

# Controle de Sistemas Robóticos

Adriano A. G. Siqueira

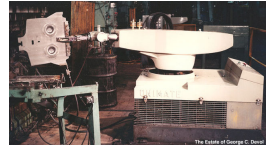
Universidade de São Paulo  
Escola de Engenharia de São Carlos  
Departamento de Engenharia Mecânica

# Sumário

- Introdução ao Controle de Robôs Manipuladores
- Simulador de Robô Manipulador Planar de 2 Graus de Liberdade
- Controle Independente de Juntas
- Controle por Torque Calculado
- Controle Adaptativo baseado no Torque Calculado
- Controle Robusto ( $\mathcal{H}_\infty$  Linear, Representação Quase-LPV)

# Histórico

- 1961 - UNIMATE, Unimation, Inc.  
- George Devol, Joseph Engelberger
- 1970 - 1980: Torque Calculado (PAUL, 1973)
- 1980 - 1990: Controle Adaptativo (CRAIG, 1985;  
SLOTINE & LI, 1987)
- 1985 - 1995: Controle Robusto (SPONG &  
VIDYASAGAR, 1989; DAWSON, 1990)



# Aplicações



Pintura



*Pick and Place*



KR 16



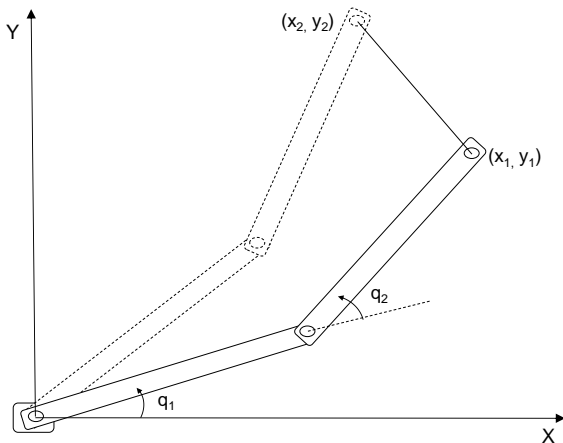
Soldagem



Prototipagem

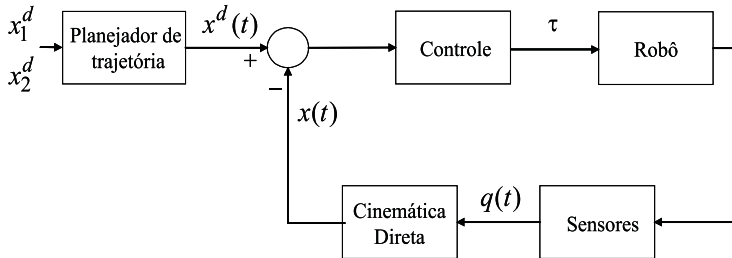
# Estrutura de Controle de Robôs Manipuladores

- Planejamento no espaço operacional (cartesiano)



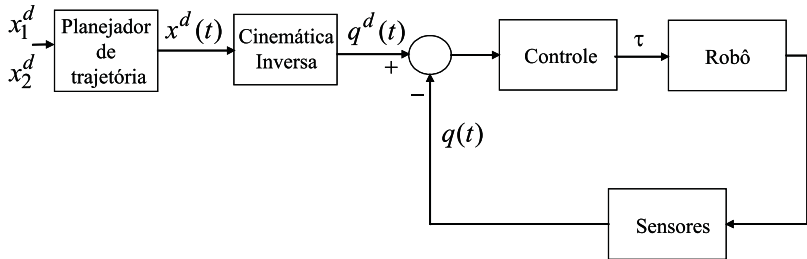
# Estrutura de Controle de Robôs Manipuladores

- Planejamento no espaço operacional (cartesiano)
  - Controle cartesiano  $\Rightarrow$  cinemática direta



# Estrutura de Controle de Robôs Manipuladores

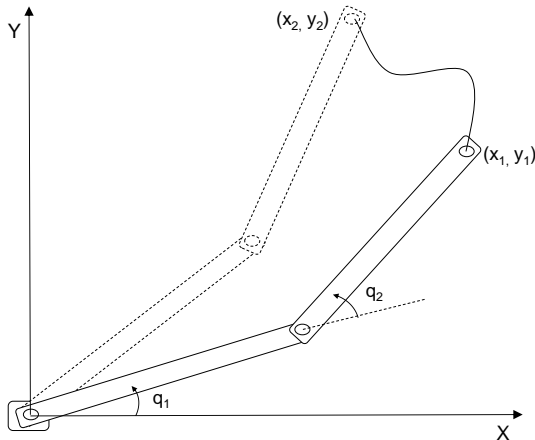
- Planejamento no espaço operacional (cartesiano)
  - Controle cartesiano  $\Rightarrow$  cinemática direta
  - Controle no espaço das juntas  $\Rightarrow$  cinemática inversa de toda trajetória



- KUKA KR 16: LIN(P1,P2)

# Estrutura de Controle de Robôs Manipuladores

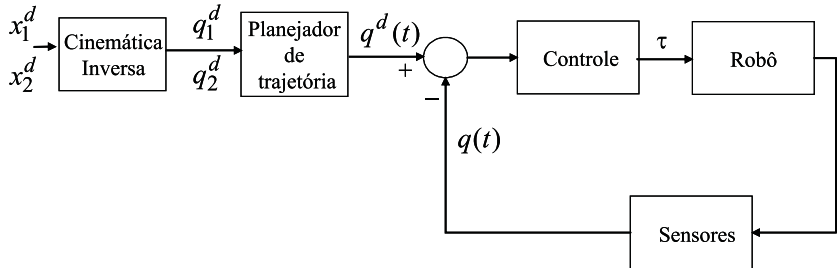
- Planejamento no espaço das juntas





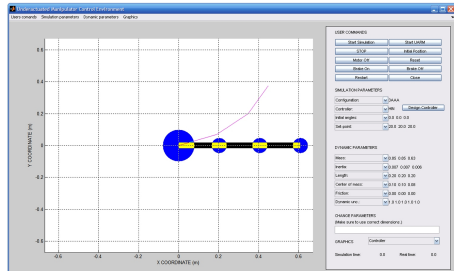
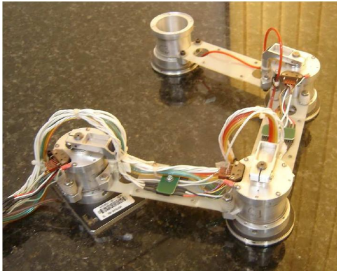
# Estrutura de Controle de Robôs Manipuladores

- Planejamento no espaço das juntas
  - Cinemática inversa apenas em dois pontos

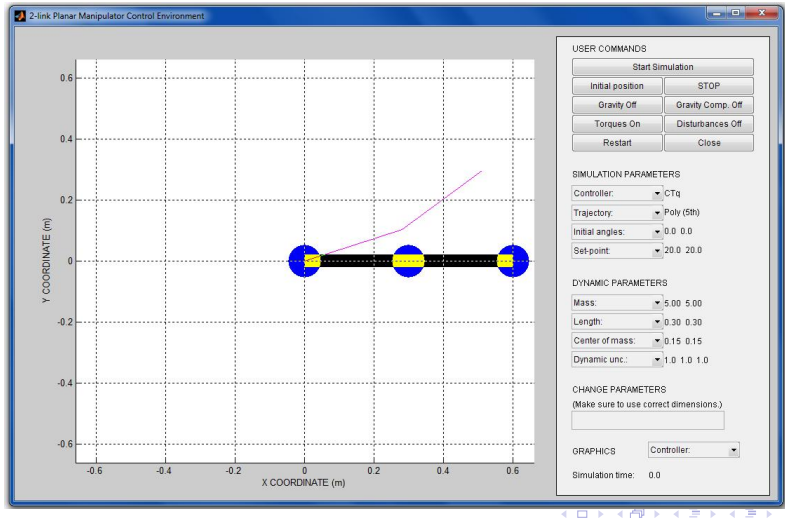


- KUKA KR 16: PTP(P1,P2)

# UARM e Ambiente de Controle

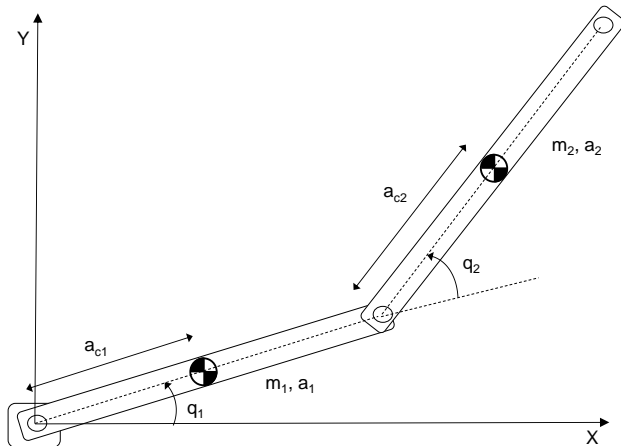


# Interface Gráfica



# Representação Esquemática do Manipulador

- Massas concentradas



# Cinemática Direta

- Cinemática direta de posição
- Dados  $q_1$  e  $q_2$ , obter  $(X, Y)$ :

$$X = a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$Y = a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_1 + q_2)$$

# Cinemática Direta

```
%Compute sum of joint angles
for j = 1:2,
    phi(j) = sum(theta(1:j));
end;
cphi = cos(phi);
sphi = sin(phi);

% Run forward kinematic to find out where joints are
X(1) = 0;
Y(1) = 0;
for j = 2:2+1,
    X(j) = X(j-1) + l(j-1)*cphi(j-1);
    Y(j) = Y(j-1) + l(j-1)*sphi(j-1);
end;

% Display the robot
for j = 1:2+1,
    set(motor(j), 'XData', X(j), 'YData', Y(j));
end;
set(link, 'XData', X, 'YData', Y);
```

# Modelo Dinâmico

- Equação dinâmica

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

- $M(q)$  - matriz de inércia
- $C(q, \dot{q})$  - matriz de forças centrípetas e de Coriolis
- $G(q)$  - vetor dos torques gravitacionais

# Modelo Dinâmico

- Equação dinâmica

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

- Elementos de  $M(q)$

$$M_{11}(q) = m_1 a_{c1}^2 + m_2(a_1^2 + a_{c2}^2 + 2a_1 a_{c2} \cos(q_2))$$

$$M_{12}(q) = M_{21}(q) = m_2(a_1 a_{c2} \cos(q_2))$$

$$M_{22}(q) = m_2 a_{c2}^2$$



# Modelo Dinâmico

- Elementos de  $C(q, \dot{q})$

$$C_{11}(q, \dot{q}) = -m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2$$

$$C_{12}(q, \dot{q}) = -m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 - m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2$$

$$C_{21}(q, \dot{q}) = m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_1$$

$$C_{22}(q, \dot{q}) = 0$$

- Elementos de  $G(q)$

$$G_1(q) = (m_1 g a_{c1} + m_2 g a_1) \cos(q_1) + m_2 g a_{c2} \cos(q_1 + q_2)$$

$$G_2(q) = m_2 g a_{c2} \cos(q_1 + q_2)$$

# Controle Proporcional-Derivativo

- Erro de acompanhamento de trajetória

$$e = q^d - q$$

- Controle Proporcional-Derivativo (PD)

$$\tau = K_p e + K_d \dot{e}$$

sendo  $K_p$  e  $K_d$  matrizes diagonais

- Valores altos de ganho para eliminar distúrbios
- Erro de regime devido aos torques gravitacionais

# Controle Proporcional-Integral-Derivativo

- Controle Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

$$\tau = K_p e + K_i \int e dt + K_d \dot{e}$$

- Valores altos de ganho para eliminar distúrbios
- Erro de regime nulo

# Controle PD com Compensação da Gravidade

- Controle Proporcional-Derivativo (PD) com Compensação da Gravidade

$$\tau = K_p e + K_d \dot{e} + G(q)$$

- Erro de regime nulo

# Linearização por Realimentação

- Dinâmica do robô manipulador

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

$$\tau = M(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q})$$

- Derivando o erro de acompanhamento de trajetória

$$\dot{e} = \dot{q}^d - \dot{q} \qquad \ddot{e} = \ddot{q}^d - \ddot{q}$$

- Substituindo  $\ddot{q}$

$$\ddot{e} = \ddot{q}^d - M(q)^{-1}[\tau - b(q, \dot{q})]$$

# Linearização por Realimentação

- Espaço de estados:  $x = [e \ \dot{e}]^T$

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \left( \ddot{q}^d - M(q)^{-1}[\tau - b(q, \dot{q})] \right)$$

- Definindo a variável de controle

$$u = \ddot{q}^d - M(q)^{-1}[\tau - b(q, \dot{q})]$$

- Sistema linear

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u$$

# Controle por Torque Calculado

- Controle por Torque Calculado

$$\tau = M(q)(\ddot{q}^d - u) + b(q, \dot{q})$$

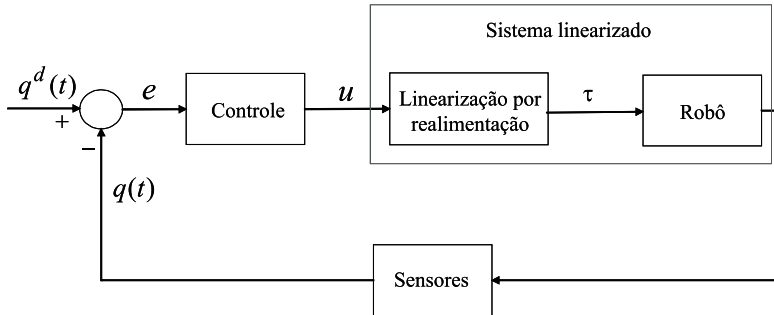
- Substituindo na equação dinâmica

$$M(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) = M(q)(\ddot{q}^d - u) + b(q, \dot{q})$$

$$\ddot{e} = u$$

# Controle por Torque Calculado

- Diagrama de blocos





# Controle por Torque Calculado

- Controle por Torque Calculado + Proporcional-Derivativo (PD)

$$u = -K_d \dot{e} - K_p e$$

$$\tau = M(q)(\ddot{q}^d + K_d \dot{e} + K_p e) + b(q, \dot{q})$$

- Equação dinâmica do erro

$$\ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e = 0$$

# Controle por Torque Calculado

- Valores estimados de  $M(q)$  e  $b(q, \dot{q})$

$$\tau = \hat{M}(q)(\ddot{q}^d - u) + \hat{b}(q, \dot{q})$$

- Substituindo na equação dinâmica

$$M(q)\ddot{q} + b(q, \dot{q}) = \hat{M}(q)(\ddot{q}^d - u) + \hat{b}(q, \dot{q})$$

- Somando e subtraindo  $\hat{M}(q)\ddot{q}$

$$\ddot{e} = u + M(q)^{-1} \left[ M(q) - \hat{M}(q) \right] \ddot{q} + M(q)^{-1} \left[ b(q, \dot{q}) - \hat{b}(q, \dot{q}) \right]$$

# Controle por Torque Calculado

- Controle por Torque Calculado + PD

$$\tau = \hat{M}(q)(\ddot{q}^d + K_d\dot{e} + K_p e) + \hat{b}(q, \dot{q})$$

- Equação dinâmica do erro

$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = d$$

sendo

$$d = \Delta\ddot{q} + M(q)^{-1}[b(q, \dot{q}) - \hat{b}(q, \dot{q})]$$

$$\Delta = M(q)^{-1}[M(q) - \hat{M}(q)]$$

# Parametrização Linear

- Propriedade de robôs manipuladores

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta$$

sendo  $\theta$  o vetor de parâmetros do manipulador e  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$  a matriz de regressão.

- Elementos de  $M(q)\ddot{q}$

$$M(q)\ddot{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 a_{c1}^2 \ddot{q}_1 + \mathbf{m}_2 (a_1^2 + a_{c2}^2 + 2a_1 a_{c2} \cos(q_2)) \ddot{q}_1 \\ \quad + \mathbf{m}_2 (a_{c2}^2 + a_1 a_{c2} \cos(q_2)) \ddot{q}_2 \\ \mathbf{m}_2 (a_{c2}^2 + a_1 a_{c2} \cos(q_2)) \ddot{q}_1 + \mathbf{m}_2 a_{c2}^2 \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

# Parametrização Linear

- Vetor dos torques de Coriolis e centrípetos

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} -2\mathbf{m}_2 a_1 a_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \mathbf{m}_2 a_1 a_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ \mathbf{m}_2 a_1 a_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

- Vetor dos torques gravitacionais

$$G(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 g a_{c1} \cos(q_1) + \mathbf{m}_2 g a_1 \cos(q_1) + \mathbf{m}_2 g a_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ \mathbf{m}_2 g a_{c2} \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

# Parametrização Linear

- Definindo:  $\theta = [m_1 \ m_2]^T$
- Matriz de regressão

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ 0 & y_{22} \end{bmatrix}$$

$$y_{11} = a_{c1}^2 \ddot{q}_1 + g a_{c1} \cos(q_1)$$

$$y_{12} = (a_1^2 + a_{c2}^2 + 2a_1 a_{c2} \cos(q_2)) \ddot{q}_1 + (a_{c2}^2 + a_1 a_{c2} \cos(q_2)) \ddot{q}_2 \\ - a_1 a_{c2} \sin(q_2) (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + g a_1 \cos(q_1) + g a_{c2} \cos(q_1 + q_2))$$

$$y_{22} = (a_{c2}^2 + a_1 a_{c2} \cos(q_2)) \ddot{q}_1 + a_{c2}^2 \ddot{q}_2 + a_1 a_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \\ + g a_{c2} \cos(q_1 + q_2))$$

# Controle Adaptativo baseado no Torque Calculado

- Torque Calculado + PD

$$\tau = \hat{M}(q)(\ddot{q}^d + K_d\dot{e} + K_p e) + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q)$$

- Valores estimados dos parâmetros são mantidos fixos
- Controle adaptativo: valores estimados dos parâmetros variam com o tempo
- Pode-se reescrever

$$\tau = \hat{M}(q)(\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e) + \hat{M}(q)\ddot{q} + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q)$$

$$\tau = \hat{M}(q)(\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e) + Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\hat{\theta}$$

# Controle Adaptativo baseado no Torque Calculado

- Considerando:  $\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta$
- Equação do erro:

$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = \hat{M}^{-1}(q)Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{\theta}$$

- sendo  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$
- Espaço de estados:  $x = [e \quad \dot{e}]^T$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \hat{M}^{-1}(q)Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\tilde{\theta}$$



# Controle Adaptativo baseado no Torque Calculado

- Função de Lyapunov

$$V(x) = x^T P x + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} > 0$$

- $P \Rightarrow$  Matriz simétrica definida positiva
- $\Gamma \Rightarrow$  Matriz diagonal definida positiva

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & x^T P (A x + B \hat{M}^{-1}(q) Y(\cdot) \tilde{\theta}) + (A x + B \hat{M}^{-1}(q) Y^T(\cdot) \tilde{\theta})^T P x \\ & + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \end{aligned}$$

# Controle Adaptativo baseado no Torque Calculado

- Manipulando

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x + 2\tilde{\theta}^T (\Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} + Y^T(\cdot) \hat{M}^{-1}(q) B^T P x)$$

- $Q \Rightarrow$  Matriz simétrica definida positiva que satisfaz a equação de Lyapunov:

$$A^T P + P A = -Q$$

- Definindo:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma Y^T(\cdot) \hat{M}^{-1}(q) B^T P x$$

- Então

$$\dot{V}(x) = -x^T Q x < 0$$

# Controle Adaptativo baseado no Torque Calculado

- Parâmetro  $\theta$  é constante
- Lembrando:  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$
- Lei de adaptação:

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \hat{M}^{-1}(q) B^T P x$$

- $x$  é assintoticamente estável
- $\tilde{\theta}$  limitado se  $\hat{M}^{-1}(q)$  existe

# Controle Adaptativo baseado no Torque Calculado

- Resumo
- Lei de controle:

$$\tau = \hat{M}(q)(\ddot{q}^d + K_d \dot{e} + K_p e) + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q)$$

- Lei de adaptação:

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma Y^T(q, \dot{q}, \ddot{q}) \hat{M}^{-1}(q) B^T P x$$

- Equação de Lyapunov:

$$A^T P + P A = -Q$$



## Controle Torque Calculado + PD + Robusto $\mathcal{H}_\infty$

- Controle Torque Calculado + PD + Robusto  $\mathcal{H}_\infty$  Linear

$$\tau = \hat{M}(q)(\ddot{q}^d + K_d \dot{e} + K_p e + u_R) + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q)$$

- Equação no espaço de estados com distúrbio  $w$

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u_R + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w$$
$$y = e = [I \ 0]x$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u_R + B_2 w \\ y &= C_2 x \end{aligned}$$

# Controle $\mathcal{H}_\infty$ linear

- Considere o sistema linear

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u$$

$$z = C_1 x + D_{12} u$$

$$y = C_2 x + D_{21} w$$

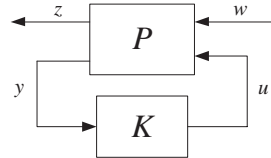
- Controlador  $K$

$$\dot{x} = A_K x + B_K y$$

$$u = C_K x + D_K y$$

- Controle sub-ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  linear

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$$



# Controle $\mathcal{H}_\infty$ linear

- Solução

$$A_K = A - B_2 B_2^T X_\infty + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} Y C_2^T C_2$$

$$B_K = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} Y C_2^T$$

$$C_K = -B_2^T X$$

$$D_K = 0$$

- $X_\infty$  e  $Y_\infty$  são soluções das equações algébricas de Ricatti

$$A^T X_\infty + X_\infty A + \gamma^{-2} X_\infty (B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty + C_1^T C_1 = 0$$

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T + \gamma^{-2} Y_\infty (C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y_\infty + B_1^T B_1 = 0$$



# Controle via Representação Quasi-LPV

- Sistema Linear a Parâmetros Variantes (LPV)

$$\dot{x} = A(\rho(t))x + B(\rho(t))u,$$

- Sistema Quase-LPV

$$\dot{x} = A(\rho(x))x + B(\rho(x))u,$$

- Estado: erro de acompanhamento de trajetória

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} - \dot{q}^d \\ q - q^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{q} \end{bmatrix}$$

# Controle via Representação Quasi-LPV

- Dinâmica estimada do robô manipulador

$$\tau = \hat{M}(q)\ddot{q} + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{G}(q)$$

- Representação Quasi-LPV

$$\dot{\tilde{x}} = A(q, \dot{q})\tilde{x} + Bu + Bw$$

sendo  $w = \hat{M}^{-1}(q)\delta(q, \dot{q}, \ddot{q})$

- $\delta(q, \dot{q}, \ddot{q}) \Rightarrow$  incertezas paramétricas e distúrbios externos

# Controle via Representação Quasi-LPV

- Matrizes dinâmicas

$$A(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\hat{M}^{-1}(q)\hat{C}(q, \dot{q}) & 0 \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Torques aplicados

$$\tau = \hat{M}(q)(\ddot{q}^d + u) + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}^d + \hat{G}(q)$$

# Controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas LPV

- Considere o sistema LPV:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\rho(t))x + B_1(\rho(t))w + B_2(\rho(t))u, \\ z_1 &= C_1(\rho(t))x, \\ z_2 &= C_2(\rho(t))x + u,\end{aligned}$$

- $\rho(t) \in P \subset \mathbb{R}^m$  e  $|\dot{\rho}_i| \leq \nu_i$  com  $\nu_i \geq 0$ .
- Ganho  $\mathcal{L}_2 \leq \gamma$  no intervalo  $[0, T]$  se:

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt$$

# Controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas LPV

- Se existe  $X(\rho(x)) > 0$  tal que

$$\begin{bmatrix} E(\rho) & X(\rho)C_1^T(\rho) & B_1(\rho) \\ C_1(\rho)X(\rho) & -I & 0 \\ B_1^T(\rho) & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

$$E(\rho) = -\sum_{i=1}^m \pm \left( \nu_i \frac{\partial X}{\partial \rho_i} \right) + \hat{A}(\rho)X(\rho) + X(\rho)\hat{A}(\rho)^T - B_2(\rho)B_2^T(\rho),$$

- o sistema em malha fechada possui ganho  $\mathcal{L}_2 \leq \gamma$  se

$$u = -(B_2(\rho)X^{-1}(\rho) + C_2(\rho))x$$

# Sumário

- Controle Independente de Juntas - Demais juntas consideradas como distúrbio
- Controle por Torque Calculado - Dependente do modelo
- Controle Adaptativo baseado no Torque Calculado - Estimativa os parâmetros do modelo
- Controle Robusto ( $\mathcal{H}_\infty$  Linear, Representação Quase-LPV) - Imune a incertezas e atenuação de distúrbios

# Bibliografia

- CRAIG, J.J.; *Adaptive Control of Mechanical Manipulators* - Addison-Wesley Pub. Co., Reading, MA (1985).
- CRAIG, J.J.; *Introduction to Robotics: Mechanics and Control* - Addison-Wesley Pub. Co., Reading, MA, 2nd ed. (1989).
- DAWSON, D.M., et. al.; *Robust Control for the Tracking of Robot Motion* - International Journal of Control, vol. 52, no. 3, pp. 581-595, (1990).
- LEWIS, F.L.; ABDALLAH, C.T.; DAWSON, D.M.; *Control of Robot Manipulators* - Macmillan. (1993)
- PAUL, R.P.; *Trajectory Calculation and Servoing of a Computer Controlled Arm* Technical Report AIM-177. Stanford University, Artificial Intelligence Laboratory (1972).
- SCIAVICCO, L.; SICILIANO, B; *Modeling and Control of Robot Manipulators* - McGraw-Hill. (1996).
- SLOTINE, J.J.; LI, W.; *On the adaptive control of robot manipulators* - International Journal of Robotics Research, vol. 6, no. 3, p. 49 - 59 (1987).
- SPONG, M. W.; VIDYASAGAR, M.; *Robot Dynamics and Control* - New York : Wiley, (1989).