

# Prática 6: CIRCUITO RLC, TRANSIENTES e RESSONÂNCIA

## Objetivos

Analisar o comportamento de circuitos RL, LC e RLC e analogias eletro-mecânicas. Vamos investigar o efeito da ressonância do circuito RLC no regime de oscilação forçada (sob ação de uma tensão harmônica) e no regime de oscilação livre (transiente elétrico).

## Introdução

### Circuito RL

As Fig. 6-1 e 6-2, abaixo, mostram um circuito contendo um resistor (R) e um indutor (L) em série. A regra de Kirchhoff aplicada ao circuito leva a:

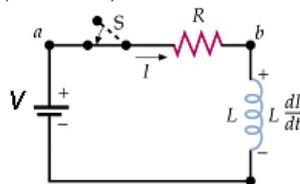
$$V = L \frac{dI}{dt} + RI$$

Cuja solução é:

$$I = (V_0 / R) [1 - \exp(-t / \tau)] \quad (2)$$

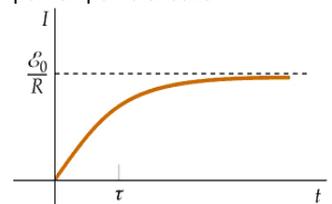
onde  $\tau = L/R$ .

(1) Figura 6-1 - Fonte ligada a uma chave, um resistor e uma bobina (circuito RL).



Fonte: Elaborada pelo Compilador

Figura 6-2 - Gráfico da corrente por tempo no circuito

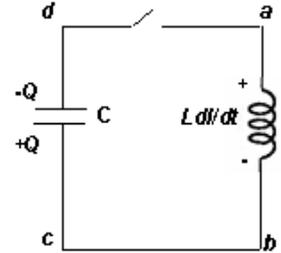


Fonte: Elaborada pelo Compilador

## Circuito LC

A Fig. 6-3, ao lado, mostra um capacitor ligado a um indutor e a uma chave. Vamos supor inicialmente que a chave esteja aberta e que o capacitor tenha uma carga inicial  $Q_0$ . Em  $t=0$  a chave é fechada e a carga flui através do indutor. Para simplificar nossa análise, vamos desconsiderar qualquer resistência no circuito (isto será feito a seguir).

Figura 6-3 - Capacitor ligado a uma chave e um indutor (circuito LC).



Fonte: Elaborada pelo Compilador

Escolheremos arbitrariamente a direção da corrente no circuito de modo que quando a carga na placa de baixo do capacitor for mais  $+Q$  a corrente é:  $I=dQ/dt$ . Com esta escolha a corrente será negativa logo depois da chave ser fechada ( $t=0$ ).

Com a escolha do sentido positivo da corrente, a queda de potencial no indutor, de  $a$  até  $b$ , é  $LdI/dt$ . No capacitor, de  $c$  até  $d$ , há uma queda de potencial  $Q/C$ . Então, a regra

de Kirchhoff aplicada ao circuito resulta em:  $L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$ . Como,  $I=dQ/dt$  temos:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_o^2 Q = 0 \quad (3)$$

com 
$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4)$$

Notem que esta equação tem a mesma forma da equação que descreve o sistema massa-

mola (oscilador harmônico):  $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ . Sabemos que este sistema oscila na sua

frequência angular natural  $\omega^2=k/m$ , ou seja,  $x(t) = A \cos(\omega_o t + \delta)$ . Analogamente, a

solução da Eq. (3.b) pode ser escrita como:

$$Q(t) = A \cos(\omega t - \delta) \quad (5)$$

Uma vez que  $I=dQ/dt$  (Fig.6-4), obtemos então:

$$I(t) = -\omega A \cdot \text{sen}(\omega t - \delta) \quad (6)$$

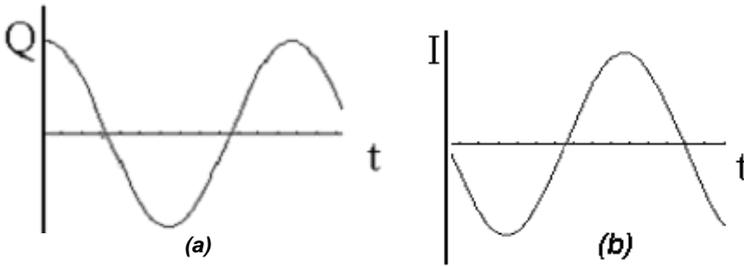


Figura 6-4 - Comportamento típico de  $Q(t)$  e  $I(t)$  em um circuito LC

Fonte: Elaborada pelo Compilador

## Circuito RLC

Analogamente ao caso do atrito na mecânica, o efeito do resistor está sempre presente, embora possa ser pequeno em alguns experimentos. Consideraremos a seguir um circuito RLC em série alimentado por uma fonte de tensão  $V(t)$  (vide Fig.6-5).

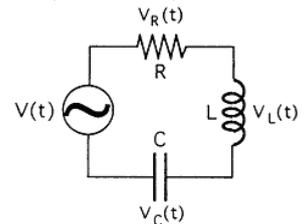
A lei de Kirchhoff aplicada a este circuito fornece a

$$\text{equação: } V(t) - L \frac{dI}{dt} - RI - \frac{Q}{C} = 0$$

onde  $I = dQ/dt$ , logo:

$$V(t) = L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \quad (6)$$

Figura 6-5 - Fonte de onda senoidal ligada a um resistor, uma bobina e um capacitor (circuito RLC).



Fonte: Elaborada pelo Compilador

Consideremos inicialmente o caso em que  $V(t)=V_0=0$  (constante no tempo) com mesma condição inicial discutida no caso LC: em  $t=0$ ,  $Q(0)=Q_0$ ,  $V.L(t)=0$ . Neste caso temos:

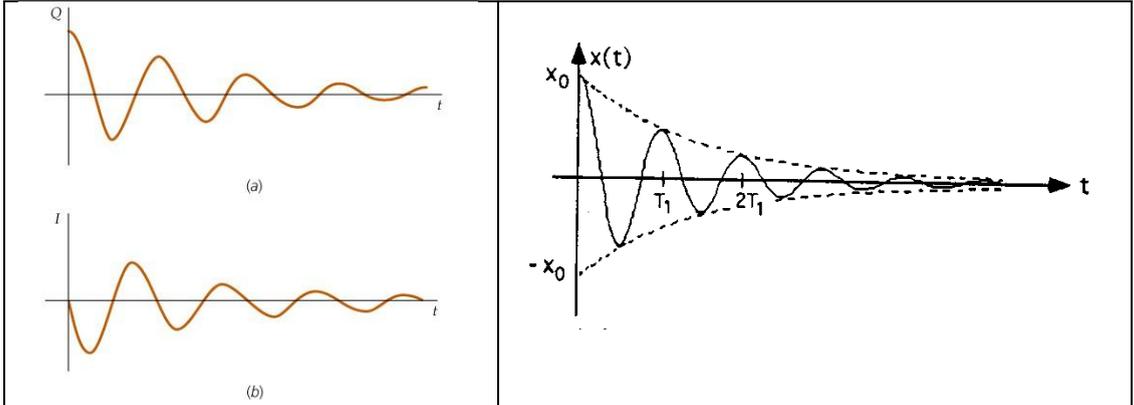
$$Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t - \delta) \quad (7)$$

$$\text{com } \gamma=R/2L \quad \text{e} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}$$

onde  $\omega_0$  é dado pela Eq.(4). Ou seja,  $Q(t)$  pode ser considerado um cosseno cuja amplitude decai exponencialmente. Quando  $R \rightarrow 0$  então  $\gamma \rightarrow 0$  e  $\omega_1 \rightarrow \omega_0$ , o sistema se comporta como um circuito LC puro. Tal como comentado no caso do circuito LC, o valor de  $\delta$  depende das condições iniciais do problema. No caso em que o capacitor está inicialmente carregado e a chave é fechada em  $t=0$ , temos  $\delta=0$ , tal como no caso LC. Este comportamento é análogo ao oscilador amortecido por um meio viscoso estudado no Lab.

Física Geral II. Em particular a condição inicial considerada neste exemplo é análoga ao caso em que em  $t=0$ , o sistema massa-mola tem amplitude máxima ( $x_0$ ) e velocidade nula (Fig.6-6), abaixo, onde a linha contínua corresponde à função  $x(t)=x_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t)$  e a envoltória tracejada corresponde ao decaimento exponencial  $e^{-\gamma t}$ .

Figura 6-6 - Comparação do sinal transiente de um circuito RLC:(a) carga no capacitor(Q) e (b) corrente (I) com um sistema massa-mola.



Fonte: Elaborada pelo Compilador

A Fig.6-6 ilustra um exemplo de oscilação **sub-amortecida** onde  $\omega_0 > \gamma$ . Devemos notar que com o aumento de  $\gamma$ ,  $\omega_1$  diminui e a amplitude de oscilação decai mais rápido. Ou seja, podemos dizer que o tempo característico  $\tau=1/\gamma$  diminui. Além disso, no caso  $\omega_0 < \gamma$ ,  $\omega_1^2 < 0$ , ou seja,  $\omega_1$  torna-se um valor imaginário. Este caso é chamado de regime **super-amortecido** e não há oscilação. O caso  $\omega_0 = \gamma$  é chamado de amortecimento **crítico**.

No Lab. de Fís.II estudamos o sistema massa mola no caso de oscilações livres, amortecidas e forçadas. No caso de oscilação forçada o sistema estava sujeito a uma força externa harmônica (senoidal ou cossenoidal), do tipo  $F_{ex}=F_o \cdot \text{sen}(\omega t)$ . Analogamente, podemos estudar oscilações forçadas no circuito RLC usando uma fonte de tensão harmônica:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_o \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (8)$$

No estado estacionário, a solução da Eq.8 é dada por  $Q(t) = Q_o \cdot \text{sen}(\omega t - \delta)$  e conseqüentemente  $I(t) = I_o \cdot \text{cos}(\omega t - \delta)$  onde  $I_o = \omega \cdot Q_o$  com:

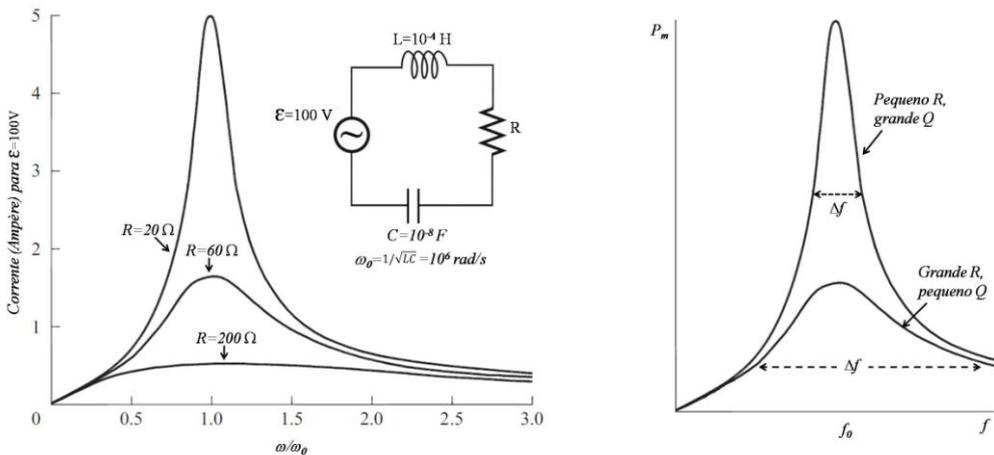
$$\omega Q_0 = I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - L\omega\right)^2}} \quad (9)$$

$$(tg\delta)^{-1} = \left(\frac{1}{\omega C} - L\omega\right) / R \quad (10)$$

A dependência com a frequência é ilustrada na Fig.6-7 abaixo para três valores distintos de R. Nota-se que a corrente é máxima na **frequência de ressonância**,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  (Eq.4).

Neste caso ( $\omega = \omega_0$ ) pode-se mostrar que  $I_0$  é máxima com valor  $V_0/R$ .

Figura 6-7 - (a) Gráfico da corrente por frequência (b) Gráfico da potência média por frequência do gerador



Fonte: Elaborada pelo Compilador

A Fig.6-7(b) mostra a potência média fornecida pelo gerador ao circuito, em função da frequência do gerador, para dois valores diferentes de R, num circuito RLC em série. A potência média é máxima quando a frequência do gerador for igual à frequência de ressonância.

Quando a resistência for pequena (Fig.6-7(a)), a curva de ressonância é estreita; quando for grande, a curva é larga. Estas curvas podem ser caracterizadas pela largura de ressonância  $\Delta f$ , onde  $\Delta f$  também é chamado de  $\frac{1}{2}$  largura.

Esta largura é a diferença das frequências em dois pontos da curva que correspondem a potência igual à metade da potencia máxima. Podemos definir o fator Q de um circuito RLC como:

$$Q = \frac{2\pi\omega}{|\Delta E|} = \omega_0 \frac{L}{R} \quad (12)$$

Quando a ressonância for razoavelmente aguda (isto é, quando for maior que cerca de 2 ou de 3), o fator Q pode ser aproximado por  $Q=f_0/\Delta f$ . Podemos assim, fazer uma analogia entre o circuito elétrico e um oscilador mecânico (sistema massa-mola):

**Obs:** *Q é uma constante adimensional que não tem nenhuma relação com a carga do capacitor, que também denotamos com a letra Q.*

### **Parâmetros mecânicos**

deslocamento, x

velocidade,  $v = \frac{dx}{dt}$

aceleração,  $a = d^2x/dt^2$

massa, m

constante elástica da mola, k

coeficiente de atrito, b

força de atrito,  $-b\left(\frac{dx}{dt}\right)$

frequência de ressonância,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

energia cinética,  $\frac{1}{2}mv^2$

energia potencial,  $\frac{1}{2}kx^2$

### **Parâmetros elétricos**

carga, Q

corrente,  $i = \frac{dQ}{dt}$

variação da corrente:  $\frac{di}{dt}$

indutância, L

inverso da capacitância,  $\frac{1}{C}$

resistência, R

queda de tensão, Ri

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

energia potencial,  $\frac{1}{2}Li^2$

energia potencial,  $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}\right)q^2$

# Experimentos

## I. Transiente do circuito RL

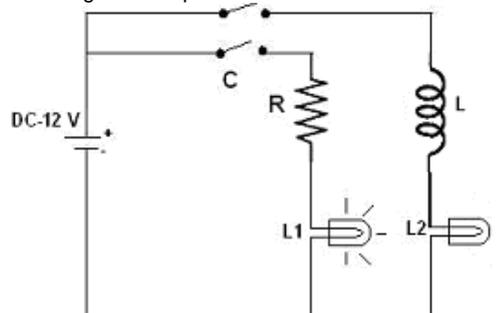
O indutor oferece “*resistência*” a *mudanças* no valor da corrente. Para esclarecer melhor, consideremos um indutor ideal, que é constituído de fios cuja resistência ôhmica é muito baixa. Neste caso, se a corrente for constante, a diferença de potencial nos terminais do indutor será praticamente nula e podemos dizer que o **indutor ideal não oferece resistência à passagem da corrente constante**. Entretanto, se obrigarmos que haja uma variação no valor da corrente (por exemplo, ao ligar ou interromper o circuito) imediatamente irá aparecer uma diferença de potencial nos terminais do indutor,  $V_L = -L \cdot di/dt$ .

### Demonstração

Observem o circuito da Fig.6-8, no qual  $L_1$  e  $L_2$  representam duas lâmpadas de lanterna de automóvel (12V), R uma resistência ( $R \sim 14\Omega$ ) e L um indutor de 1000 espiras com núcleo de ferro fechado.

**A.1.** As lâmpadas  $L_1$  e  $L_2$  acendem simultaneamente?

Figura 6-8 -  $L_1$  ligada em série a um resistor e uma chave e  $L_2$  em série a uma bobina e uma chave, ambas ligadas em paralelo entre si e a uma fonte.



Fonte: Elaborada pelo Compilador

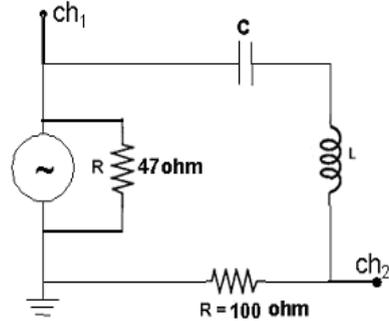
**A.2.** Retirem o núcleo de ferro do indutor repitam o experimento. Isto afeta o tempo de resposta de  $L_2$ ? Discutam.

Obs: vide Fig. 2 sobre o circuito RL

## II. Circuito RLC e ressonância

**A. Experimento:** Montem o circuito RLC da Fig.6-9, com gerador de tensão alternada de frequência variável, indutor de 1000 espiras ( $L \sim 47\text{mH}$ ) e capacitor  $C=0,1\mu\text{F}$ , tal como ilustrado ao lado, seguindo os seguintes passos:

Figura 6-9 - Circuito RLC conectado a um gerador de tensão alternada que está em paralelo a um resistor. Circuito com saída para dois canais do osciloscópio



Fonte: Elaborada pelo Compilador

**a)** Coloquem o “terra” (pino preto, malha) do cabo coaxial, entre  $R=47\Omega$  e  $R=100\Omega$ , como na Fig.6-9; não é preciso ligar o terra do outro cabo, pois são comuns, se preferirem ligar, os coloquem juntos neste ponto.

**Dica:** a placa de montagem tem um “ramo” (com 8 bornes), próprio para várias ligações.

**Obs.:**

- Notem que neste experimento estamos usando o multímetro digital **Políterm POL-45** na função de frequencímetro (escala KHz)
- Um gerador ideal tem resistência interna zero, mas na prática nem sempre é possível obtê-lo. Neste experimento colocamos o resistor de  $47\Omega$  em paralelo com o gerador para diminuir sua resistência interna (tal como feito na prática 4).

**b)** Conectem o pino vermelho do cabo do canal 1 na junção do resistor de  $47\Omega$  com o capacitor de  $0,1\mu\text{F}$ . Conectem o pino vermelho do cabo do canal 2 na junção do resistor de  $100\Omega$  com o indutor L. Conectem, agora, um multímetro digital, ajustado na função de frequência, em paralelo com a fonte.

**Obs.:** É importante assegurar que os dois botões de varredura do osciloscópio estejam na posição horária máxima, pois fora dessa posição não há calibração.

**c)** Liguem o gerador e o osciloscópio e aguardem alguns segundos. Ajustem o osciloscópio através dos três botões rotativos graduados (*volts/div* e *time/div*, *position*), para visualizarem, simultaneamente, na tela os dois canais.

**Atenção:** O canal 1 só será utilizado para observar que o sinal do gerador deve variar somente na ressonância e bem próximo dela.

**d)** Conectem o multímetro digital com a chave na posição em kHz em paralelo ao gerador. Neste caso o multímetro funciona como um frequencímetro, fornecendo a frequência,  $f$  (em kHz), do sinal.



**A.5.** Substitua o resistor  $R=100\Omega$  por  $R=470\Omega$ . Repita o item **A.1** para encontrar novamente o valor da frequência de ressonância do circuito. Compare este resultado com o obtido na parte **A.1**. Houve alteração no valor da frequência de ressonância,  $f_0$ ?

**A.6.** Coloquem agora um núcleo de ferro dentro do indutor e encontrem o valor de  $f_0$ . Houve variação em relação ao resultado anterior? Por quê?

**A.7.** Utilizando o resultado do item anterior obtenham o novo valor da indutância da bobina ( $L^*$ ) com a barra de ferro a partir do valor da indutância original (sem o núcleo de ferro).

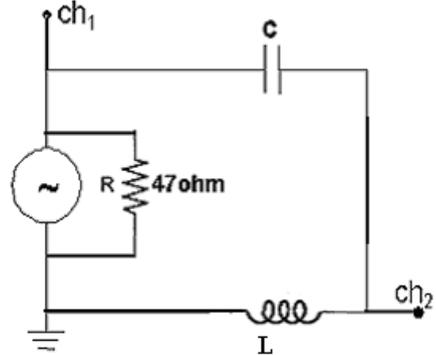
### III. Transiente do circuito RLC

**A. Experimento:** Montem o circuito da Fig.6-10, onde L e C são os mesmos usados no item

**II.** Coloquem o gerador na função de onda quadrada e a frequência 60 Hz.

Figura 6-10 – Circuito LC conectado a um gerador de tensão alternada que está em paralelo a um resistor. Circuito com saída para dois canais do osciloscópio

Conectem o osciloscópio de modo que vocês possam observar o sinal de  $V_L$ . É necessário ajustarem as escalas, *volt/div* e *time/div*, para visualizarem o sinal.



Fonte: Elaborada pelo Compilador

Observem no ch2 o sinal transiente da oscilação amortecida na tela do osciloscópio, o qual

deve ser dado por:  $V_L(t) = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot \cos(\omega_1 t - \delta)$

onde valores de:  $\tau = 2L/R$ ,  $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$  e  $\omega_o = 1/\sqrt{LC}$ .

**A.1.** Determinem o período da oscilação amortecida observado no osciloscópio,  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ , e do tempo de amortecimento  $\tau_{\text{exp}}$ .

**A.2.** Calculem  $f_1 = 1/T_1$ . Este valor é próximo do valor da frequência de ressonância ( $f_o$ ) obtida na parte II? Discutam.

**A.3.** Estimem o valor do tempo de amortecimento  $\tau_{\text{exp}} = 1/\gamma$ .

**Obs.:** O valor de  $\tau$  pode ser estimado observando no osciloscópio o tempo ( $t_{1/2}$  ou  $t_{1/3}$ ) que a envoltória do sinal ( $e^{-\gamma t}$ ) tal como nas práticas anteriores.

**A.4.** Comparem o valor do item **A.3** com o calculado por  $\tau_{\text{calc}}=2L/R$  (Eq.7). Qual o valor de **R** que deve ser usado neste cálculo? Comparem os valores de  $\tau_{\text{calc}}$  e  $\tau_{\text{exp}}$ .

**A.5.** Troquem as posições de L e C no circuito para observarem o comportamento de  $V_C(t)$ . Esboce o sinal observado e justifique seus resultados.

Optativo: determinem o valor de  $T_1$  e  $\tau_{\text{exp}}$  com os obtidos em  $V_L(t)$ .

**A.6.** Observem como muda o sinal transiente quando se coloca a barra de ferro dentro da bobina ( $L^*$ ). O período de oscilação,  $T_1$ , muda? Caso afirmativo, aumenta ou diminui? Qual é a explicação?

**A.7.** Idem ao item **A.6** quando o número de espiras da bobina é reduzido de 1000 para 500 (sem usar o núcleo de ferro).

**A.8.** Coloquem um potenciômetro de  $4.7K\Omega$  (ou  $1K\Omega$ ) em série com o capacitor no circuito e observem como muda a oscilação amortecida (o sinal de  $V_L(t)$ ) quando a resistência  $R$  aumenta. Descrevam qualitativamente suas observações e justifiquem.

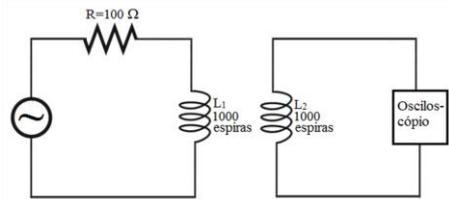
**A.9.** Observem e descrevam qualitativamente o que ocorre se o capacitor for retirado (ou colocado em curto-circuito). Neste caso teremos um circuito RL. Adicionem ao circuito um resistor  $R=100\Omega$ . Observem o sinal de  $V_R(t)$  e expliquem suas observações.

**A.10.** Observem e descrevam qualitativamente o que ocorre se o indutor for retirado (ou colocado em curto-circuito). Neste caso teremos um circuito RC.

#### **IV. Indutância mútua e ressonância (Como Demonstração)**

No circuito da Fig.6-11 temos um gerador de funções (no modo senoidal), um resistor, duas bobinas de 1000 espiras e um osciloscópio. Ajustem o gerador para a amplitude máxima de saída e frequência na faixa de 1-10KHz.

Figura 6-11 - Montagem experimental de dois circuitos sem conexão



Fonte: Elaborada pelo Compilador

Observem no osciloscópio o sinal induzido em  $L_2$  com amplitude  $V_2$  (uma onda senoidal de mesma frequência que a do gerador). Mantendo fixa a posição de  $L_1$ , aproximem, afastem e/ou girem o indutor  $L_2$ .

**A.1.** Estimem com o osciloscópio a tensão  $V_{L1}$  e  $V_{L2}$  (utilizando o canal 1 e 2, respectivamente). Comparem os valores das tensões na configuração, onde se observa o máximo sinal em  $V_{L2}$ ?

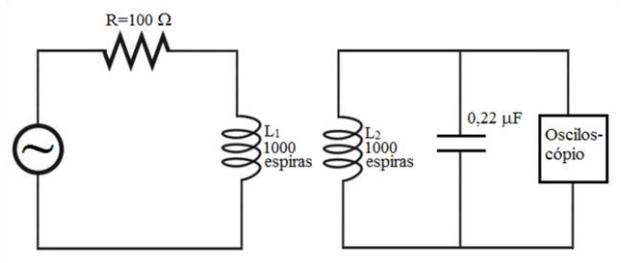
**A.2.** Mantendo a frequência do gerador fixa, meçam a máxima distância possível entre  $L_1$  e  $L_2$  de tal forma que o sinal senoidal induzido em  $L_2$  ainda seja perceptível no osciloscópio, ou seja, o sinal deve ser maior que o ruído. Qual a origem do **ruído**?

**Obs:** Aumentem a sensibilidade do osciloscópio até encontrar a que seja mais adequada para a medida.

**A.3.** Mantendo o osciloscópio conectado coloquem agora um

Figura 6-12 - Montagem experimental: dois circuitos sem conexão

capacitor  $C=0,22\mu\text{F}$  em paralelo com o indutor  $L_2$  como indicado na Fig.6-12. Variem o valor da frequência do gerador e observe a dependência do sinal  $V_{L_2}$  com  $f$ .



Fonte: Elaborada pelo Compilador

O comportamento é o mesmo que o observado no item **A.1**? Por quê?

**A.4.** No circuito da Fig.6-12 mantenham a frequência fixa igual ao valor em que  $V_{L_2}$  é máximo. Meçam a máxima distância possível entre  $L_1$  e  $L_2$  de tal forma que o sinal senoidal induzido ainda seja perceptível no osciloscópio.

**B.1. Previsões:** como o comportamento de  $V_{L_2}$  versus  $f$  deve mudar se for introduzida uma barra de ferro dentro de  $L_1$  tal como feito anteriormente.

**B.2.** Realizem os experimentos para verificar suas previsões do item **B.1**. Comentem e discutam seus resultados.

*Indutor de 1000 espiras s/ núcleo.....L~47mH*  
*Indutor de 1000 espirasc/ núcleo.....L~250mH*

**Lista de materiais** (prática 06)

- Ímã
- Núcleo de ferro e bobinas: 250 espiras e 1000 espiras
- Resistores:  $47\Omega$ ,  $470\Omega$ ,  $100\Omega$
- Potenciômetro de  $1.0k\Omega$  e/ou  $4.7k\Omega$
- Dois capacitores:  $0.1\mu F$ ,  $0.22\mu F$
- Núcleo de ferro e bobinas: 250 espiras e 1000 espiras
- Gerador de áudio
- Osciloscópio
- Placa de circuitos, cabos banana – banana, cabos coaxiais, etc.

**Demonstrações:** resposta transiente de um circuito LR (com lâmpadas); indutância mutua e ressonância.

## Exercícios

- 1) Uma bobina com a resistência de  $0,8\Omega$  e auto indutância de  $3,0\text{ mH}$  é ligada a uma fonte de tensão com d.d.p. constante de  $12\text{V}$ . Seja  $t = 0$  o instante da ligação, quando a corrente é nula. Encontre o valor da corrente  $I(t)$  e a sua taxa de variação  $dI/dt$  em: (a)  $t = 0$ ; (b)  $t = 0,1\text{s}$ ; (c)  $t = 0,5\text{s}$ .
- 2) Num certo instante,  $4/5$  da energia total de um circuito LC oscilante estão armazenados no campo magnético do indutor. Calcule: (a) a carga no capacitor nesse instante, em termos da carga máxima no capacitor, (b) a corrente no indutor nesse instante, em termos da corrente máxima no indutor.
- 3) Um circuito LC tem indutância  $L = 0,003\text{ mH}$  e uma capacitância  $C = 200\text{ pF}$ . (a) Calcule a frequência angular  $\omega$  da oscilação. (b) Determine o período  $T$  da oscilação.
- 4) Calcule o tempo necessário para carregar um capacitor descarregado de  $8,0\text{ pF}$ , num circuito LC no qual a tensão máxima é de  $1,0\text{ mV}$  e a corrente máxima é de  $50\text{ mA}$ .
- 5) (a) Qual a indutância necessária para construir um circuito LC que oscile com a frequência de  $60\text{ Hz}$ , tendo um capacitor de  $80 \times 10^{-6}\text{ F}$ ? (b) Qual o período de oscilação de um circuito LC constituído de uma bobina de  $2\text{ mH}$  e um capacitor de  $20 \times 10^{-6}\text{ F}$ ?
- 6) Um circuito contém um resistor de  $240\ \Omega$ , um capacitor de  $3,8\ \mu\text{F}$ , e um indutor de  $550\text{ mH}$ . Calcule a frequência de ressonância  $\omega_0$  e os valores de  $\omega_1$ ,  $\gamma$  e  $\tau$ . Inicialmente o capacitor é ligado a uma fonte com  $V_o = 1\text{V}$  e depois, em  $t = 0$  é ligado em série com  $R$  e  $C$ . Esboce os gráficos de  $Q(t)$ ,  $I(t)$ ,  $V_C(t)$  e  $V_L(t)$ .