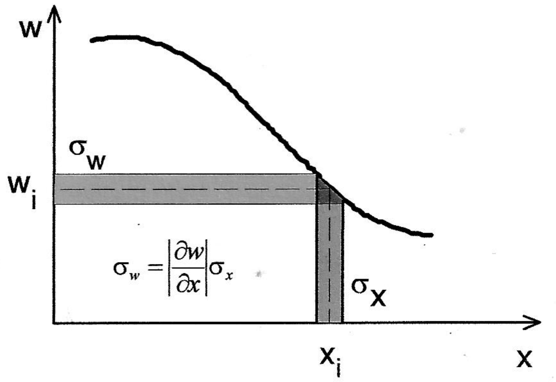
2.2. PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

Muitas vezes usaremos o valor do mensurando numa equação para determinar uma outra grandeza qualquer. O que fazer com a incerteza associada? Para o mensurando temos a incerteza do processo de medida, enquanto que para grandezas determinadas através de fórmulas temos a incerteza propagada.

2.2.1. Cálculo da propagação de incertezas

O problema pode ser posto da seguinte maneira: dada uma função w = w(x, y, z) onde x, y, z são grandezas experimentais com incertezas dadas por σ_x, σ_y, σ_z e independentes entre si, quanto vale σ_w ? A independência entre σ_x, σ_y, σ_z é necessária para a validade das fórmulas a seguir, mas não será discutida por enquanto.

Para simplificar suponha w apenas função de x. No gráfico abaixo está representando *w(x)*.



A incerteza de w, neste gráfico, pode ser obtida pela simples projeção da incerteza de x. Para pequenos intervalos no eixo x, temos em primeira ordem:

$$\sigma_w = \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|\sigma_x \qquad (2.2)$$

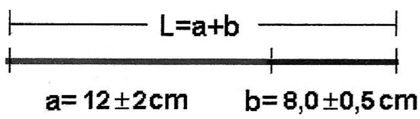
Para mais de uma variável independentes entre si, podemos escrever uma fórmula geral (visualize uma soma de catetos em n dimensões):

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \ldots \quad (2.3)$$

Acompanhe os exemplos a seguir:

A) Adição de valores experimentais

Considere a soma de dois segmentos:



A incerteza no segmento soma pode ser calculada aplicando a equação (2.3):

$$\begin{aligned} \sigma_L^2 &= \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 \\ &= 1.\sigma_a^2 + 1.\sigma_b^2 \end{aligned}$$

que resulta:

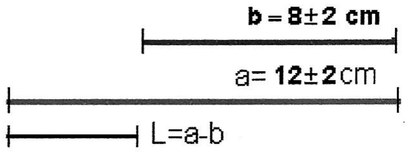
$$\sigma_L^2 = 2^2 + 0{,}5^2 = 4{,}25$$
$$\sigma_L = 2{,}06\,cm$$

Logo

L = (20,0 ± 2,1) cm

B) Subtração de valores experimentais

Seguindo o mesmo esquema do exemplo anterior, a incerteza associada à subtração de duas grandezas experimentais é dada por:



Novamente, usando a equação (2.3):

$$\sigma_L^2 = \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2$$
$$= 1.\sigma_a^2 + 1.\sigma_b^2$$

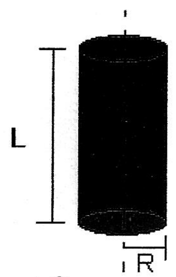
resulta:
$$\sigma_L^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$
$$\sigma_L = 2{,}8\,cm$$

Logo **L = (4,0 ± 2,8) cm**

Note que na **soma**, tanto a grandeza como a incerteza aumentaram, mas na **diferença** de duas grandezas experimentais, apesar do resultado ser menor em módulo, a incerteza final é maior que a das partes.

C) Multiplicação de grandezas experimentais: volume de um cilindro

Vamos agora determinar o volume do cilindro na figura abaixo em que se mediram o raio e a altura.



V = πR²L
R = 2,0 ± 0,5 cm
L = 10,0 ± 0,5 cm

Propagaremos as incertezas em todos os termos do produto: π, R e L.

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)^2 \sigma_\pi^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2$$
$$= (R^2 L)^2 \sigma_\pi^2 + (\pi 2RL)^2 \sigma_R^2 + (\pi R^2)\sigma_L^2$$

dividindo por V^2

$$\frac{\sigma_V^2}{V^2} = \frac{(R^2 L)^2 \sigma_\pi^2 + (\pi 2RL)^2 \sigma_R^2 + (\pi R^2)\sigma_L^2}{(\pi R^2 L)^2}$$
$$\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2$$

Calculando cada um dos termos acima usando os valores fornecidso na figura:

$$\left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right) = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$2\left(\frac{\sigma_R}{R}\right) = \frac{1}{2,0} \qquad \text{(ii)}$$

e

$$\left(\frac{\sigma_L}{L}\right) = \frac{0,5}{10,0} \qquad \text{(iii)}$$

Somando i, ii e iii em quadratura:

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{0^2 + 0,5^2 + 0,05^2} = 0,5025$$

MUITO IMPORTANTE: Na equação acima, de propagação de incertezas na multiplicação e divisão, obtivemos a incerteza relativa σ_V/V. NÃO ESQUEÇA DE MULTIPLICÁ-LA PELO RESULTADO (V) PARA OBTER A INCERTEZA ABSOLUTA. Multiplicando σ_V por V e ajustando o número de significativos...

$$\sigma_V = 0,5025 \times V = 0,5025 \times 125,7 = 63$$

O resultado do volume do cilindor vale:

V = (126 ± 63) cm^3

ou ainda

V = (13 ± 6) x 10 cm^3

Os resultados acima são mais gerais do que parece à primeira vista. Para as quatro operações podem ser resumidos como segue:

Na soma ou subtração, a <u>incerteza absoluta</u> do resultado é a soma em quadratura das incertezas absolutas.

Na multiplicação ou divisão, a <u>incerteza relativa</u> do resultado é dada pela soma em quadratura das incertezas relativas dos operandos (não esqueça de converter a incerteza relativa em absoluta).

NOTA: por *soma em quadratura* entende-se a raiz quadrada da soma dos quadrados...

No Quadro 2.1, a seguir, estão resumidos os principais casos de propagação de incertezas. Uma importante regra prática pode ser obtida se notarmos que o resultado de propagação de incertezas não precisa ser feito com precisão numérica maior que cerca de 5%. Logo:

Qualquer termo *menor que 1/3 do maior termo* na soma em quadratura pouco contribui no resultado final e em geral, pode ser desprezado.

Exemplificando: Volte para o exemplo A, a soma de dois segmentos: Lá calculamos o resultado de :

$$\sigma_L^2 = 2^2 + 0{,}5^2 = 4{,}25$$

observe que $0{,}5^2 << 2^2$, ou seja, se desprezarmos o termo menor, o resultado seria 4,00, que arredondado para um significativo resultaria $\sigma_L = 2\ cm$, não muito diferente do resultado anterior, 2,1 cm.

Algebricamente: sejam x_1 e x_2 os termos de uma soma em quadratura com $x_2 = k\ x_1$. A soma em quadratura resulta:

$$S = \sqrt{x_1^2(1+k^2)} \qquad (2.3)$$

Seja agora

$$S' = \sqrt{x_2^2} \qquad (2.4)$$

em que se desprezou x_1 uma vez que k>1. Note que S > S′, uma vez que $x_2 > x_1$. Queremos saber, o menor valor de k de forma que S′ e S não difiram em mais que 5%. Queremos que

$$S - S' < 0.05 * S \quad ou \quad \frac{S'}{S} > 0.95 \qquad (2.5)$$

Com alguma manipulação algébrica se obtém

$$k > 3.0 \qquad (2.6)$$

Isto pode simplificar muito as contas pois, numa soma em quadratura, podemos simplesmente desprezar termos menores que 1/3 do maior. Isto permite, na maioria das vezes, um cálculo rápido, sem o uso de calculadora. Atente que <u>são os termos da soma em quadratura</u> que devem ser comparados, não as incertezas.

2.3. *Representação de incertezas em um gráfico. Barras de erro.*

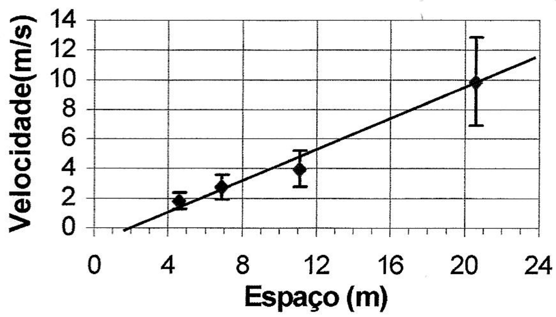
Já aprendemos a expressar incertezas quando escrevemos o resultado de uma medida. Num gráfico vamos expressar a incerteza de cada ponto experimental na forma de uma barra vertical (ou horizontal) que representará o intervalo de confiança definido pela incerteza da grandeza.

Exemplo: Representar dados da Tabela 2.2. em um gráfico.

Tabela 2.2. Espaços e velocidades de um corpo.

n	s ± 0,05 (m)	v (m/s)
1	4,60	1,84±0,55
2	6,90	2,76±0,82
3	11,10	3,99±1,20
4	20,60	9,88±2,96

Figura 2.1 Velocidades e posições de um corpo.



Note que a incerteza do espaço **não** foi colocada no gráfico, pois é menor que o ponto marcado. Neste gráfico também foi ajustada uma reta média que representa os pontos experimentais. A reta média pode ser traçada observando algumas regras simples:

- Procure passar a reta equilibradamente pelo maior número de pontos.
- A origem (0; 0) pode ou não ser um ponto experimental. Se for fisicamente justificável, trate-a como qualquer outro ponto experimental, caso contrário trace a melhor reta ignorando a origem.
- A reta deve estar contida na maioria das barras de incertezas.

Quadro 2.1. RESUMO DE FÓRMULAS PARA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

$w = w(x, y, ...)$	Expressões para σ_w
$w = x \pm y$ **soma e subtração**	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$
$w = axy$ **multiplicação**	$\left(\dfrac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w = a(y/x)$ **divisão**	$\left(\dfrac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w = x^m$ **potência simples**	$\left\|\dfrac{\sigma_w}{w}\right\| = \left\|m\dfrac{\sigma_x}{x}\right\|$
$w = ax$ **multiplicação por constante**	$\left\|\dfrac{\sigma_w}{w}\right\| = \left\|\dfrac{\sigma_x}{x}\right\|$ **ou** $\sigma_w = \|a\|\sigma_x$
$w = ax + b$	$\left\|\dfrac{\sigma_w}{w}\right\| = \left\|\dfrac{\sigma_x}{x}\right\|$ **ou** $\sigma_w = \|a\|\sigma_x$
$w = ax^py^q$	$\left(\dfrac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q\dfrac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w = a\,\mathrm{sen}(bx)$ **função qualquer** **<u>aplicar a definição</u>**	$\sigma_w = \|ab\cos(bx)\|\sigma_x$ $\quad b\sigma_x$ em radianos