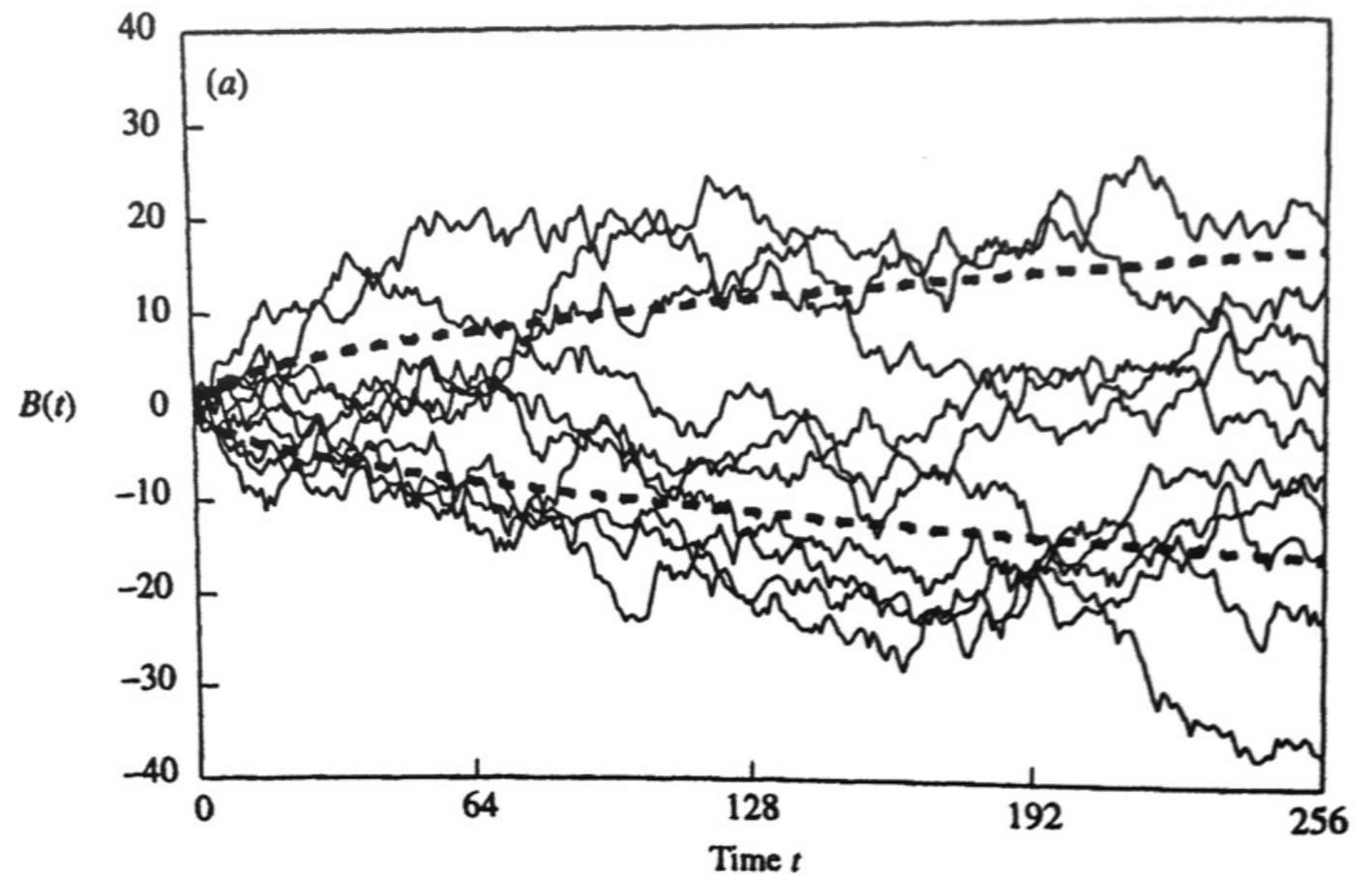
é proporcional a raiz
quadrada da
separação temporal:

$$|\overline{\Delta B}| \propto T_s^{1/2}$$

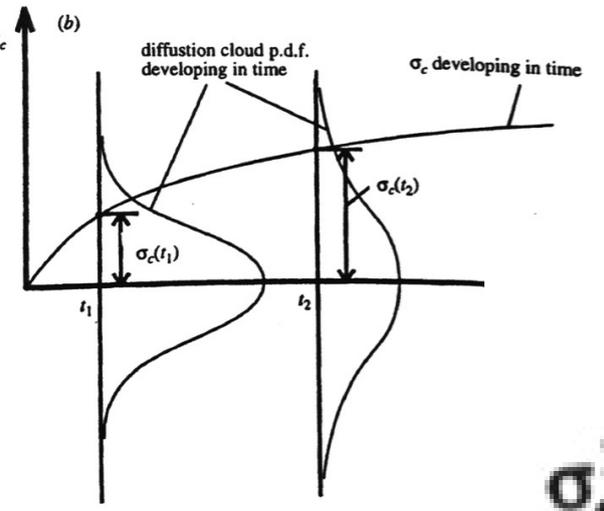
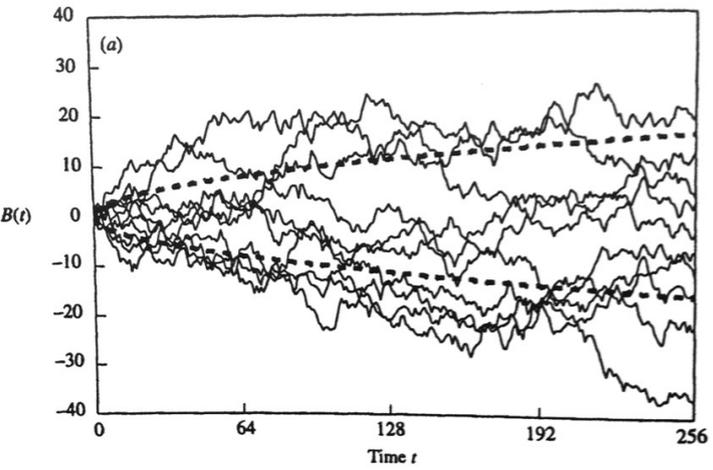
onde o expoente 1/2
é conhecido como
expoente de Hurst.

Uma nuvem de difusão
escala da mesma forma

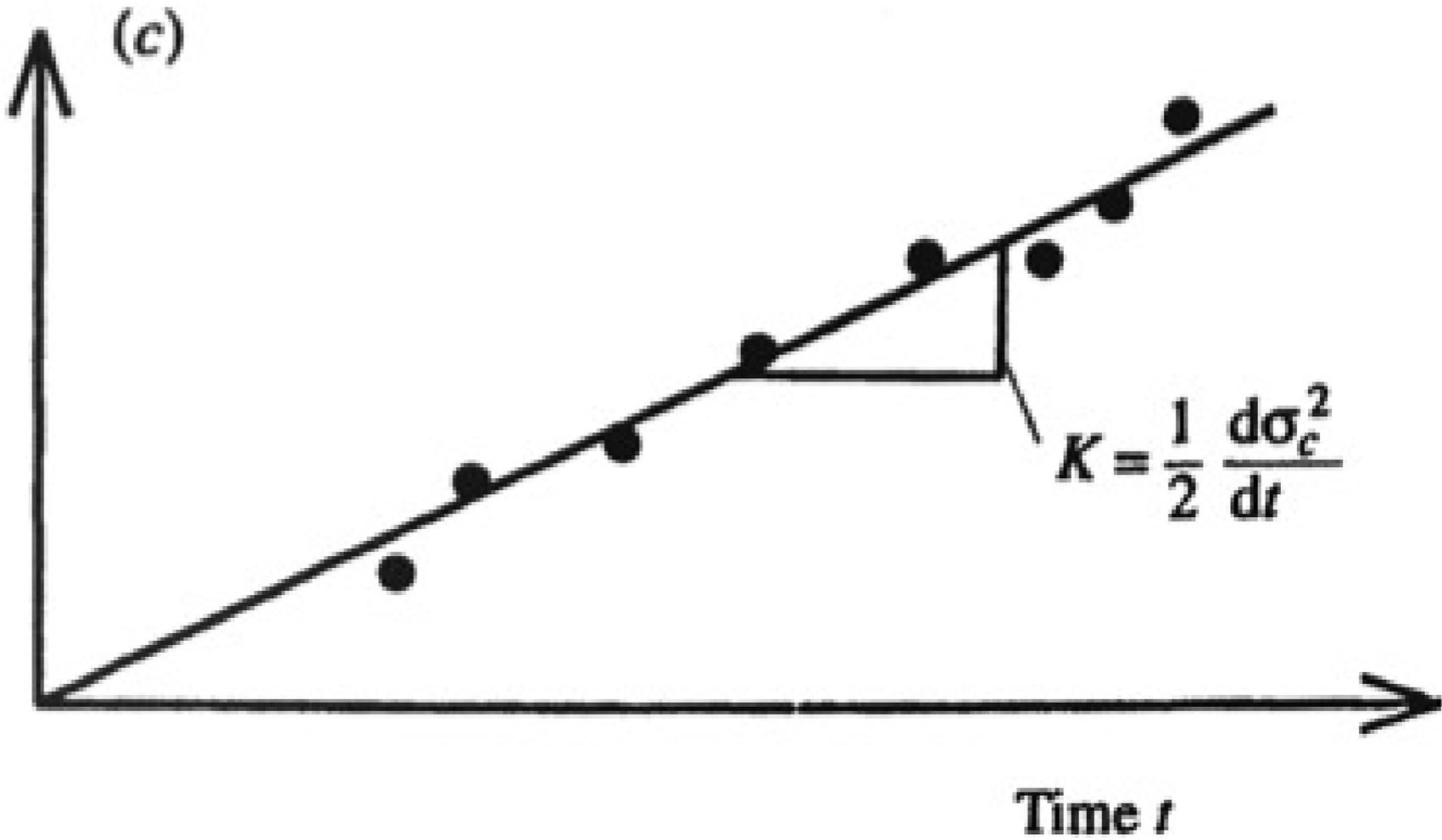
que $|\overline{\Delta B}|$



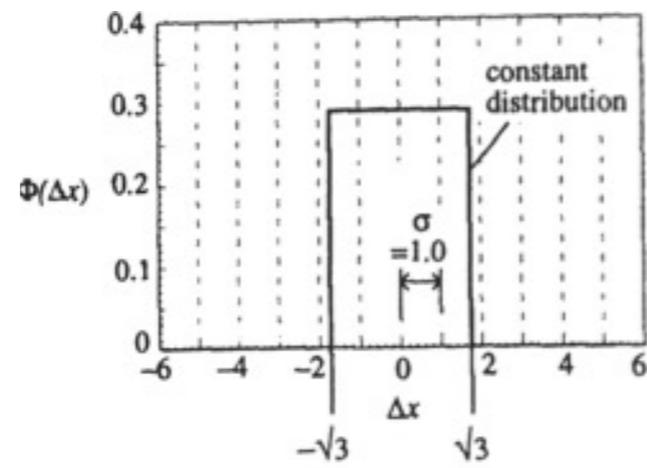
Fickian Process



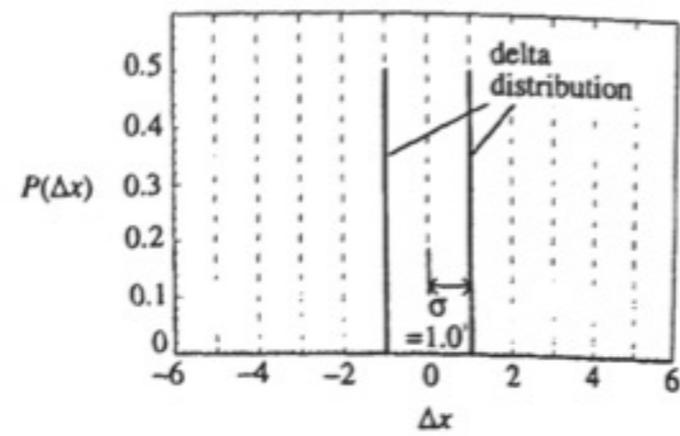
σ_c^2



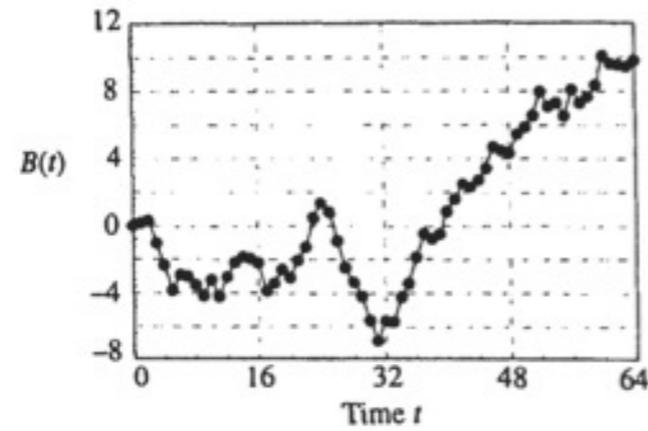
Onde K é o coeficiente de difusão



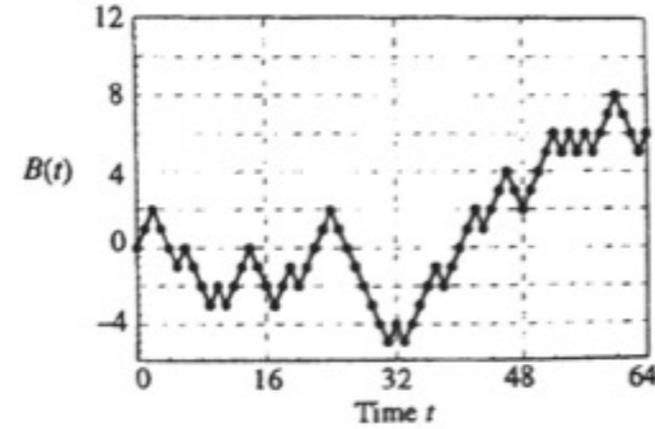
(a) Constant p.d.f.
Unit standard deviation



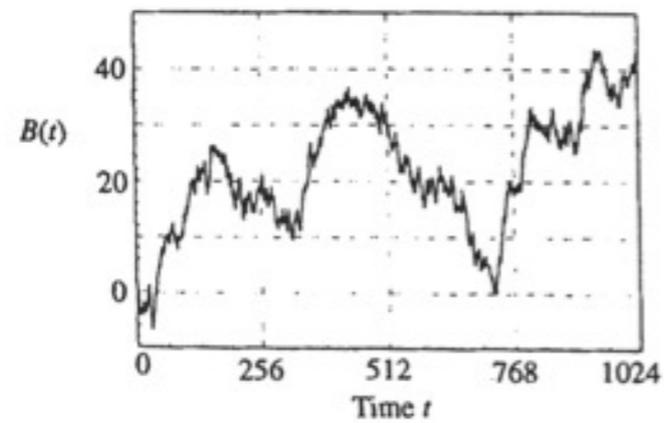
Delta probability distribution
Unit standard deviation



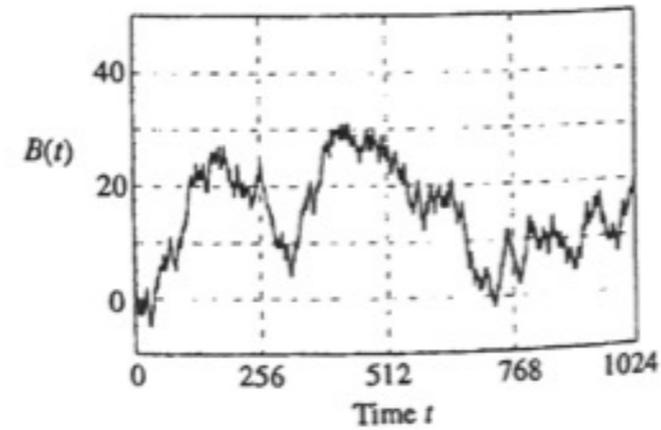
(b) First 64 steps using the constant
p.d.f. above



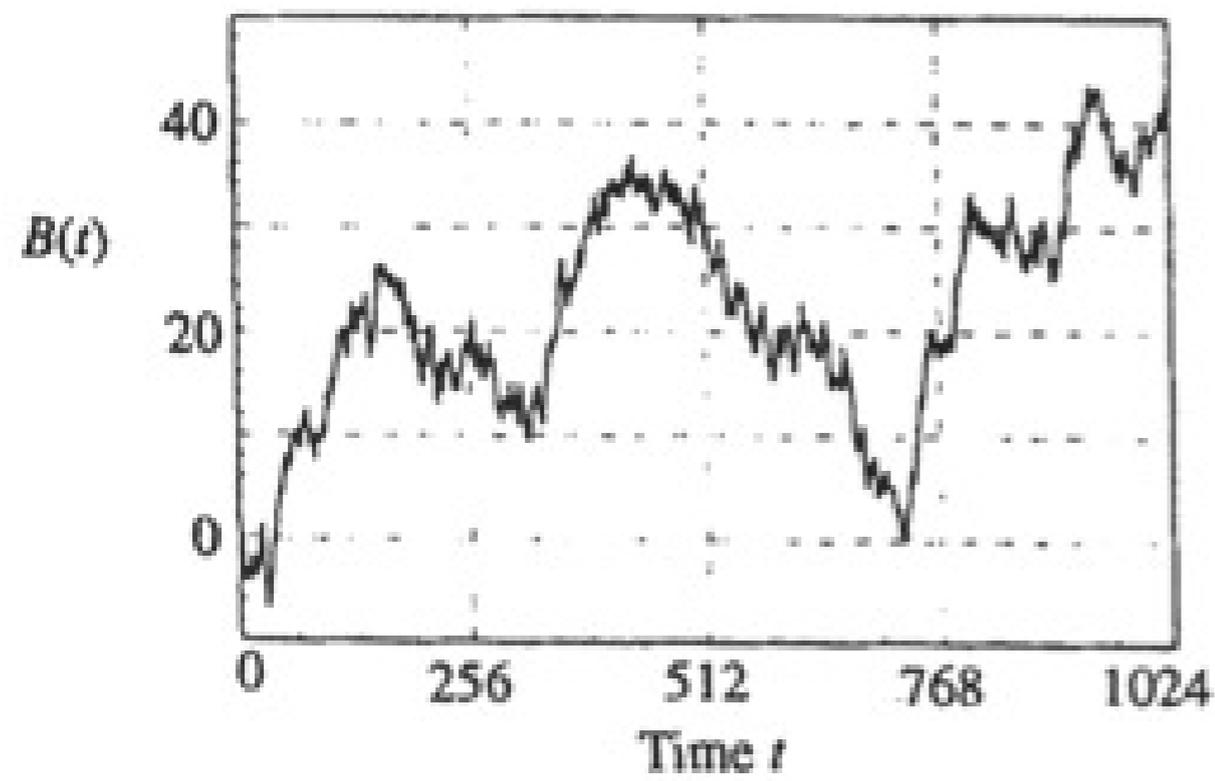
First 64 steps of length ± 1 , taken from
the delta probability distribution above



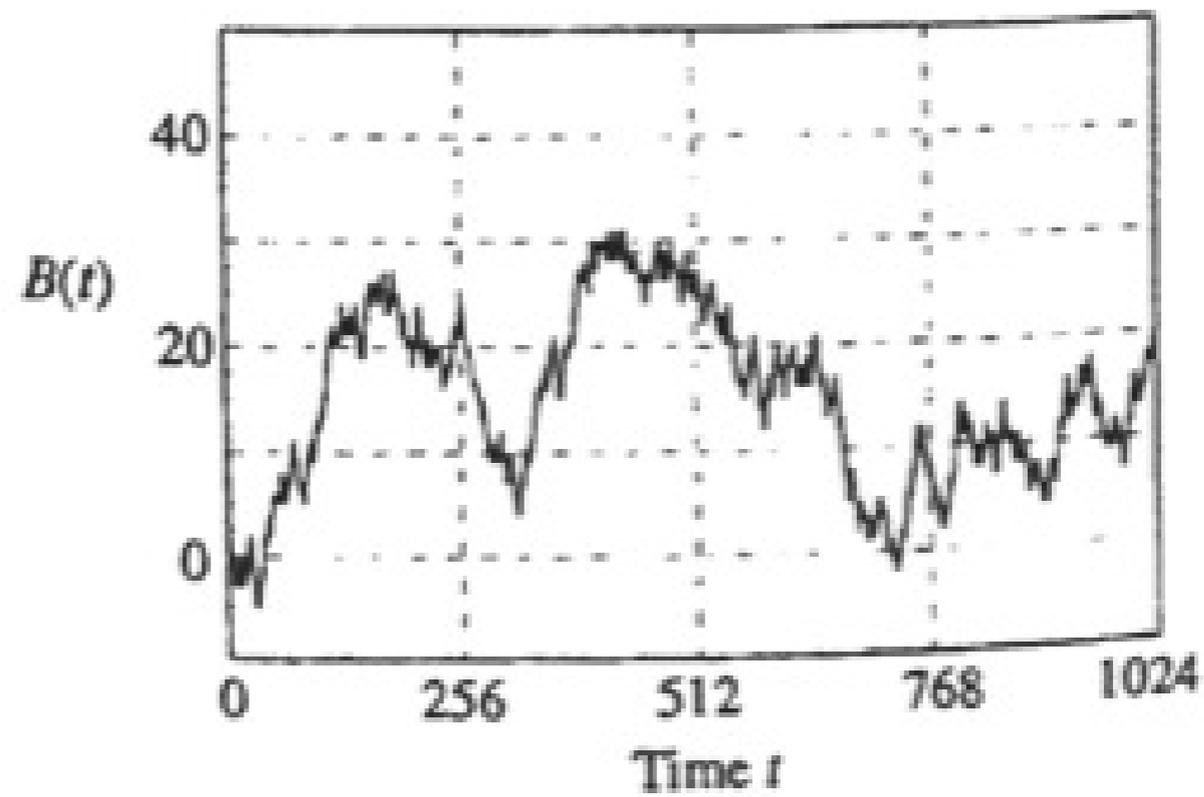
(c) First 1024 steps (constant p.d.f.)



First 1024 steps (delta distribution)



(c) First 1024 steps (constant p.d.f.)

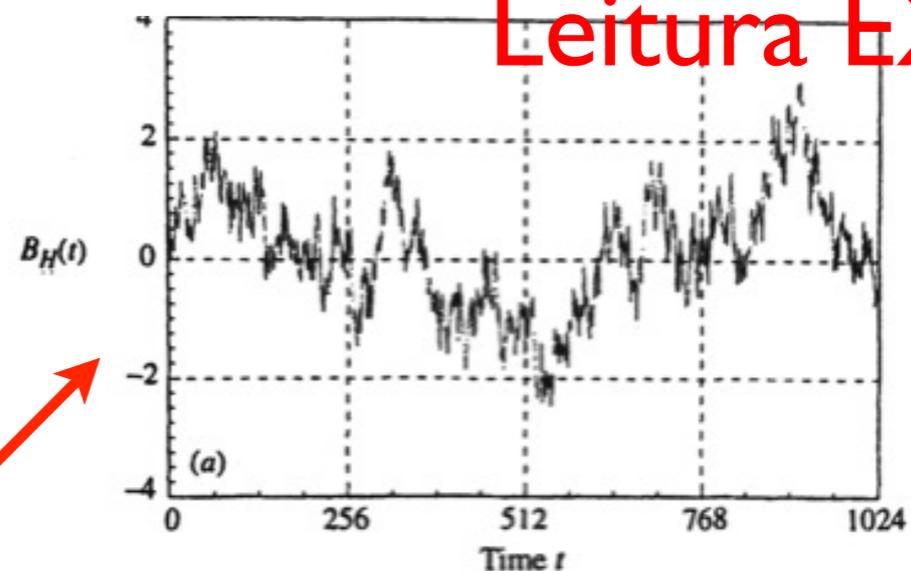


First 1024 steps (delta distribution)

Trajectoria Browniana Fracionada

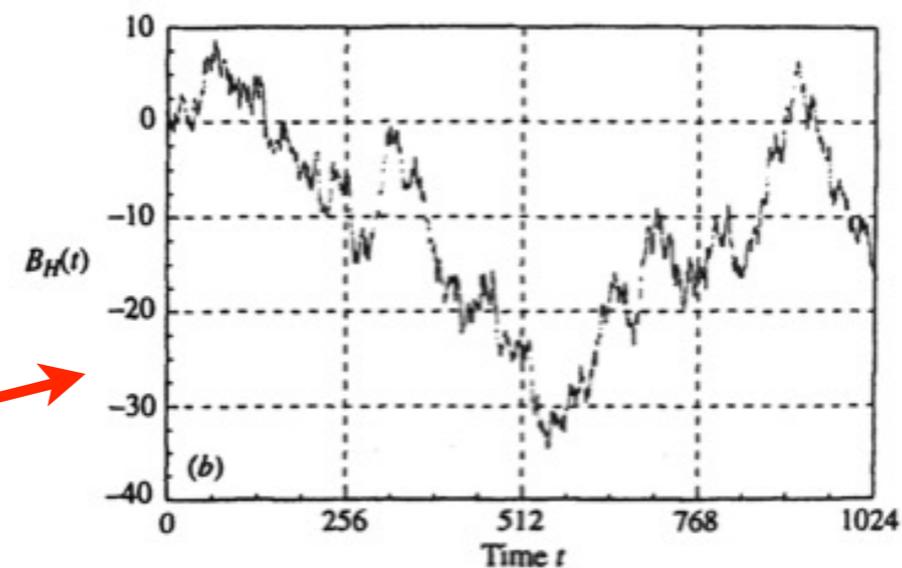
1. Movimento Browniano é uma classe especial de uma familia maior conhecida por “Movimento Browniano Fracionado (fBms)”
2. fBms tem expoente de Hurst no intervalo $0 < H < 1$
3. $H = 1/2$: movimento Browniano (passeio aleatório), i.e. um processo aleatório sem memória longa
4. Valores diferentes de $1/2$ são indicativos de longa memória e de que os dados **não** são independentes.
5. Valores entre $1/2$ e 1 indicam dependência longa positiva: séries com persistência e *trend-reinforcing*
6. Valores positivos menores do que $1/2$ indicam dependência longa negativa: tendências passadas tendem a se reverter no futuro (anti-persistência)

Denotaremos fBm por $B_H(t)$ onde o subscrito H indicara o expoente de Hurst

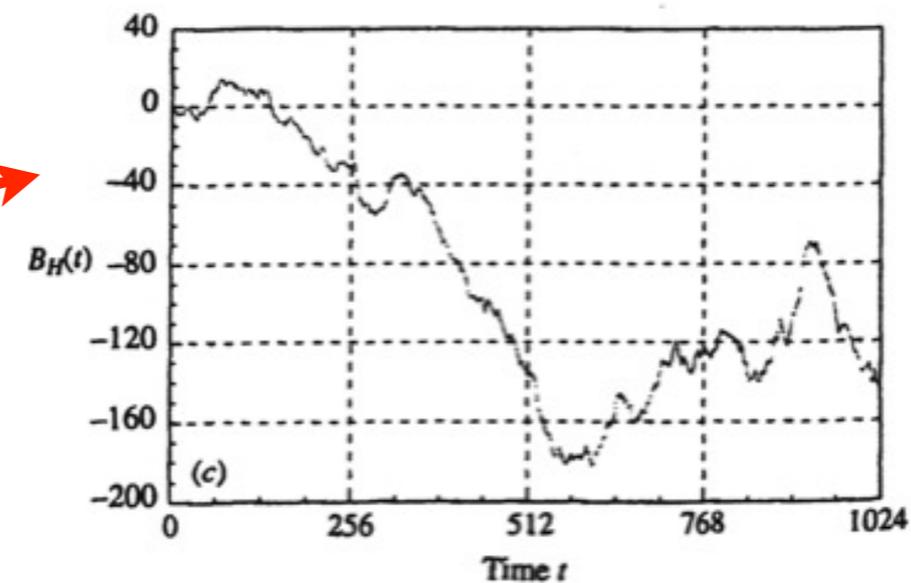


$H = 0.2$ (antipersistente)

$H = 0.5$ (Neutro)



$H = 0.8$ (persistente)

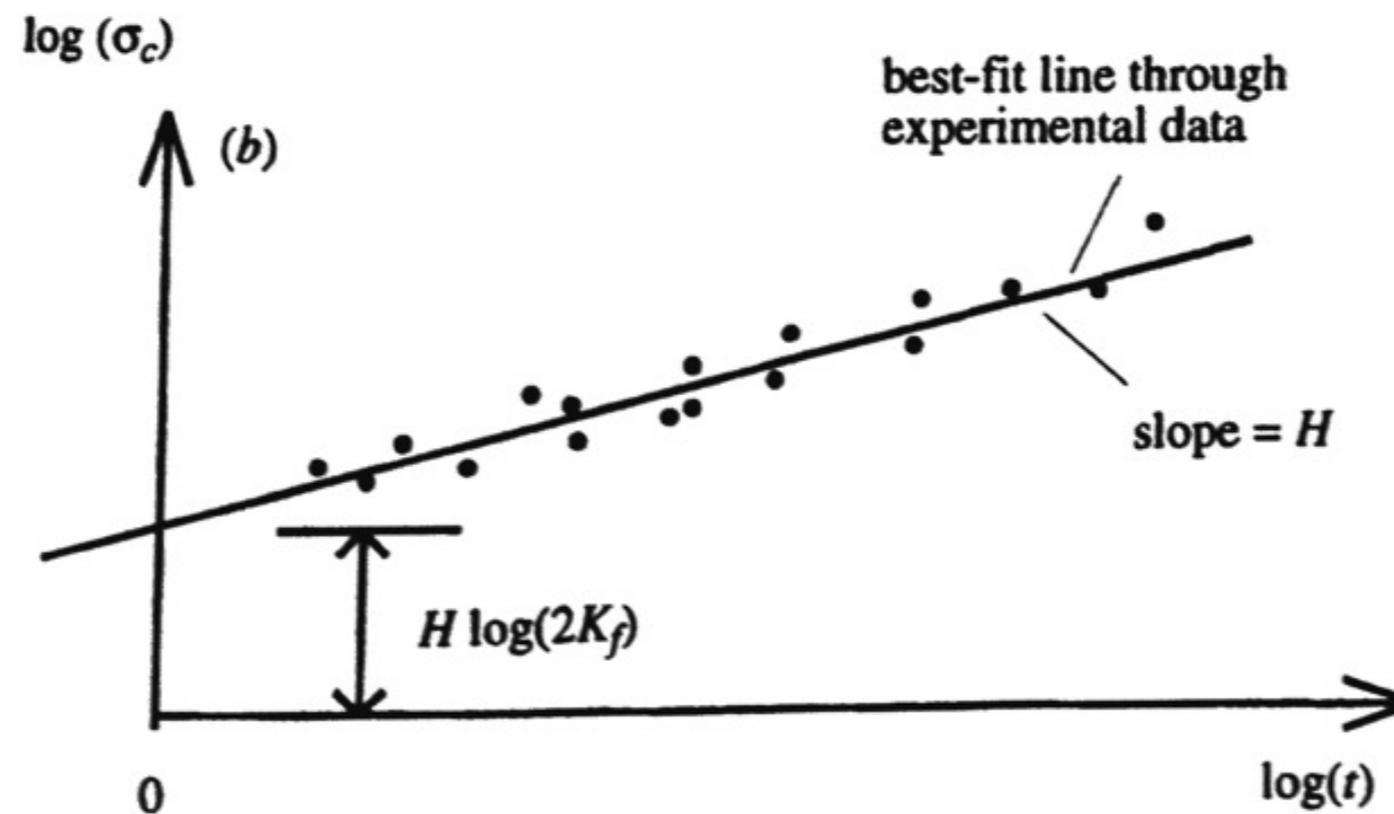
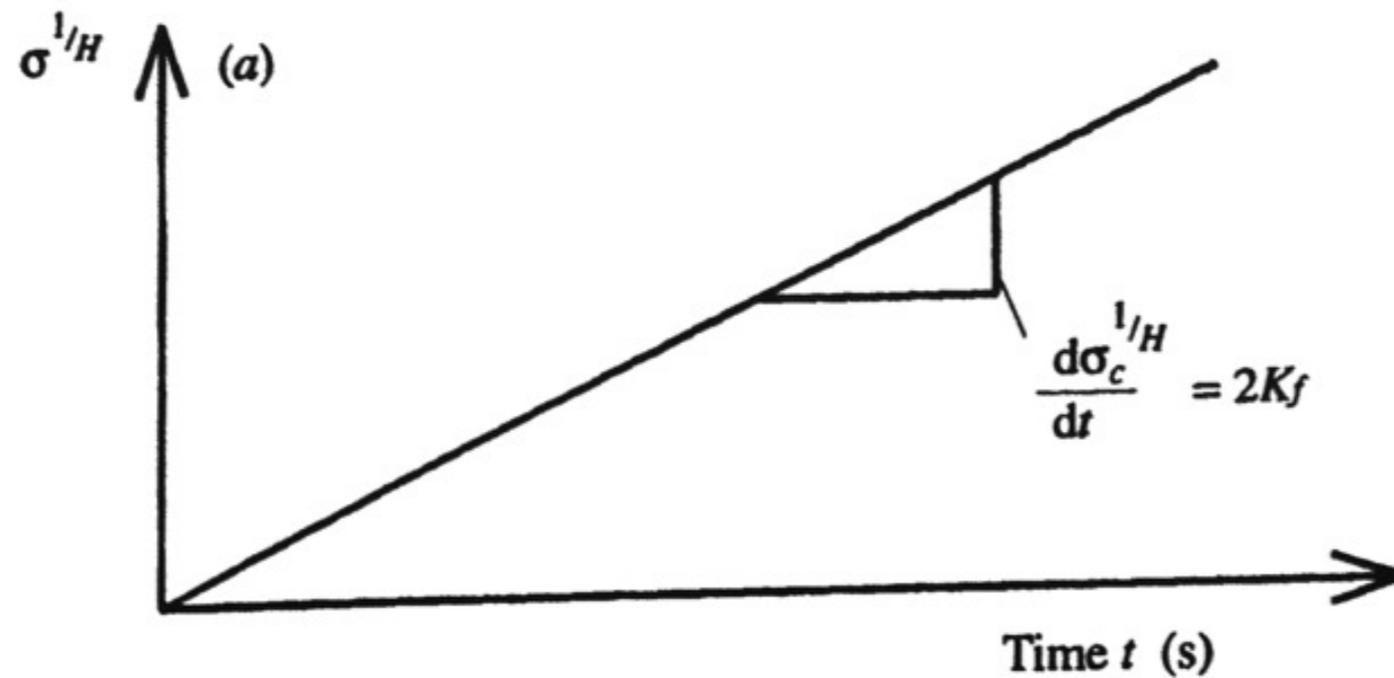


1. fBms são processos auto-afim
2. É necessário dois fatores de escalonamento independente para cada um dos eixos (t e $B_H(t)$)
3. Escalando t por um fator A requer escalar $B_H(t)$ por A^H
4. $t \rightarrow At$ enquanto $B_H(t) \rightarrow A^H B_H(t)$
5. Isso implica: $\langle |B_H| \rangle \propto T_S^H$
6. Ou seja, o desvio padrão: $\sigma_c \propto T_S^H$
7. O Coeficiente de Difusão Fractal K_f é dado por:

$$K_f = \frac{1}{2} \frac{\sigma_c^{1/H}}{t}$$

fBm exhibe difusão anômala, ou não-Fickian
quando $H \neq 1/2$

Coeficiente de Difusão Fractal

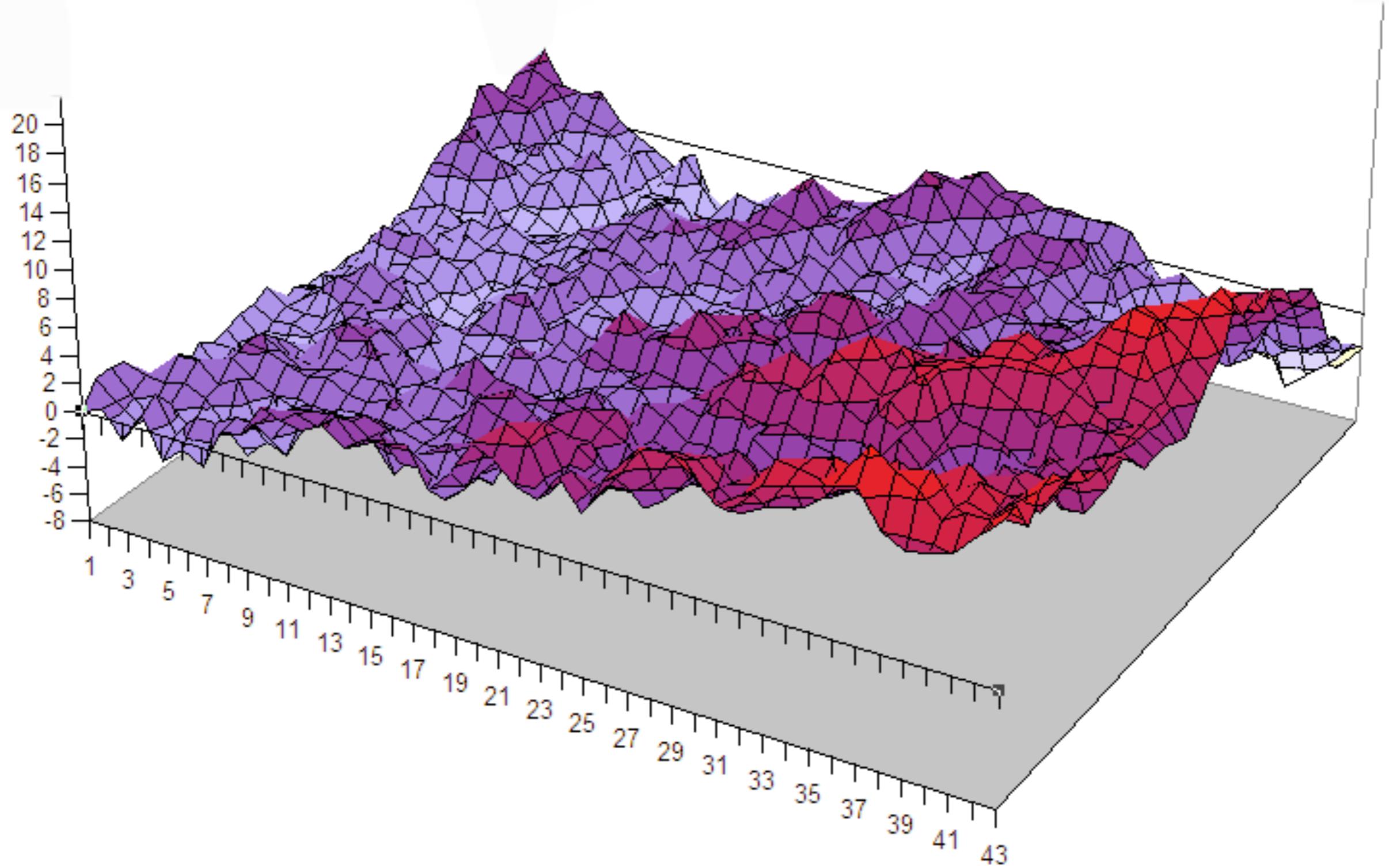


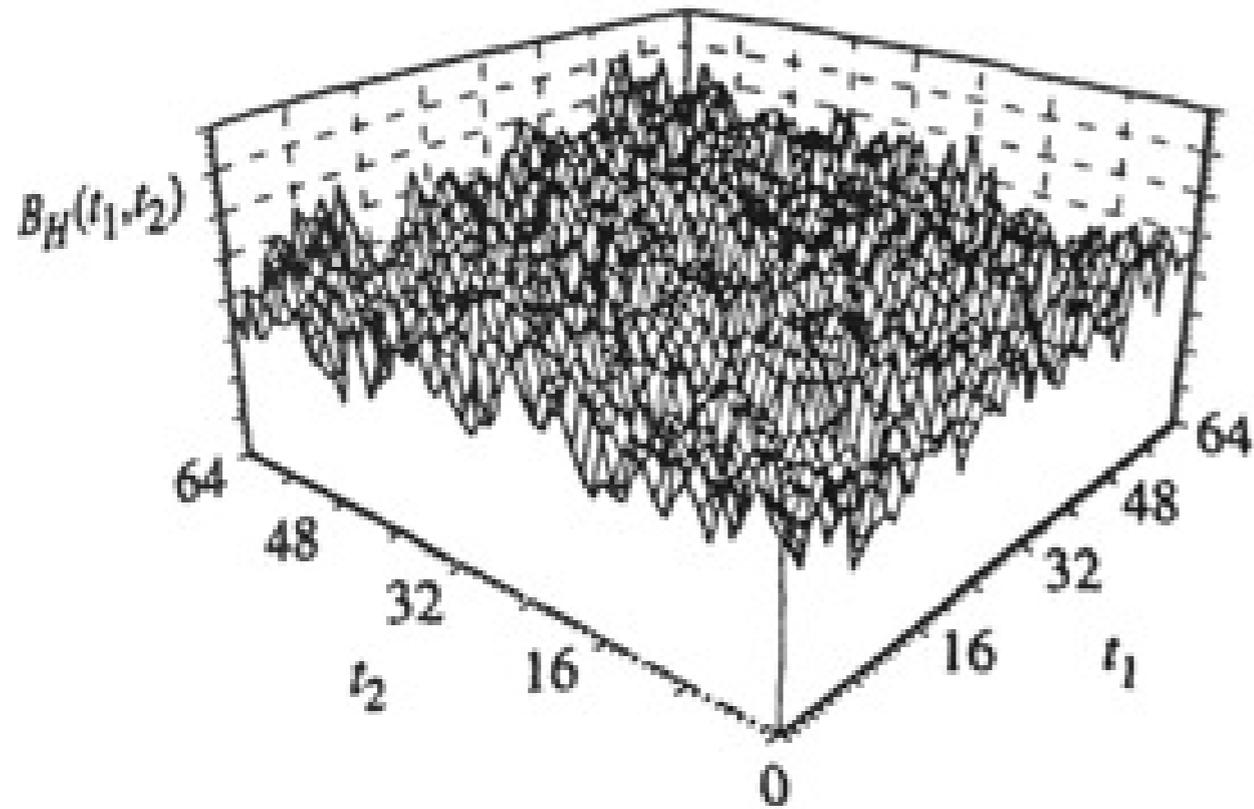
Superfície Browniana Fracionada

1. fBm é uma função de mais de um t , $B_H(t_1, t_2, t_3, \dots, t_N)$ (não devemos pensar t como tempo)
2. Os incrementos $\Delta B_H = B_H(t_1, t_2, t_3, \dots, t_N) - B_H(t_1', t_2', t_3', \dots, t_N')$ são tipo Gaussiana com média zero
3. O desvio padrão desses incrementos, σ_B , são diretamente relacionados com a separação entre esses pontos, T_S

$$\sigma_B \propto T_S^H \quad \text{Onde} \quad T_S = \sqrt{\sum_{i=1}^N (t_i - t'_i)^2}$$

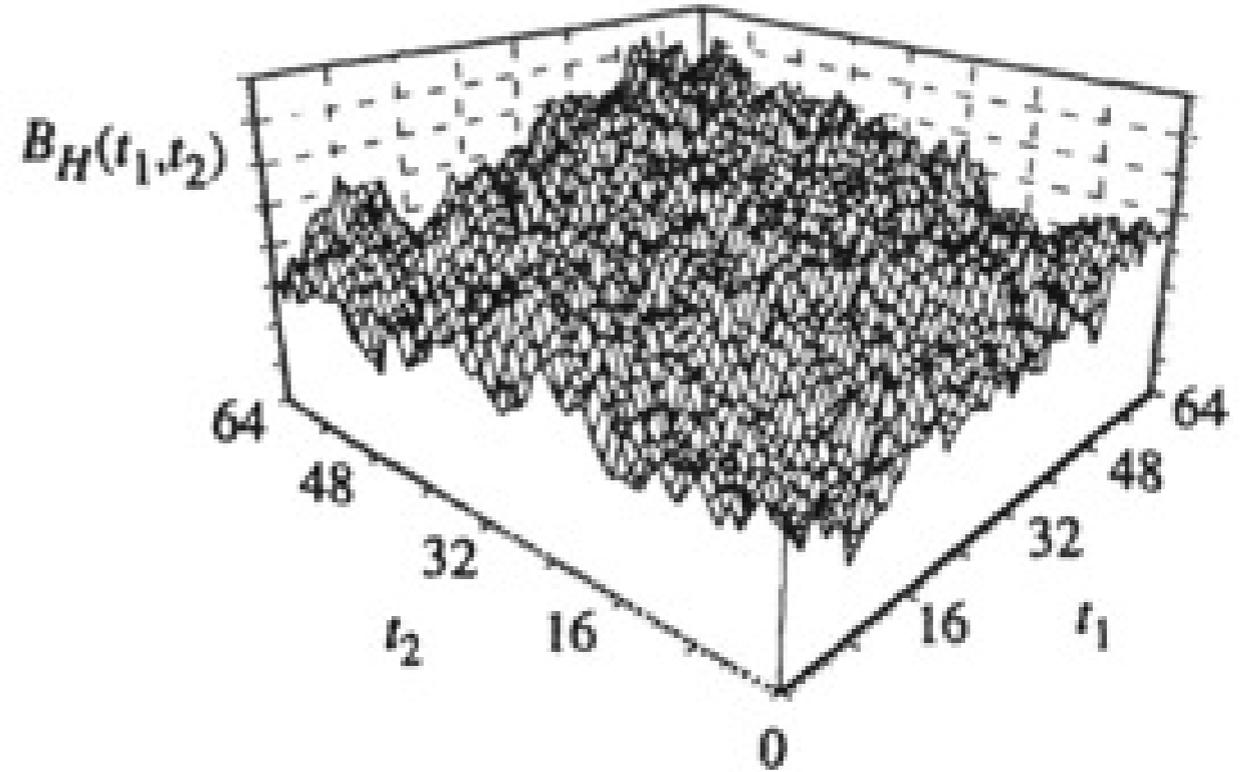
Leitura EXTRA





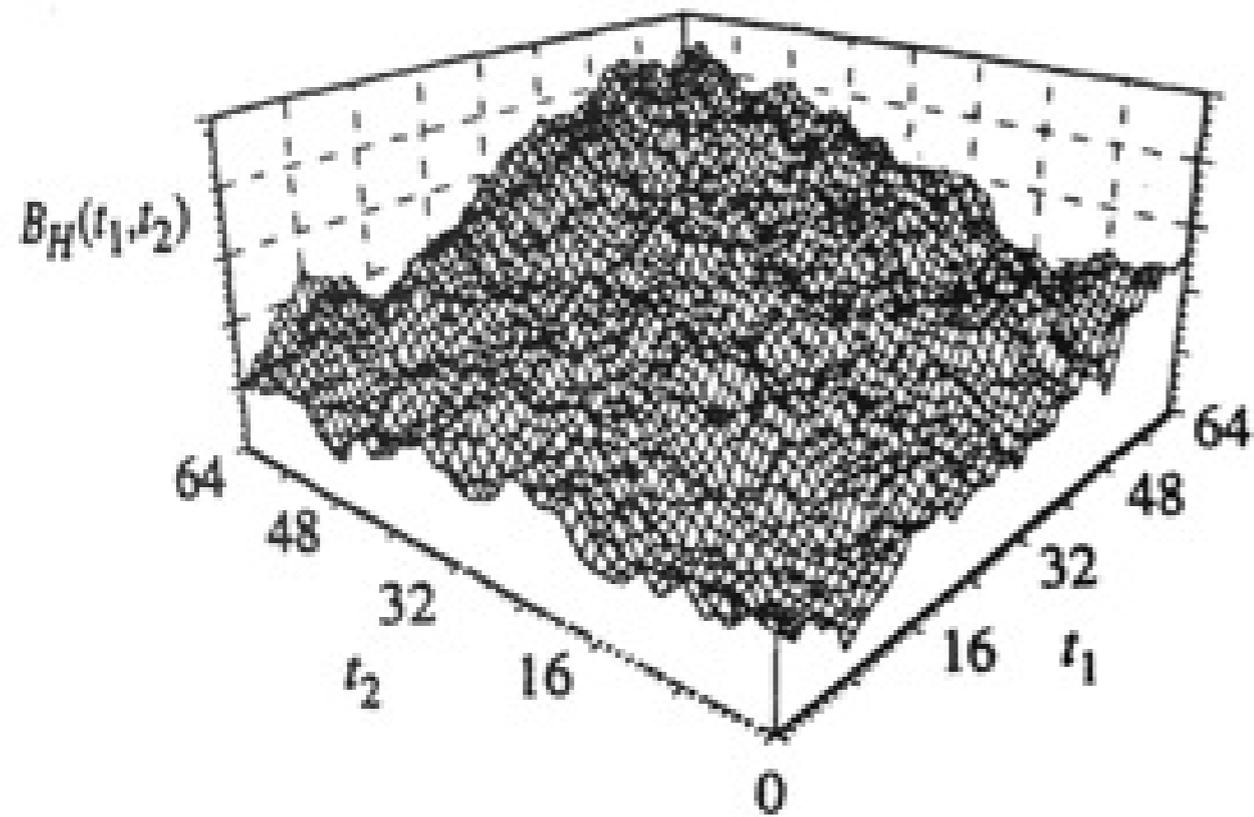
(a)

$$H = 0.2$$



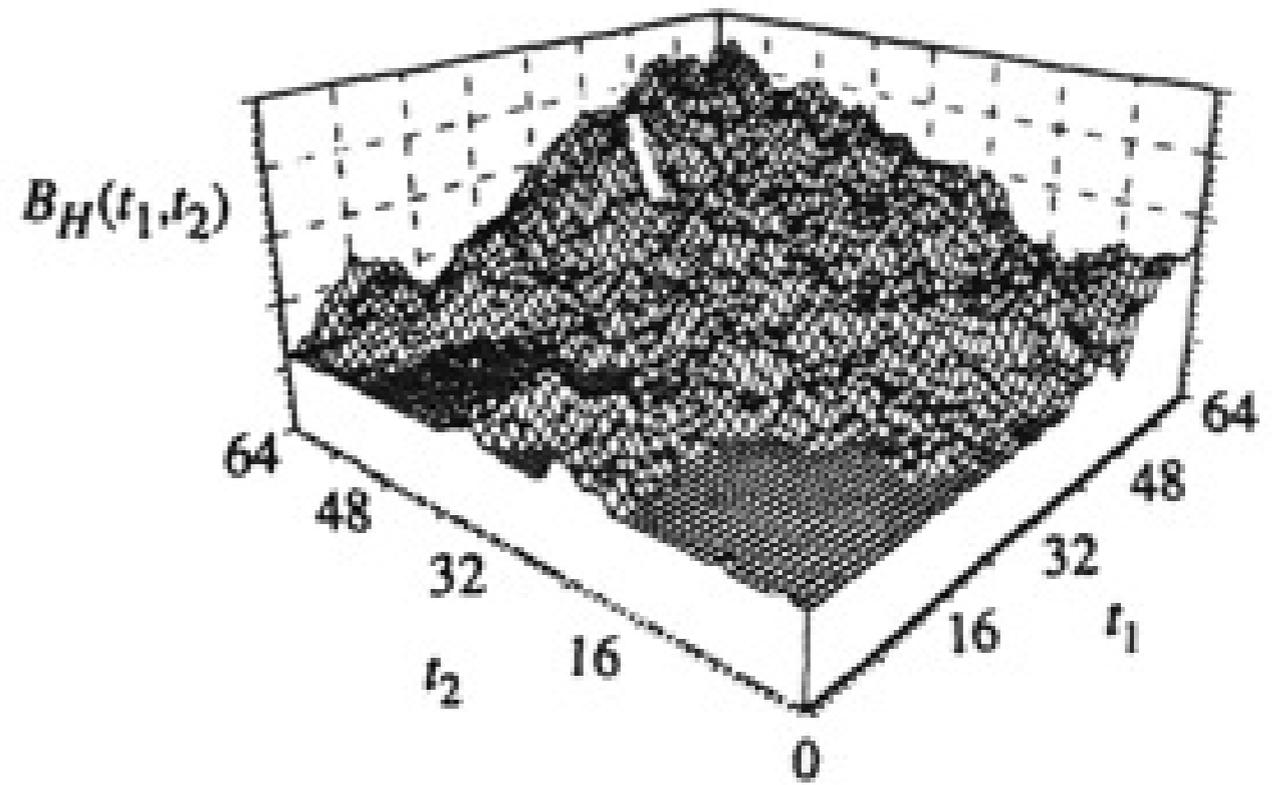
(b)

$$H = \frac{1}{2}$$



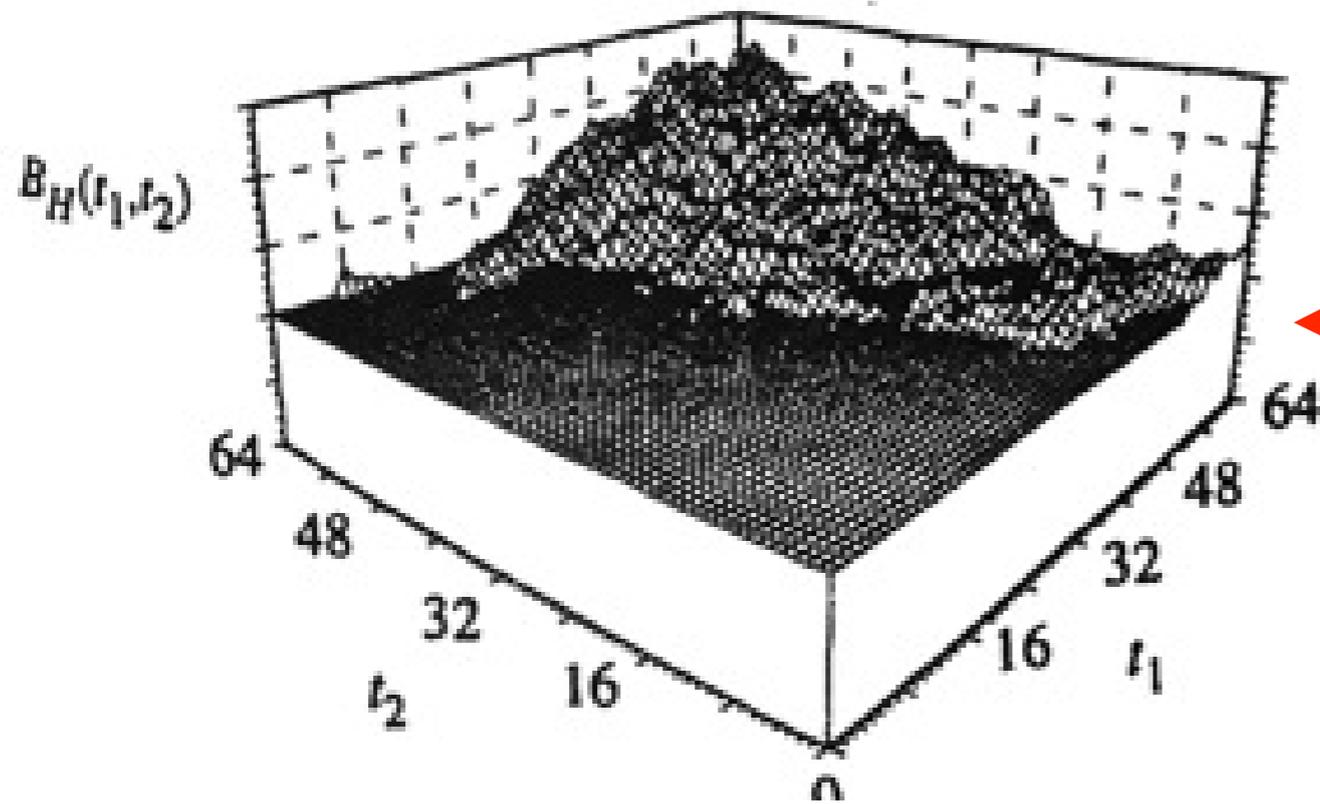
(c)

$H = 0.8$

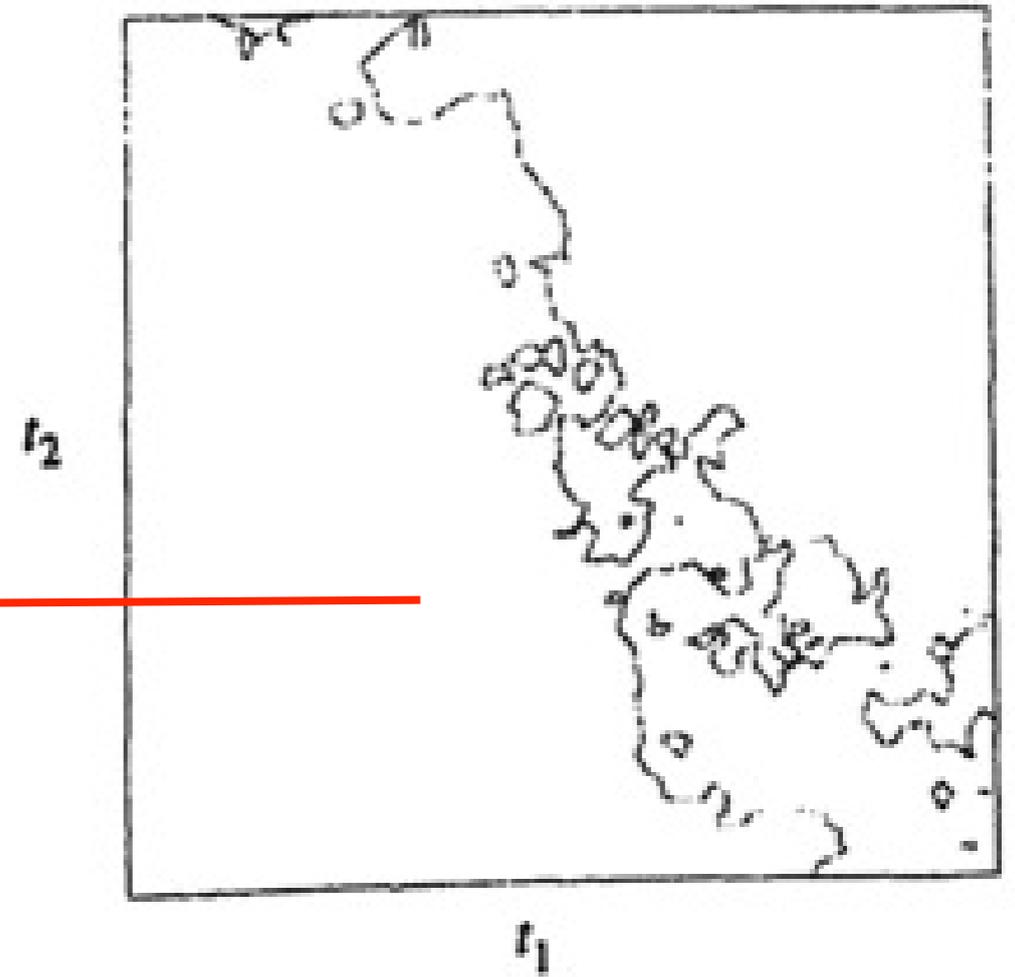


(d)

$H = 0.8$ (com oceano, mare baixa)



$H = 0.8$ (com oceano, mare alta)



$H = 0.8$ (contorno da costa)