

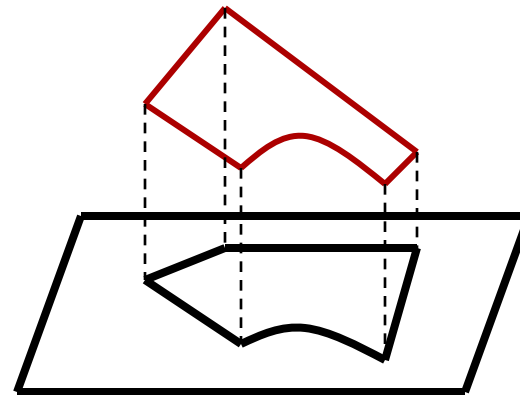
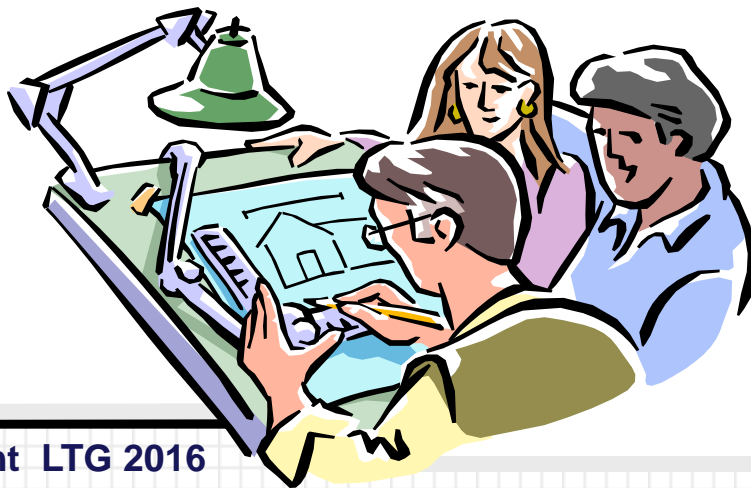
Cálculo de Áreas



Cálculo de Áreas

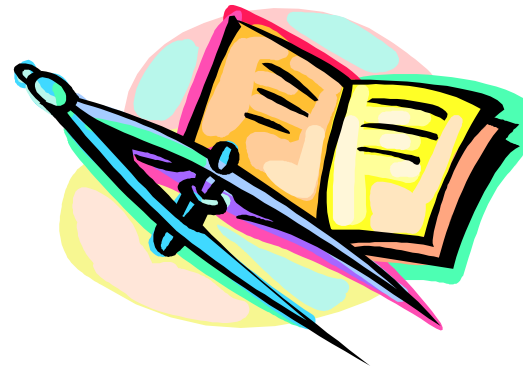
Fundamental para planejamentos de engenharia, agricultura, loteamentos, limites de preservação ambiental, levantamentos cadastrais, escritura de compra e venda, partilha, etc.

As **áreas topográficas** são **projeções horizontais**, de terrenos e obras



Processos de Cálculo

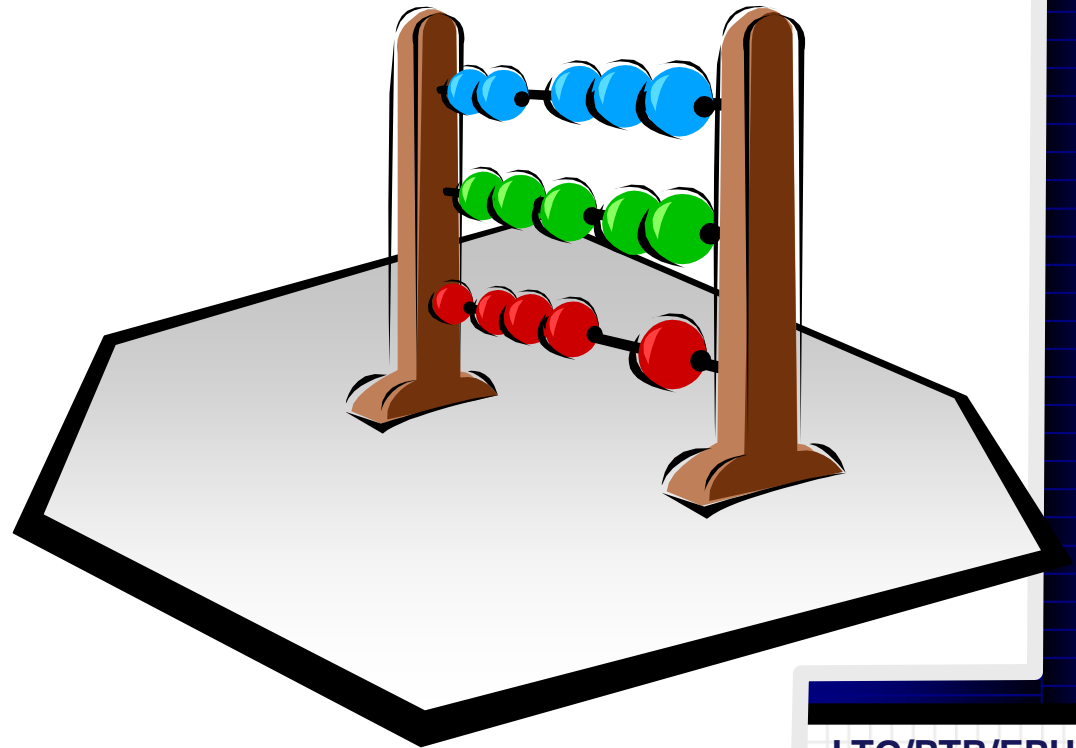
- Analíticos;
- Computacionais;
- Gráficos;
- Mecânicos;
- Mistos



Processos Analíticos

Foram os primeiros métodos desenvolvidos para o cálculo de área de poligonais. São baseados em fórmulas matemáticas, limitantes da figura.

- Fórmula de Gauss
- Método de Bezout
- Método de Poncelet
- Método de Simpson



Processos Analíticos

FÓRMULA DE GAUSS

(Áreas delimitadas por poligonais regulares: triângulos, trapézios, etc)

Basea-se na soma e subtração da área de trapézios formados pelos vértices e projeções sobre os eixos N, E.

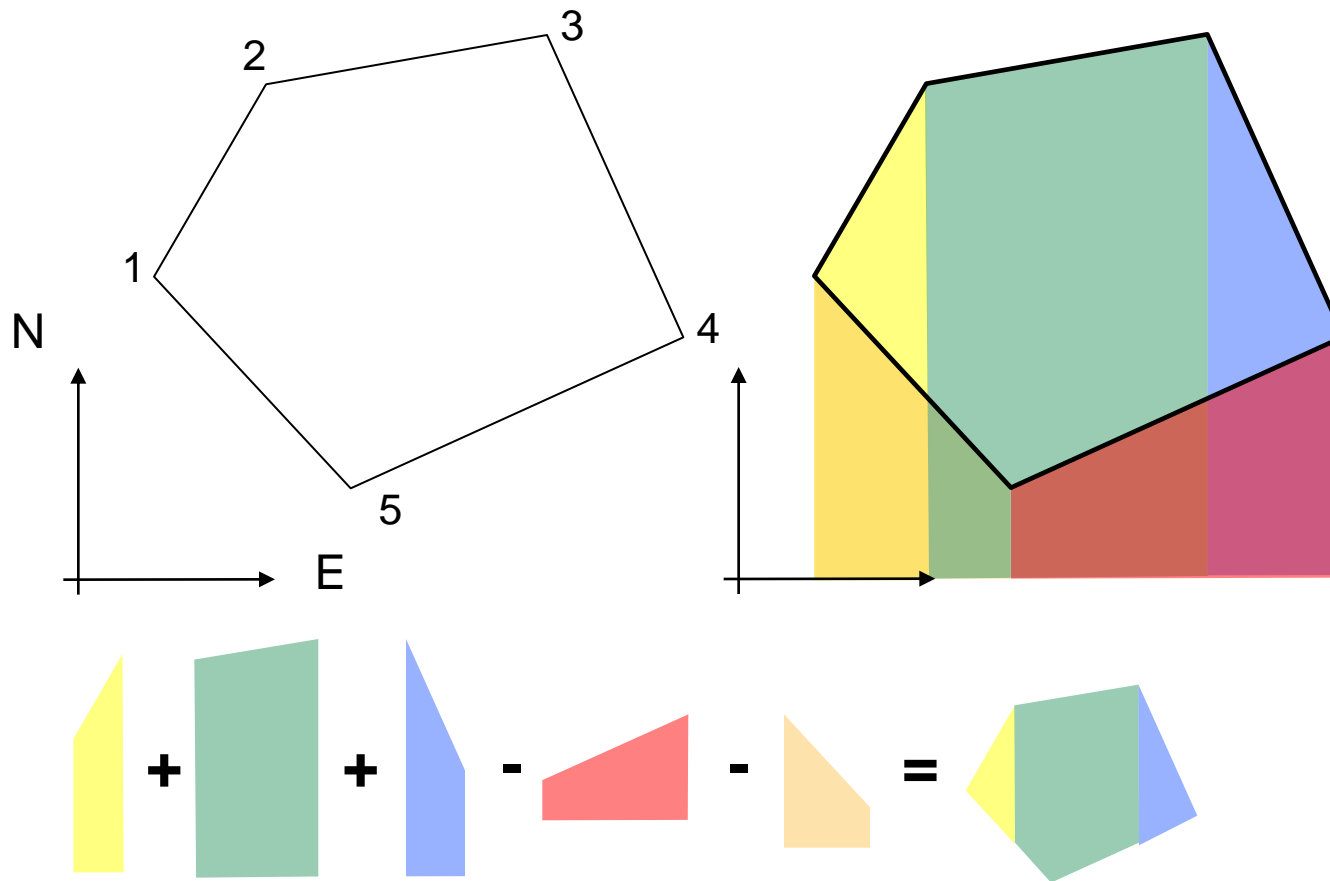
Essa operação pode ser expressa por diferentes equações, como a equação a seguir, que utiliza a propriedade distributiva.

$$S = 0,5 \times \left(\sum_{i=1}^n N_i \times E_{i+1} - \sum_{i=1}^n E_i \times N_{i+1} \right)$$

Processos Analíticos

FÓRMULA DE GAUSS – INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

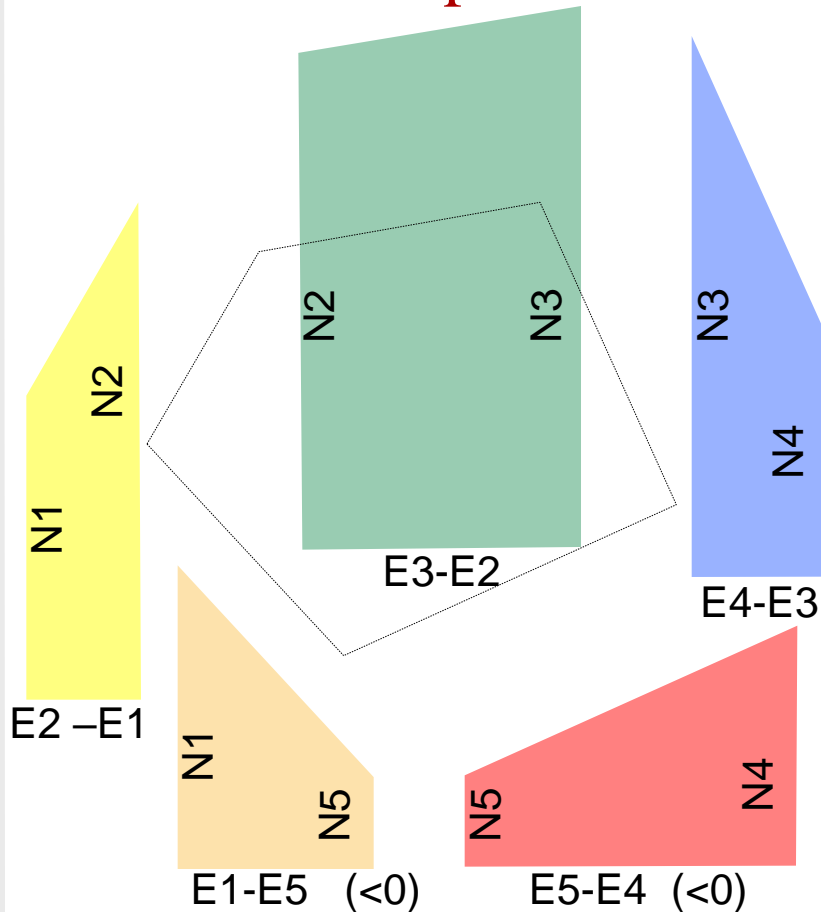
Exemplo: Base dos trapézios no eixo “E”



Processos Analíticos

FÓRMULA DE GAUSS

Exemplo: Base dos trapézios no eixo “E”



$$\begin{aligned}
 S = 0,5 \times [& (E2-E1) \times (N1+N2) \\
 & + (E3-E2) \times (N3+N2) \\
 & + (E4-E3) \times (N4+N3) \\
 & + (E5-E4) \times (N5+N4) \\
 & + (E1-E5) \times (N1+N5)]
 \end{aligned}$$

* Uma das fórmulas de Gauss

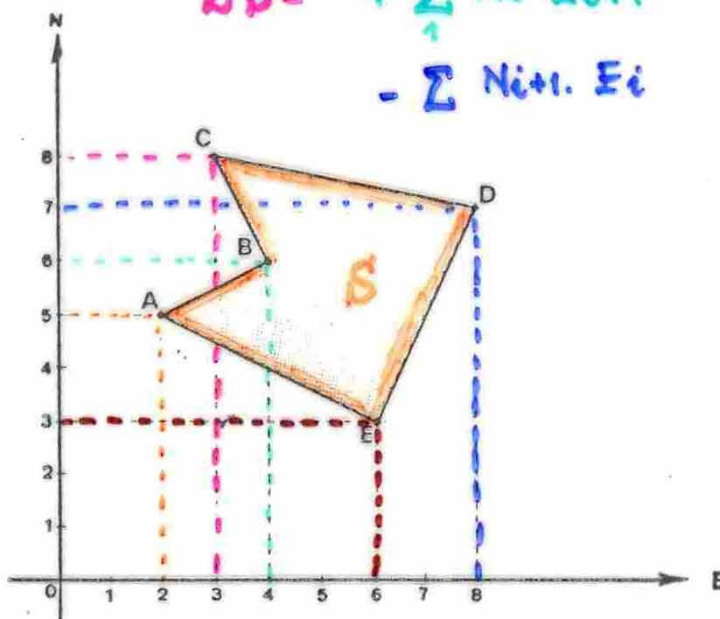
GAUSS - EXEMPLO

vértice	coordenadas	
	N	E
A	N_1	E_1
B	N_2	E_2
C	N_3	E_3
D	N_4	E_4
E	N_5	E_5
A	N_1	E_1

vértice	coordenadas	
	N	E
A	5	2
B	6	4
C	8	3
D	7	8
E	3	6
A	5	2

GAUSS

$$2S = + \sum N_i E_{i+1} - \sum N_{i+1} E_i$$



$\Sigma+$

$$5 \times 4 = 20$$

$$6 \times 3 = 18$$

$$8 \times 8 = 64$$

$$7 \times 6 = 42$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$\hline 150$$

$\Sigma-$

$$6 \times 2 = 12$$

$$8 \times 4 = 32$$

$$7 \times 3 = 21$$

$$3 \times 8 = 24$$

$$5 \times 6 = 30$$

$$\hline 119$$

$$2S = 150 - 119 = 31$$

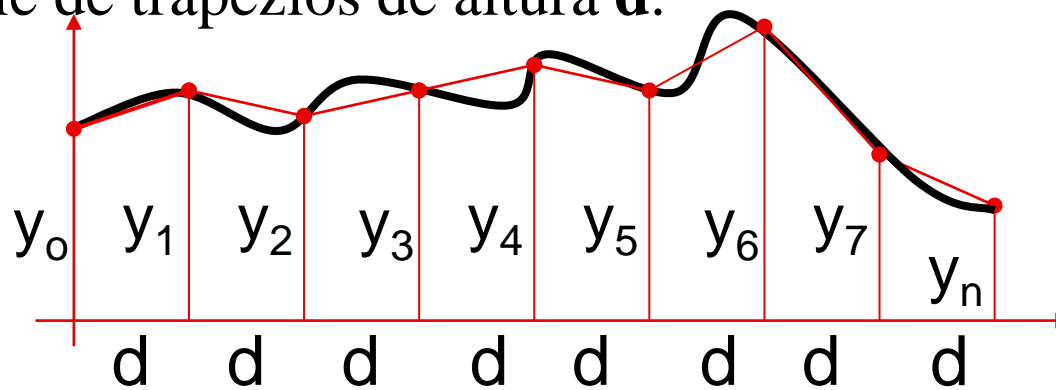
$$S = 15,5 \text{ m}^2$$

Processos Analíticos

MÉTODO DE BEZOUT

(Áreas que se delimitam por trapézios)

Para n qualquer (par ou ímpar) esse método interpreta a curva com uma série de trapézios de altura d .



$$S = d \times \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

onde: $\sum y_i = y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1}$ (Internos)

Processos Analíticos

MÉTODO DE PONCELET

(Áreas que se delimitam por trapézios, ...)

Para n par, interpreta a curva como uma série de trapézios de altura $2d$.

$$S = d \times \left(2 \times \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{(y_0 + y_n) - (y_1 + y_{n-1})}{4} \right)$$

onde: $\sum y_i = y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}$ (ímpares)

Processos Analíticos

MÉTODO DE SIMPSON

(Áreas que se delimitam por poligonais irregulares)

Para n par, interpreta a curva como uma série de trechos de parábola de base $2d$, e calcula-se a área por integração.

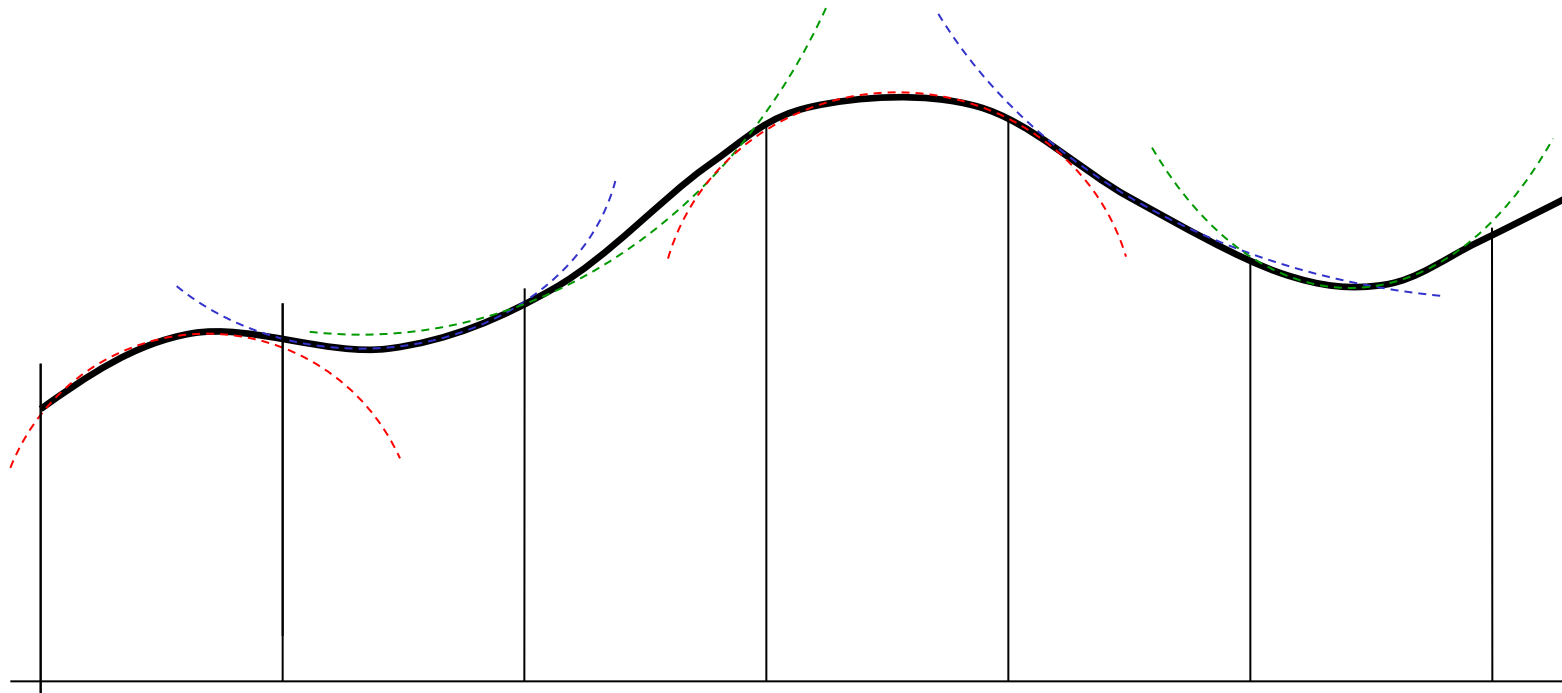
$$S = \frac{d}{3} \cdot \left(y_0 + y_n + 2 \cdot \sum y_p + 4 \cdot \sum y_i \right)$$

onde: $\sum y_p = y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{n-2}$ (pares)

$\sum y_i = y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}$ (ímpares)

Processos Analíticos

MÉTODO DE SIMPSON – INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA



- Exemplo

Supondo que uma superfície extrapolygonal tenha sido dividida em alturas, conforme relacionadas abaixo e que $d = 2,0$ metros, calcular sua área pelos três métodos (fórmulas) apresentados.

Dados:

$$y_0 = 3,0 \text{ m}$$

$$y_1 = 3,5 \text{ m}$$

$$y_2 = 3,8 \text{ m}$$

$$y_3 = 3,2 \text{ m}$$

$$y_4 = 2,6 \text{ m}$$

$$y_5 = 2,6 \text{ m}$$

$$y_6 = 2,4 \text{ m}$$

$$y_7 = 2,0 \text{ m}$$

$$y_8 = 1,8$$

Solução:

Solução:

a) Fórmula de Bezout

$$\sum y = 3,5 + 3,8 + 3,2 + 2,6 + 2,6 + 2,4 + 2,0 = 20,1 \text{ m}$$

$$S = 2,0 \times \left[20,1 + \frac{3,0 + 1,8}{2} \right] = 45,00 \text{ m}^2$$

b) Fórmula de Poncelet

$$\sum Y_i = 3,5 + 3,2 + 2,6 + 2,0 = 11,3$$

$$S = 2,0 \times \left[2 \times 11,3 + \frac{(3,0 + 1,8) - (3,5 + 2,0)}{4} \right] = 44,85 \text{ m}^2$$

c) Fórmula de Simpson

$$\sum y_p = 3,8 + 2,6 + 2,4 = 8,8 \text{ m}$$

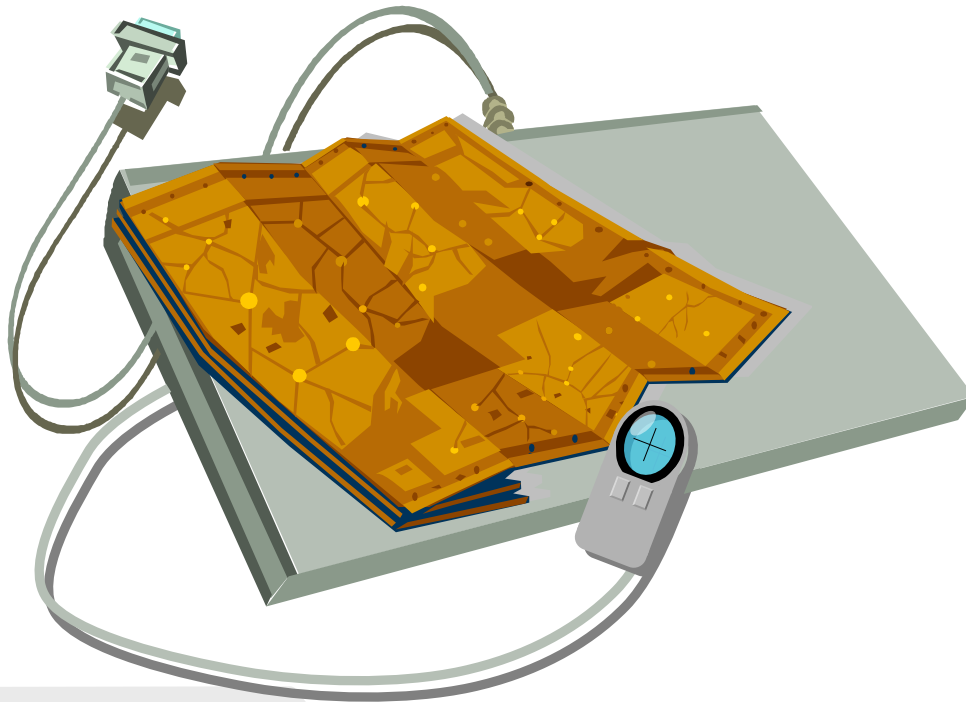
$$\sum Y_i = 3,5 + 3,2 + 2,6 + 2,0 = 11,3 \text{ m (já calculado)}$$

$$S = \frac{2,0}{3} \times [3,0 + 1,8 + 2 \times 8,8 + 4 \times 11,3] = 45,07 \text{ m}^2$$

Como se pode ver, as fórmulas chegam a valores muito semelhantes. No caso, a diferença, no caso mais desfavorável é menor que 0,5%.

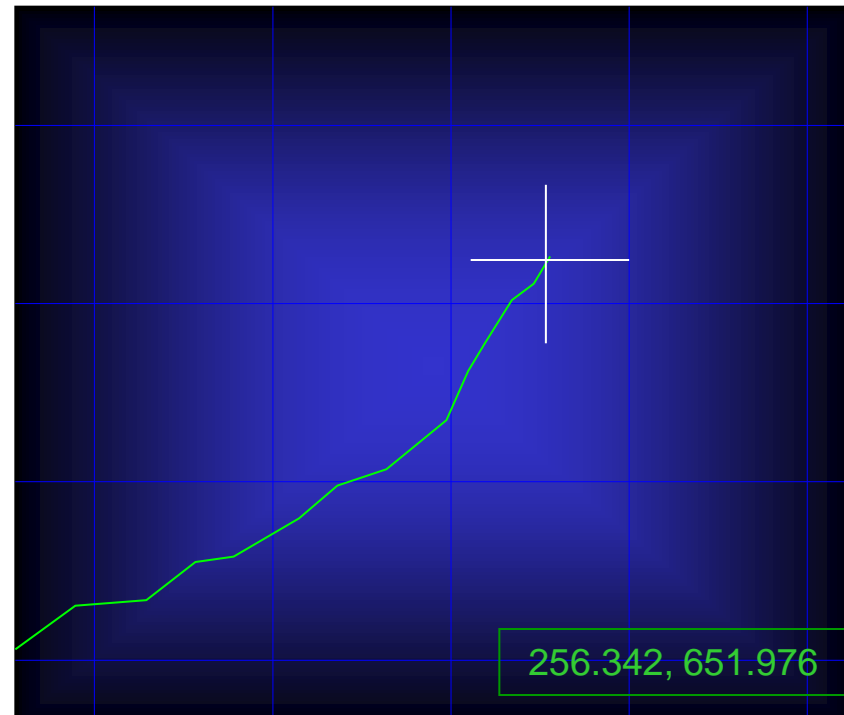
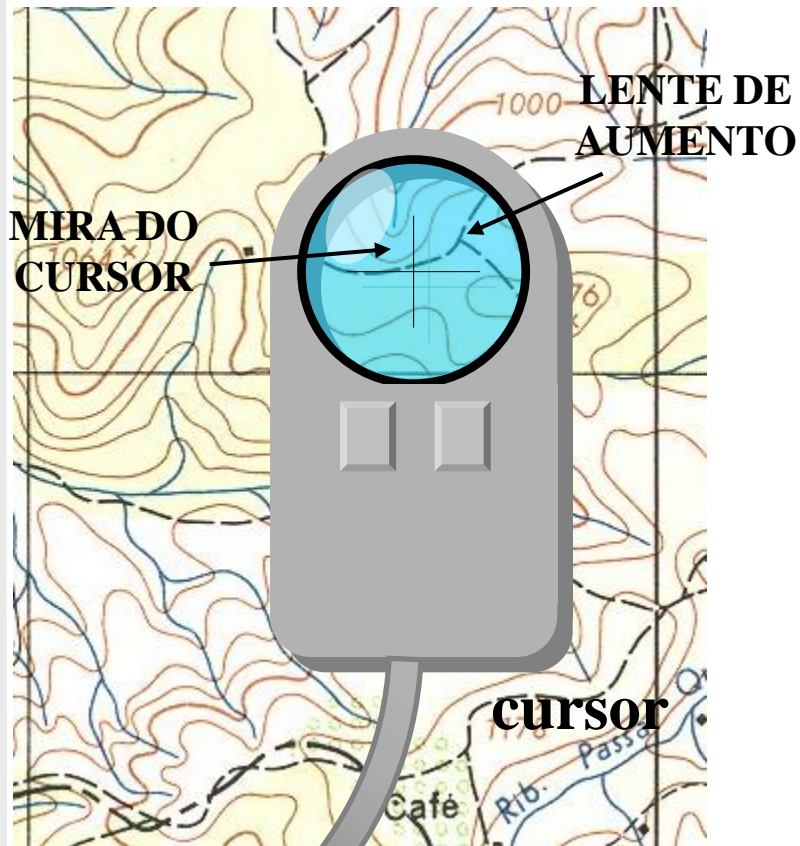
Processos Computacionais

- No programa CAD ou SIG / Cartografia digital
- A partir de uma mesa digitalizadora, registrando e digitalizando o contorno da área.



Processos Computacionais

O programa utiliza a **fórmula de Gauss**, já que o contorno da figura é na realidade uma poligonal de muitos lados.



Processos Gráficos

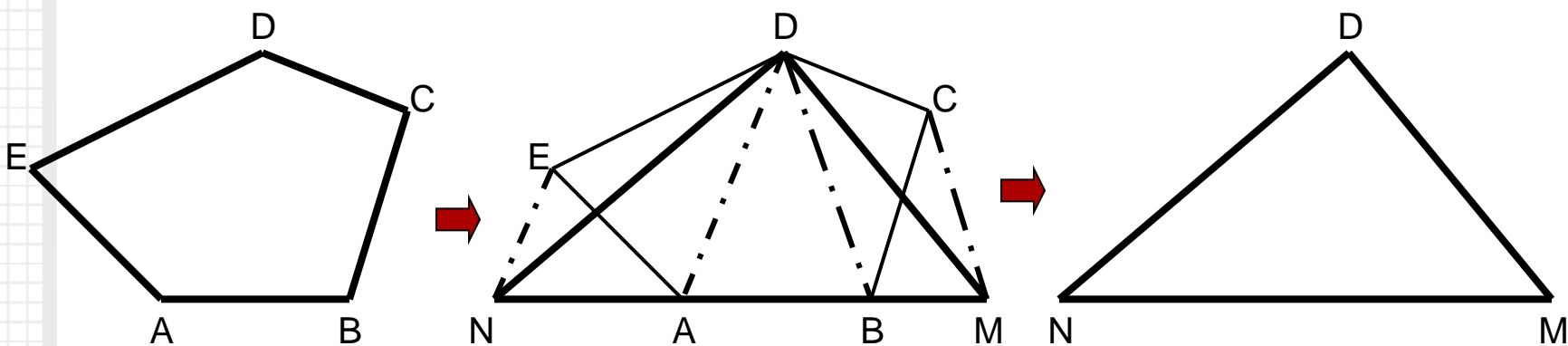
- Transformação Geométrica
- Faixas de Igual Espessura
- Divisão de Quadrículas
- Figuras Geométricas Equivalentes



Processos Gráficos

TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA

Consiste em transformar as poligonais regulares em um triângulo de área equivalente.



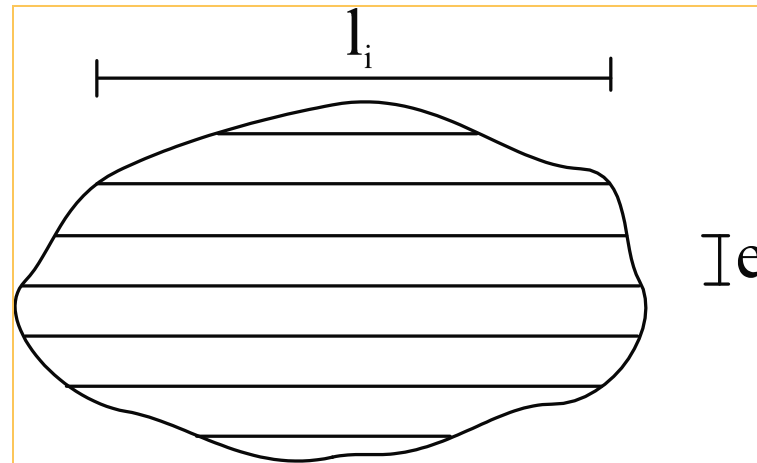
Processos Gráficos

FAIXAS DE IGUAL ESPESSURA

(Áreas que se delimitam por poligonais irregulares)

Consiste em efetuar a divisão da figura em faixas de espessura constante (e), medindo-se as larguras (l_i) dessas faixas.

$$S = e \cdot \sum_i l_i$$



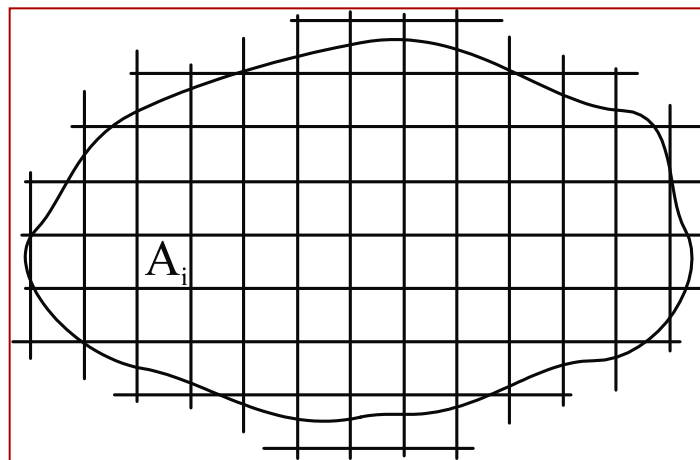
Processos Gráficos

DIVISÃO EM QUADRÍCULAS

(Áreas que se delimitam por poligonais irregulares)

Consiste na contagem direta dos quadrados mutiplicados pela área deles. Pode-se utilizar milimetrado para facilitar a tarefa.

$$S = \sum_i A_i$$



- $S = \Sigma 1 + \Sigma 3/4 + \Sigma 1/2 + \Sigma 1/4$

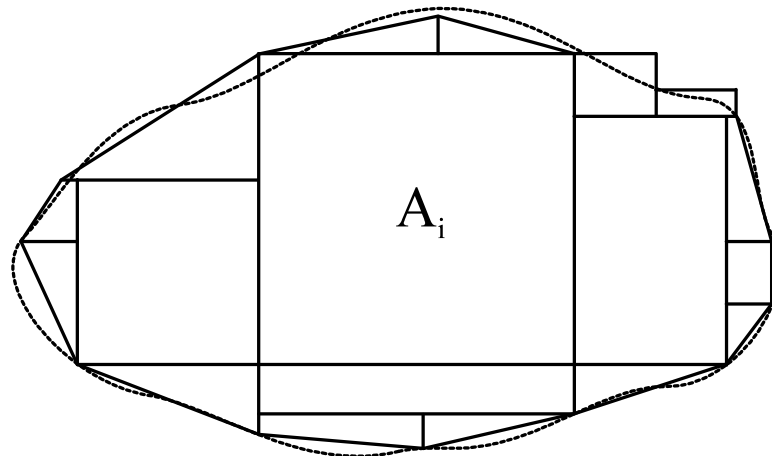
Processos Gráficos

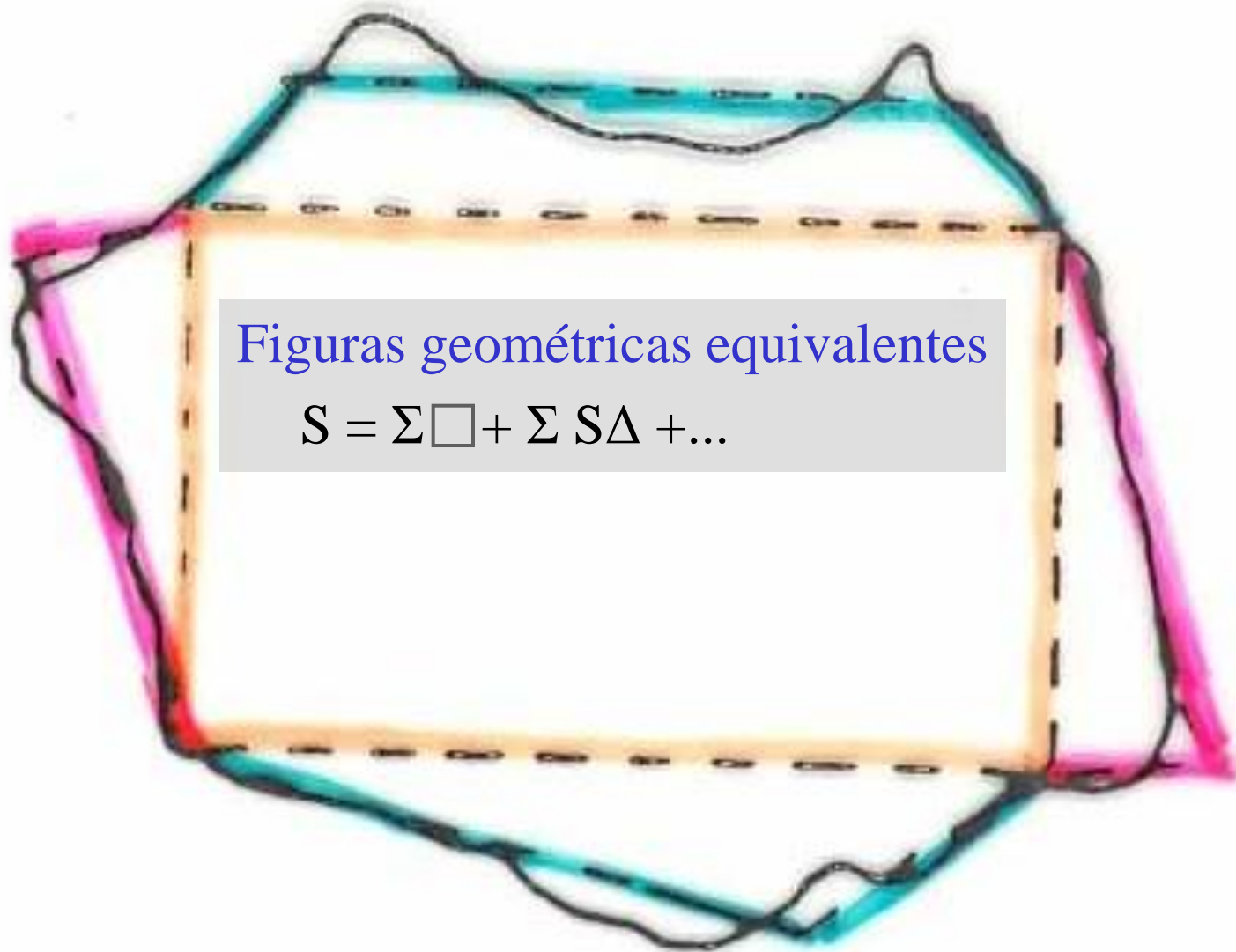
FIGURAS GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES

(Áreas que se delimitam por poligonais irregulares)

Consiste em dividir a área em figuras geométricas equivalentes: retângulos, triângulos e trapézios, de modo a compensar as áreas que ficaram dentro e fora da figura geométrica.

$$S = \sum_i A_i$$





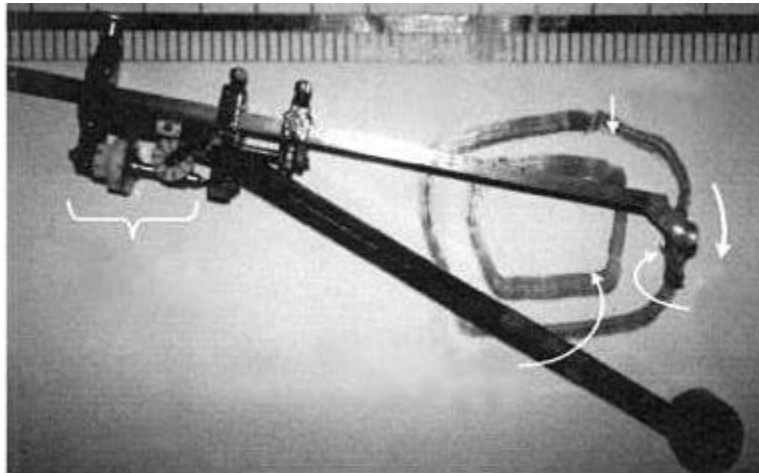
Figuras geométricas equivalentes

$$S = \Sigma \square + \Sigma S\Delta + \dots$$

Processo Mecânico

PLANÍMETRO

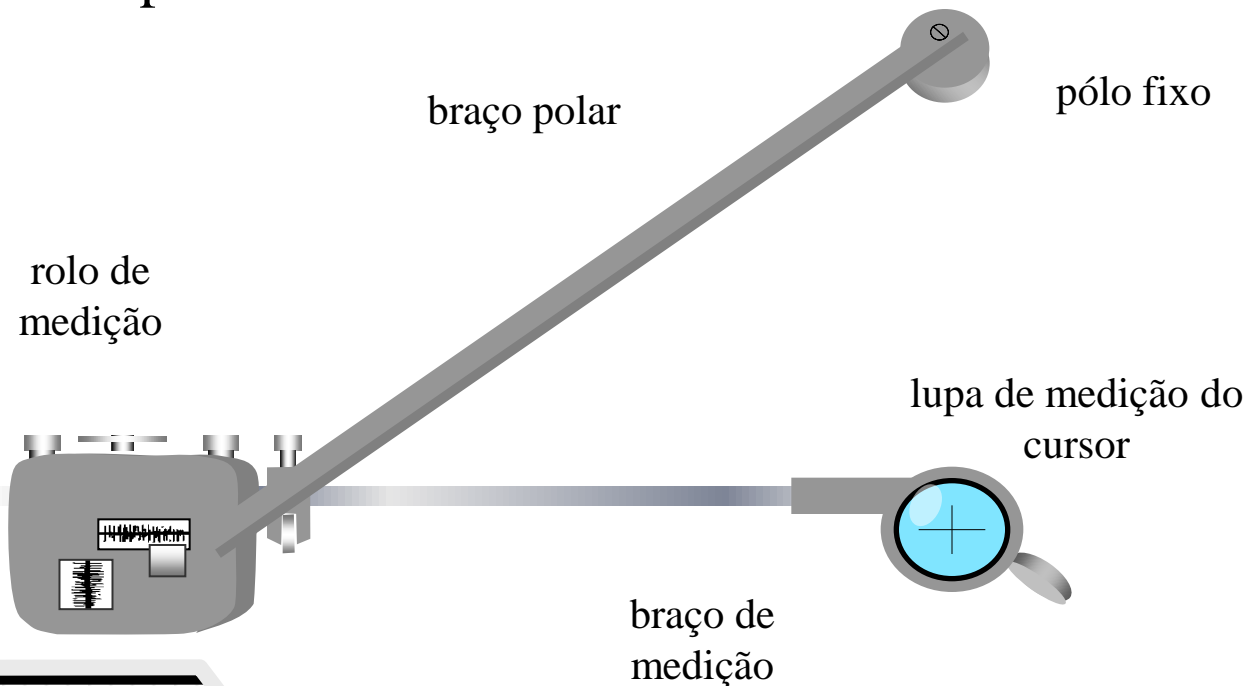
O planímetro é um equipamento que possui dois braços articulados com um pólo numa extremidade, que deve permanecer fixo, e um cursor na outra, devendo percorrer todo o contorno da área, retornando ao ponto inicial.



Processo Mecânico

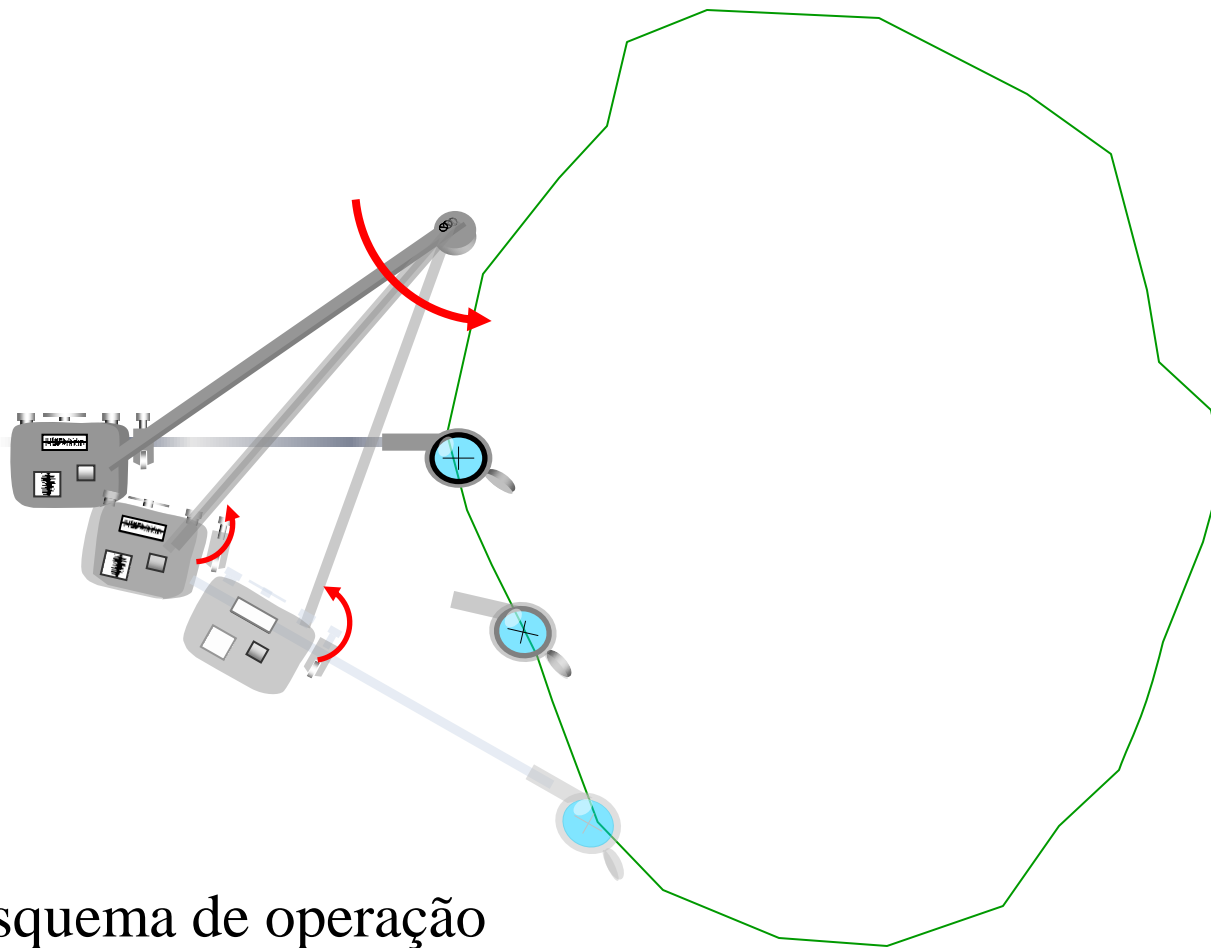
PLANÍMETRO

Um tambor giratório no mesmo braço do cursor, situado na extremidade oposta, faz girar um ponteiro sobre o círculo de leitura. Pode-se demonstrar que o giro do tambor, e portanto a diferença de leituras, é proporcional à área envolvida pelo contorno percorrido.



Processo Mecânico

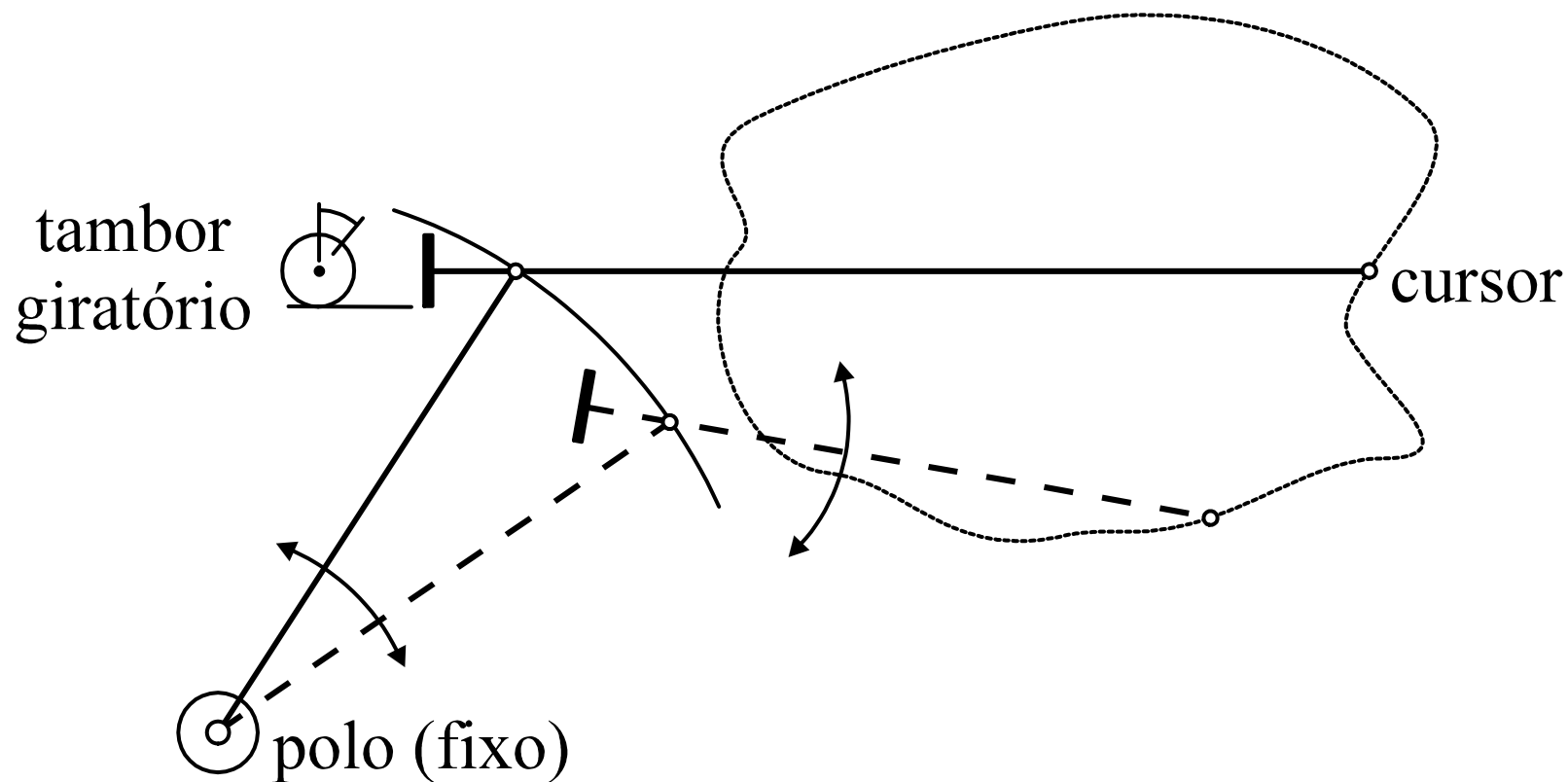
PLANÍMETRO



Esquema de operação

Processo Mecânico

PLANÍMETRO



Esquema de operação

Processo Mecânico

PLANÍMETRO

S – área

L_f – leitura final

L_i – leitura inicial

k – constante do aparelho

$$S = k \cdot (L_f - L_i)$$

Para determinar o valor de k , sugere-se planimetrar n vezes uma área S conhecida.

$$S = d \times \left(\frac{y_o + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

FIM

EPUSP

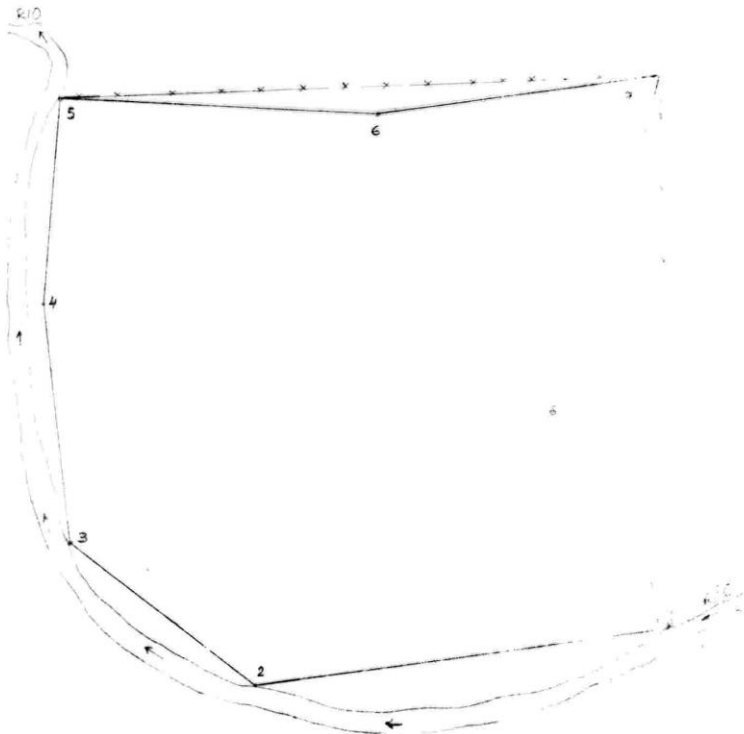
TOPOGRAFIA

AVALIAÇÃO DE ÁREAS

12.8

4. O terreno abaixo indicado é limitado pelas cercas e pelo rio. Calcular:

- As áreas extrapolygonais definidas pelo rio e pelos lados 5, 6, 7 e 8 por um dos processos: Bezout, Simpson ou Poncelet;
- Calcular a área dos triângulos 5,6,7 e 7,8,1 por um processo geométrico (medições sobre a figura); somar a área extrapolygonal calculada no item a) e a área da poligonal 1-2-...-8 (calculada no exercício 3) para obter a área total;
- avaliar a área total do terreno através do planímetro, comparar com o valor obtido no item b), explicando as causas da diferença;



Escala aproximada 1:500

Extras & dedução de fórmulas

3. Calcule a área da poligonal fornecida abaixo, através do método analítico. Obs.: não esqueça de repetir, ao final, a coordenada do primeiro vértice.

VERTICE	COORDENADAS		PRODUTOS	
	N	E	$N_i \cdot E_{i+1}$	$E_i \cdot N_{i+1}$
1	10,00	30,00		
2	27,53	8,54		
3	55,01	6,03		
4	79,47	8,49		
5	77,54	45,04		
6	81,61	77,98		
7	42,52	67,48		
8	16,08	77,93		
SOMAS				
			DIFERENÇA	
ÁREA CALCULADA				