

# Sobre Cabos e Cordas

*Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti*

Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações  
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Caixa Postal 61548 – CEP 05424-970 – São Paulo, SP, Brasil  
e-mail: [pauletti@usp.br](mailto:pauletti@usp.br)

## ABSTRACT

*This work addresses the static and dynamic behavior of cables and strings. Although they may be considered the simplest of all tension systems, cable and strings allow us to introduce some fundamental concepts of the general behavior of this type of structural system. Initially some historical aspects of the study of cables and strings are recollected, followed by the basic formulation of the statics of the hanging cable, under transversal loads. Afterwards, some charts to the dimensioning of the border cables of membrane structures are presented. Finally, a brief study on the dynamic behavior of linear and nonlinear strings is presented, including a model to the self-excited vibrations of the violin string.*

## RESUMO

Este trabalho apresenta algumas considerações sobre o comportamento estático e dinâmico de cabos e cordas. Embora possam ser considerados os casos mais simples de tensoestruturas –e justamente por isto– o estudo desses sistemas permite introduzir alguns dos conceitos fundamentais do comportamento geral das tensoestruturas, sejam elas de geometria simples ou complexa, sejam cabos ou membranas. Inicialmente, o trabalho resenha alguns aspectos históricos para em seguida apresentar a formulação básica do equilíbrio do cabo suspenso, sujeito a carregamentos transversais. Logo após, detalha-se a construção de um ábaco particularmente útil para o dimensionamento de cabos de borda de estruturas de membrana. Finalmente, inspecionam-se os elementos básicos do comportamento dinâmico das cordas, incluindo um modelo mínimo para o estudo das vibrações da corda do violino, exemplo clássico de oscilação auto-excitável.

## 1. UM POUCO DE HISTÓRIA<sup>1</sup>

As primeiras considerações teóricas sobre o comportamento estático e dinâmico de cabos e cordas remontam provavelmente aos gregos. Há cerca de 2500 anos, Pitágoras descobriu que o tom de um som depende do comprimento da corda que o produz e que duas cordas semelhantes, tracionadas com a mesma força, produzem tons distantes de uma oitava, quando uma das cordas tiver exatamente duas vezes o comprimento da outra. A exatidão das relações da harmonia musical foi tão reveladora que Pitágoras sonhou encontrar nelas as leis que governavam o movimento das estrelas [RIGDEN, 85]. Após o período helênico, novos avanços teóricos no campo das tensoestruturas –e em geral em toda a Mecânica–, somente viriam a ocorrer durante a Renascença. Segundo COWAN [77], uma importante razão para tanto foi a disposição do cientista renascentista à experimentação. Assim, Mersenne determinou experimentalmente as leis básicas do movimento de uma corda esticada em 1636. O assunto também despertou o interesse de Galileu, na mesma época. A idéia de que uma dada corda tivesse muitos modos de vibração, por sua vez, foi estabelecida por Noble e Pigott em 1676 [IRVINE, 81].

Antes disso, Leonardo da Vinci (1452--1519) dedicou sua atenção –entre tantos outros problemas da Mecânica por ele estudados– ao problema da catenária e do equilíbrio das cordas. COWAN [77] observa que, enquanto Leonardo é descrito como um gênio científico por muitos historiadores, sua contribuição para o desenvolvimento da Mecânica é qualificada por outros (como TRUESDELL) como negligenciável. Com efeito, os trabalhos de Leonardo somente foram publicados postumamente e, embora suas anotações fossem conhecidas já de há muito tempo, boa parte de seus escritos não foram transcritos senão no nosso século. De qualquer forma, é nos desenhos de Leonardo que aparece pela primeira vez a idéia do *paralelograma de forças*, redescoberta pelo belga Stevin de Bruges em 1586. ANTMAN [95], recorda ainda que se deve a Leonardo a primeira formulação –porquanto equivocada– do problema da forma catenária. Também Galileu, em seu *Discurso sobre Duas Novas Ciências* (1638), especulou sobre a forma de uma corrente suspensa e concluiu erroneamente que esta fosse parabólica –em analogia com a trajetória de um projétil. Que a parábola fosse a forma de corda inextensível sob carregamento vertical uniformemente distribuído era um resultado já encontrado por Beeckman em 1615 e –após o equívoco de Galileu– reencontrado por Huygen em 1646 e por Pardies em 1673<sup>2</sup>.

Em 1675, na mesma ata da *Royal Society* onde publicou sua famosa lei de proporcionalidade, Hooke enunciou (na forma de um anagrama) que um arco incompressível, livre de momento, suportando seu próprio peso, poderia ser obtido invertendo-se a catenária, qualquer que fosse sua forma. De acordo

---

<sup>1</sup> Estas notas históricas foram extraídas principalmente de COWAN [77], IRVINE [81] e ANTMAN [95]. Todos estes autores remetem-se a TRUESDELL [60] que porém não foi diretamente consultado para a redação deste texto.

<sup>2</sup> Tanto Huygen como Pardies também notaram que a forma da corrente suspensa não poderia ser uma parábola. Porém Huygens incorretamente afirmou que a velária fosse parabólica, reconhecendo seu erro em 1668. Em 1691 Jacques Bernoulli corretamente afirmou que a velária era uma circunferência. [Antman, 95] (segundo Irvine, cerca de dois séculos se passaram

com COWAN [77], o anagrama de Hooke somente foi decifrado por Richard Waller, em 1705, e dizia: “*As hangs the flexible line, so but inverted will stand the rigid arch*”. Antes disso, a idéia de se empregar a catenária para definir a forma de um arco de alvenaria também já fora considerada em 1695 por Philippe de La Hire, no seu *Traité de Méchanique*, e por Gregory, em 1697, no trabalho *On the properties of the Catenaria* [COWAN, 77].

Em 1690 Jakob Bernoulli<sup>3</sup> desafiou o mundo científico, propondo um concurso para encontrar a forma da catenária. Ao cabo de um ano, Johann Bernoulli, Leibniz e Huygens haviam resolvido o problema. Segundo IRVINE, havia grande rivalidade entre os participantes do concurso, ficando difícil definir a quem pertenceu a primazia da descoberta. A solução de Huygens baseou-se em princípios geométricos, enquanto Leibniz e Johann Bernoulli usaram o cálculo, naquela época uma invenção recente. A maior generalidade do cálculo permitiu aos irmãos Bernoulli formular também a equação diferencial de um elemento de corrente sob vários carregamentos, incorporando ainda o efeito do alongamento da corrente, conforme a lei de Hooke. Além disso, Johann Bernoulli ajudou a lançar as bases para o cálculo das variações, mostrando que ao se manter o centro de gravidade da corrente o mais baixo o possível, decorriam as mesmas equações. As primeiras investigações acerca do princípio dos trabalhos virtuais são também devidas a ele.

A partir desses trabalhos pioneiros, floresceram as teorias estruturais das pontes suspensas. Em 1823, Navier estendeu a teoria do equilíbrio estático do cabo parabólico de modo a incluir o efeito dos carregamentos ocasionais [BUONAPARTE, 92]. O trabalho de Navier perdurou, por mais de 50 anos como a obra máxima sobre pontes suspensas [SGUERRI, 95]. Derivadas da *Memoire* de Navier, surgiram durante o século XIX teorias mais sofisticadas acerca do comportamento estático das pontes suspensas, as teorias de Rankine (meados do século XIX), a teoria elástica (Josef Melan, 1888 e David B. Steinman, 1913--1929) e a teoria da deflexão (J. Melan em 1888).

## 1.1. EFEITOS DINÂMICOS

Embora os gregos já se indagassem sobre os fenômenos ligados as vibrações das cordas, foi somente com Galileu e Mersenne, no século XVII, que o assunto foi tratado de forma metódica, levando ao estabelecimento da teoria matemática da corda vibrando, na primeira metade do século XVIII. Quanto à importância do tópico para o desenvolvimento da Mecânica, não se pode fazer melhor que (repetindo IRVINE [81]) citar Lord Rayleigh, que escreveu:

---

antes que o conhecimento desse fato se disseminasse: a solução foi redescoberta em 1794 pelo engenheiro russo Nicholas Fuss, genro de Euler, encarregando de projetar uma ponte sobre o rio Neva em São Petersburgo).

<sup>3</sup> Jakob Bernoulli (1654---1705). Matemático suíço, professor em Basel, tornou-se conhecido por suas contribuições à teoria da elasticidade à mecânica dos fluidos e às probabilidades. Entre os estudantes de Jakob Bernoulli incluem-se seu sobrinho Niklaus Bernoulli (1687---1759), que contribuiu para a teoria das probabilidades e das séries infinitas, e seu irmão mais novo Johann Bernoulli (1667-1748). Este último influenciou profundamente o desenvolvimento do cálculo, tornando-se sucessor de Jakob em Basel e tendo Leonhard Euler e Gabriel Cramer entre seus estudantes. Seu filho Daniel Bernoulli é conhecido por seus trabalhos na mecânica dos fluidos e na teoria cinética dos gases (nota extraída de KREYSIG [93]).

*“Para o matemático as cordas devem sempre possuir um interesse especial, tendo sido o campo de batalha onde se travaram as controvérsias de D’Alembert, Euler [Daniel] Bernoulli e Lagrange, ligadas à natureza da solução das equações diferenciais parciais” .*

As indagações teóricas iniciaram-se com Taylor em 1713. Em 1738 Daniel Bernoulli (filho de Johann) publicou uma solução para o problema das freqüências naturais de uma corrente suspensa por uma extremidade (a solução foi dada na forma de uma série infinita, hoje conhecida como uma função de Bessel de ordem zero). Por sua vez, D’Alembert foi o primeiro a enunciar, em 1750, a equação diferencial da corda vibrando. Em 1755, Daniel Bernoulli demonstrou que a vibração de uma corda poderia ser decomposta em formas modais independentes. Em 1760, Lagrange usou um modelo discreto de corda como ilustração da aplicação de sua equação de movimento. Este trabalho, entre os primeiros a resolver os problemas de vibração por diferenças finitas foi incluído em seu celebrado livro *Mécanique Analytique* de 1788. Em 1764, Euler obteve a equação do movimento de uma membrana retesada em termos de coordenadas polares, e então procedeu a uma solução por meio de separação de variáveis, parte desta solução sendo uma série infinita (a qual representou a primeira aparição de uma função de Bessel de primeira ordem). Em seguida, em 1766 Euler expressou as equações do movimento em termos de coordenadas cartesianas. Em 1820, Poisson estendeu a equação de D’Alembert para o movimento de uma corda sujeita a ação de um sistema genérico de forças. Em 1829, o mesmo Poisson resolveu o problema da membrana retangular, sendo esta uma das primeiras aplicações da série de Fourier para problemas outros que não a transferência de calor [IRVINE, 81], [ANTMAN, 95].

A influência do peso próprio sobre as oscilações, ou em outras palavras, as vibrações do cabo suspenso, foi considerada pela primeira vez por J.H. Rohrs, em 1851, em um trabalho em que alguns dos resultados cruciais parecem ter sido derivados por Stokes. O trabalho de Rohrs foi completado por E.J. Routh, que em 1868 derivou a solução exata para a vibração vertical, simétrica, de um cabo heterogêneo e inextensível. A partir daí houve um período de letargia na pesquisas, quebrado apenas em 1940, com o colapso da Ponte de Tacoma. Bastaram então duas semanas para que Theodore von Kármán explicasse o colapso de Tacoma, em termos de efeitos aerodinâmicos, aplicando os conceitos para se considerar as oscilações autoexcitáveis, já do domínio dos engenheiros de outros campos [ADDIS, 94].

Assim, se por um lado o acidente de Tacoma refreou por algum tempo a proposição de novas pontes suspensas, por outro lado estimulou o aprofundamento da compreensão teórica do comportamento dessas estruturas, além de abrir novamente o caminho para as pontes estaiadas. Em 1941, W. Rannie e T. von Kármán independentemente derivaram resultados para modos planos simétricos e anti-simétricos de um cabo inextensível entre 4 apoios. Em 1945, G.S. Vincent ampliou estas análises para o caso de cabos extensíveis, mesmo ano em que G.F. Carrier incorporou a extensibilidade para o estudo das cordas, obtendo pela primeira vez um modelo de corda não-linear [IRVINE, 81]. O

problema das oscilações auto-excitáveis da corda do violino, que configura um tipo de não-linearidade associado não à descrição da corda, mas sim ao mecanismo de excitação, foi pela primeira vez estudado por Rayleigh, em [RAYLEIGH, 45]. A partir daí, modelos de complexidade crescente têm sido propostos para este problema, sendo que um resumo da teoria subjacente pode ser encontrado em SCHUMACHER [95].

## 2. EQUILÍBRIO DO CABO SUSPENSO

O cabo inextensível, imponderável, perfeitamente flexível mostrado na figura 1a está sujeito a um carregamento transversal  $w = w(x)$ . O equilíbrio de um segmento  $[0,x]$  qualquer do cabo, desde a origem até um ponto arbitrário de corte, identificado pela abscissa  $x$  requer:

(a) equilíbrio de forças na direção horizontal:

$$-T_0 \cos \theta_0 + T \cos \theta = 0 \quad \forall x \quad (2.1)$$

ou seja, a componente horizontal da tração no cabo,  $H = T \cos \theta = T_0 \cos \theta_0$ , é constante ao longo do cabo!

(b) equilíbrio de forças na direção vertical:

$$-T_0 \sin \theta_0 - \int_0^x w dx + T \sin \theta = 0 \quad , \forall x \quad (2.2)$$

Considerando que  $T \sin \theta = H \tan \theta = V(x)$ , onde  $V(x)$  é a componente vertical da tração no cabo, tem-se

$$V - V_0 = \int_0^x w dx \quad , \forall x \quad (2.3)$$

(c) equilíbrio de momentos:

o equilíbrio de momentos do segmento  $[0,x]$  do cabo em relação ao ponto O, recordando que o cabo não desenvolve esforços internos de flexão, fornece

$$V \cdot x - H \cdot y - \int_0^x (x \cdot w) dx = 0 \quad (2.4)$$

Derivando em relação à  $x$ , obtém-se

$$V'x + V - Hy' - x \cdot w = 0 \quad (2.5)$$

mas, como se percebe do exame de (2.3), a componente vertical da tensão  $V$  é uma primitiva de  $w(x)$ , isto é  $V' = w$ , e portanto:

$$y' = \frac{V}{H} = \frac{1}{H} \int w dx \quad (2.6)$$

Integrando novamente, tem-se

$$y = \frac{1}{H} \int \left( \int w dx \right) dx \quad (2.7)$$

equação que pode ser usada para se determinar a curva da forma do cabo, dada por  $y = y(x)$ . Obviamente, ao mesmo resultado poderia ter-se chegado mais diretamente, observando, após (2.3), que como o cabo não desenvolve flexão, T deve ser tangente à configuração do cabo, ou seja  $y' = \tan \theta = \frac{V}{H}$ . Além disso, derivando a equação (2.6), ao invés de integrá-la, chega-se à clássica

equação diferencial que governa o equilíbrio do cabo suspenso ou seja  $y'' = \frac{w}{H}$ .

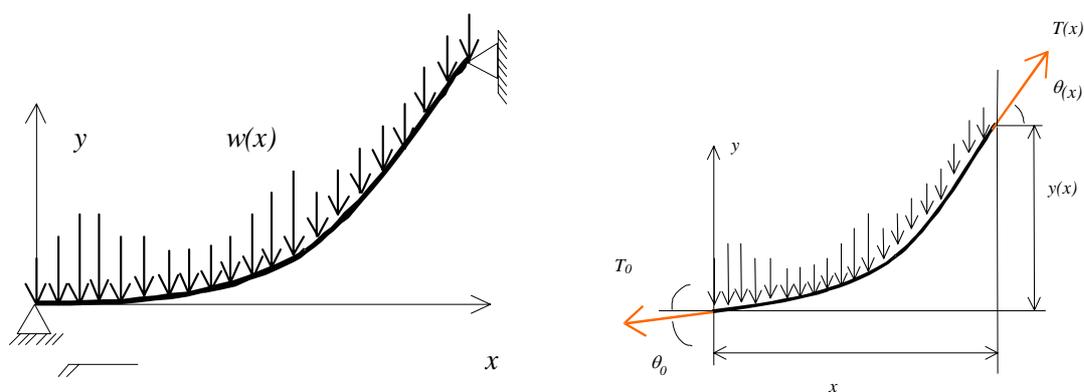


Figura 1. (a) Cabo inextensível, imponderável, perfeitamente flexível, sujeito a um carregamento transversal  $w = w(x)$ . (b) diagrama de corpo livre do cabo, cortado em um ponto  $x$  qualquer.

## 2.1. CABO PARABÓLICO

Ao se trabalhar com (2.7) tanto se pode fixar a componente horizontal da tração no cabo  $H$ , como esta pode ser determinada a partir de uma flecha conhecida ou do comprimento total do cabo. As constantes de integração são definidas a partir das condições de contorno do cabo. Por exemplo, considerando um carregamento uniformemente distribuído  $w(x) = w_0$ , admitindo-se definidos o vão  $L$  e a flecha  $h$ , os apoios à mesma altura  $h$ , e tomando-se a origem das coordenadas no ponto médio do cabo (Figura 2), a integração de (2.7) sujeita às condições de contorno  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  fornece:

$$y = \frac{w_0}{2H} x^2 \quad (2.8)$$

ou seja, a funicular de um carregamento uniformemente distribuído é uma parábola. A constante  $H$  pode ser determinada observando-se que  $y\left(\frac{L}{2}\right) = h$  e portanto  $H = \frac{w_0 L^2}{8h}$ , de sorte que

$$y = \frac{4h}{L^2} x^2 \quad (2.9)$$

A tração em qualquer ponto do cabo é  $T = \frac{H}{\cos \theta}$ . A máxima tração ocorre nos apoios, onde  $\cos \theta$  é

mínimo. A componente vertical da tração, em correspondência aos apoios é igual a  $\frac{w_0 L}{2}$  e portanto

$$T_{\max} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{w_0 L}{2}\right)^2} = \frac{w_0 L}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{h}\right)^2} \quad (2.10).$$

O comprimento de um elemento diferencial de cabo é

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (2.11)$$

Para o presente caso, portanto, o comprimento total do cabo parabólico é

$$\ell = \int_0^{\frac{L}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{8h}{L^2} x\right)^2} dx \quad (2.12)$$

Resulta

$$\ell = \frac{L}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{4h}{L}\right)^2} + \frac{L}{4h} \ln \left( \frac{4h}{L} + \sqrt{1 + \left(\frac{4h}{L}\right)^2} \right) \right] = \frac{L}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{4h}{L}\right)^2} + \frac{L}{4h} \operatorname{arcsin} \left( \frac{4h}{L} \right) \right] \quad (2.13)$$

Para pequenas flechas,  $h \ll L$ , a seguinte expansão pode ser adotada<sup>4</sup>:

$$\ell \approx L + \frac{8h^2}{3L} - \frac{32h^4}{5L^3} + O(h^6)$$

Uma breve inspeção da equação acima permite evidenciar uma característica importante das tensoestruturas. Tomando-se, por conveniência, a expansão da equação (2.13) truncada no segundo termo, e lembrando da hipótese de inextensibilidade do cabo, tem-se

$$\ell(L, h) \cong L + \frac{8}{3L} h^2 = \text{cte}$$

e logo

$$\frac{\partial \ell}{\partial L} dL + \frac{\partial \ell}{\partial h} dh = 0,$$

donde se pode extrair uma relação entre a variação  $\Delta h$  da flecha do cabo, em função da variação  $\Delta L$  da distância entre os apoios:

$$\frac{16h}{3L} \Delta h = \left( 1 - \frac{8h^2}{3L^2} \right) \Delta L$$

que, para  $\frac{h}{L} \ll 1$ , fornece  $\Delta h = \frac{3L}{16h} \Delta L$ , isto é, para pequenas flechas, pequenos deslocamentos dos apoios provocam proporcionalmente grandes variações da flecha, evidenciando a importância adquirida pela flexibilidade dos apoios, no que diz respeito à resposta das estruturas de cabo.

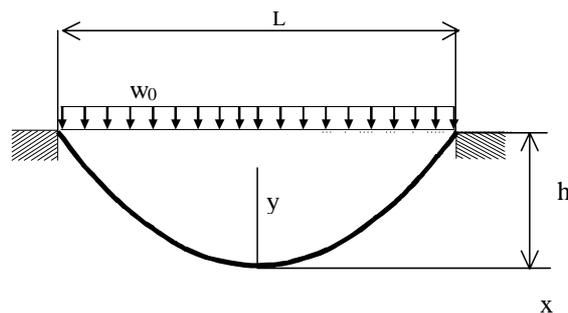


Figura 2 – Cabo sujeito a carregamento uniformemente distribuído ao longo do vão.

<sup>4</sup> A expressão foi obtida usando o processador simbólico Maple, mas é fornecida também por diversas referências, por exemplo [NORRIS, 60] e [SCALZI, 69], citados por [SHODEK, 92].

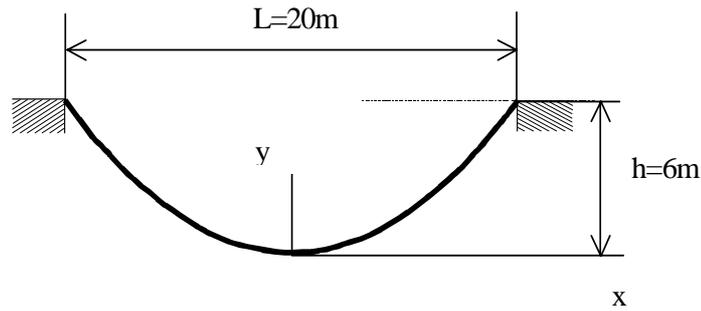


Figura 3 – Cabo sujeito ao peso próprio

## 2.2. CABO SUJEITO AO PESO PRÓPRIO

O carregamento do peso próprio depende do comprimento de cabo e não da sua projeção horizontal. Ou seja, no caso do peso próprio tem-se  $w = w(s)$  onde  $s$  é a função comprimento de arco. Recordando que o comprimento de um elemento diferencial de cabo é dado por (2.11) e levando em conta (2.6), tem-se

$$ds = dx \sqrt{1 + \left( \frac{1}{H} \int w(s) ds \right)^2} \quad (2.14)$$

ou seja, separando variáveis e integrando

$$x = \int \frac{ds}{\sqrt{1 + \left( \frac{1}{H} \int w(s) ds \right)^2}} \quad (2.15)$$

As constantes de integração dependem das condições de contorno do cabo. Por exemplo, para o cabo da Figura 3, simétrico em relação à origem, sendo  $y = y(x)$  a curva que define a sua forma, e admitindo um peso uniforme, por unidade de comprimento,  $w(x) = w_0$ , tem-se

$$x = \int \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{1}{H^2} \left( \int w_0 ds \right)^2}} = \int \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{1}{H^2} (w_0 s + C_1)^2}} \quad (2.16)$$

Mediante a substituição de variáveis:  $u = \frac{1}{H} (w_0 s + C_1)$  ;  $\frac{du}{ds} = \frac{w_0}{H}$  tem-se

$$x = \frac{H}{w_0} \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{H}{w_0} (\text{arc sinh } u + C_2) = \frac{H}{w_0} \left( \text{arc sinh} \left( \frac{1}{H} (w_0 s + C_1) \right) + C_2 \right) \quad (2.17)$$

Para determinar as constantes de integração, considere-se que  $y' = \frac{1}{H} \int w(s) ds = \frac{1}{H} (w_0 s + C_1)$  e

que para  $x = 0$  tem-se  $s(0) = 0$  e  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$  e, portanto  $C_1 = C_2 = 0$ .

Logo

$$x = \frac{H}{w_0} \text{arc sinh} \frac{w_0 s}{H} \quad (2.18)$$

O comprimento da corda em função de  $x$  é dado portanto por

$$s = \frac{w_0}{H} \sinh \frac{w_0}{H} x \quad (2.19)$$

e considerando que  $y' = \frac{w_0 s}{H} = \frac{w_0}{H} \sinh \left( \frac{w_0}{H} x \right)$  chega-se a

$$y = \frac{H}{w_0} \cosh \left( \frac{w_0}{H} x \right) + C_3 \quad (2.20)$$

Finalmente, aplicando-se a condições de contorno  $y(0) = 0$  resulta  $C_3 = -\frac{H}{w_0}$  e, chega-se à equação da funicular do cabo homogêneo e uniforme, simplesmente suspenso (*catenária*):

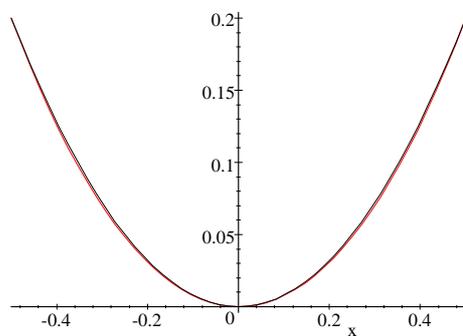
$$y = \frac{H}{w_0} \left[ \cosh \left( \frac{w_0}{H} x \right) - 1 \right] \quad (2.21)$$

A constante  $H$  é obtida usando-se a condição de que  $y \left( \frac{L}{2} \right) = h$  e portanto

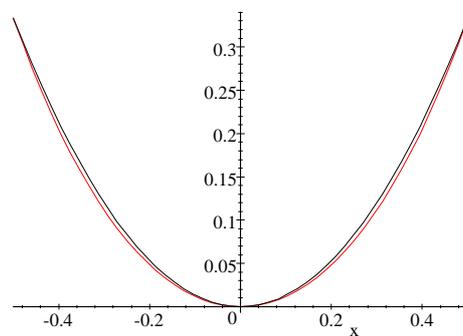
$$h = \frac{H}{w_0} \left[ \cosh \left( \frac{w_0}{2H} \right) - 1 \right] \quad (2.22)$$

Para o cabo da Figura 3, admitindo, por exemplo,  $w_0 = 5N/m$ ,  $h = 6m$ ,  $L = 20m$ , a resolução numérica da equação transcendental (1.22) fornece  $H = 45,8kN$ , o que finalmente define a deflexão do cabo,  $y = 9,16 \left[ \cosh(0,109x) - 1 \right]$ , o comprimento do cabo  $\ell = s \left( x = \frac{L}{2} \right) = 24,2m$  e a máxima tensão, em correspondência aos apoios  $T_{\max} = 75,9N$ .

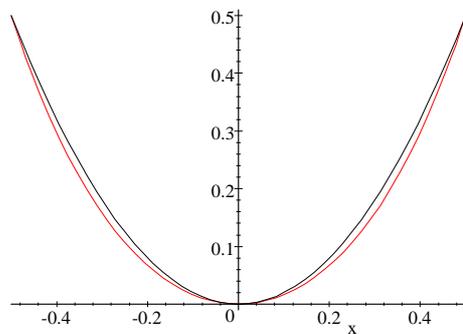
Em muitas circunstâncias da prática, a relação entre a flecha e o vão é pequena, digamos  $\frac{h}{L} \approx \frac{1}{10}$ . Nestes casos, a catenária praticamente se confunde com a parábola. A figura 4 compara parábolas e catenárias de mesma flecha  $h$  e mesmo vão  $L$ , para diferentes relações  $\frac{h}{L}$ ; em todos os casos, a catenária envolve a parábola.



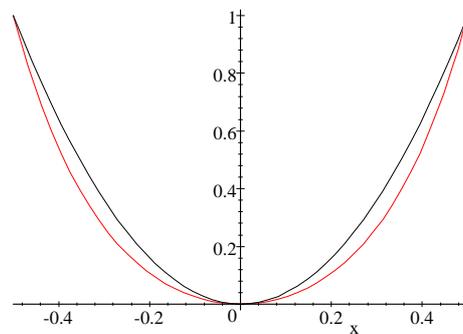
(a)  $h = \frac{L}{5}$



(b)  $h = \frac{L}{3}$



(c)  $h = \frac{L}{2}$



(d)  $h = L$

Figura 4 – Comparação entre parábolas e catenárias, para diferentes relações  $\frac{h}{L}$ ; em todos os casos, a catenária envolve a parábola. Notem-se as diferentes escalas para o eixo vertical.

### 2.3. CABOS DE BORDA

Um problema recorrente, no processo de ante-projeto de estruturas de membrana é aquele de dimensionar os cabos de borda da membrana. O estado de solicitação destes cabos depende da geometria da borda e do nível de retesamento da membrana. Apresenta-se a seguir a construção de um ábaco particularmente útil para este pré-dimensionamento.

A figura 5 mostra um cabo inextensível, sujeito a um carregamento transversal uniforme  $S$  (e tração  $T$  constante, portanto). Por simetria, depreende-se que o cabo adquire a forma de um arco circular, de corda  $L$  e flecha  $h$  (forma também chamada de *velária*).

O equilíbrio do cabo na direção do eixo vertical da figura 5 permite escrever

$$2T \operatorname{sen} \alpha = LS \quad (2.23)$$

Por outro lado, valem as relações geométricas

$$h = R(1 - \cos \alpha) \quad e \quad L = 2R \operatorname{sen} \alpha \quad (2.24)$$

e portanto

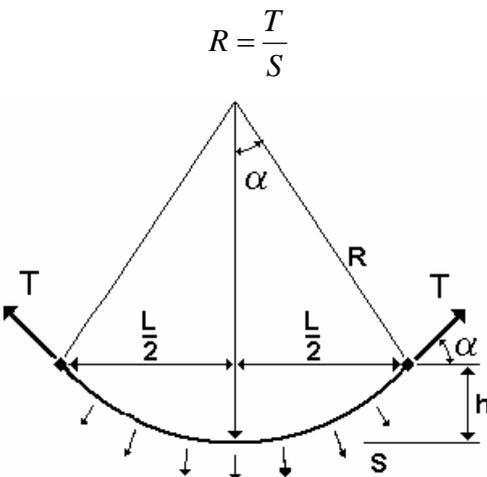
$$R = \frac{T}{S} \quad (2.25)$$


Figura 5 – Um cabo sujeito a carregamento transversal uniforme  $S$  (e tração  $T$  constante, portanto) adquire a forma de um arco circular, de corda  $L$  e flecha  $h$ .

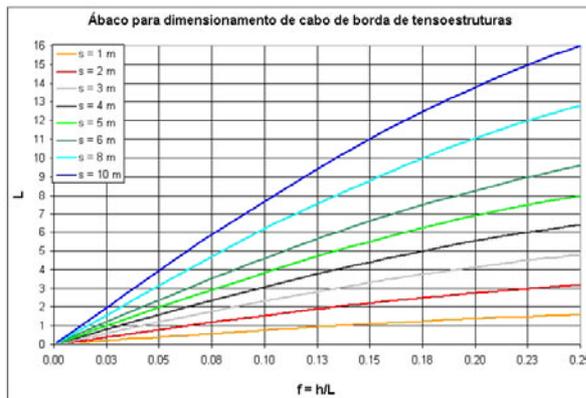
Levando em conta as relações acima, obtém-se ainda

$$h = \frac{T}{S} \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{LS}{2T} \right)^2} \right) \quad (2.26)$$

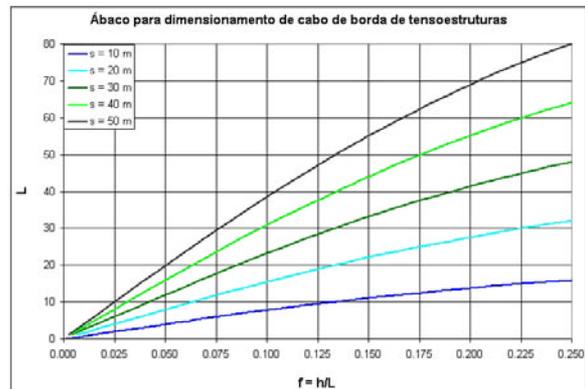
e finalmente, definindo as relações  $f = \frac{h}{L}$  e  $s = \frac{T}{S}$ , tem-se

$$f = \frac{s}{L} \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{L}{2s} \right)^2} \right) \quad (2.27)$$

É interessante graficar a relação (2.27) para diferentes valores de  $s = \frac{T}{S}$ , usando as abscissas para varrer os valores de  $f = \frac{h}{L}$ , e as ordenadas para varrer os valores da corda  $L$ . O ábaco resultante pode ser empregado no pré-dimensionamento dos cabos de borda de membranas retesadas. Assim, por exemplo, tomando-se uma membrana com uma borda com arco  $L = 50m$ , sujeita a uma tração por metro linear  $S = 1kN/m$ , pode-se buscar a flecha necessária, para se limitar a tração no cabo a  $T = 50kN$ . Entrando, nos ábacos da figura 6a, com os valores  $s = \frac{T}{S} = 50m$  e  $L = 50m$ , obtém-se,  $f \approx 0,134$  e portanto  $h = 6,70m$ . Alternativamente, dados os valores de  $S$ ,  $L$  e  $h$ , pode-se determinar o valor da tração  $T$  resultante no cabo.



(a)  $1m \leq s \leq 10m$



(b)  $10m \leq s \leq 50m$

Figura 6 – Ábacos para pré-dimensionamento de cabos de borda de membranas retesadas

### 3. MODELOS DE CORDA

#### 3.1. MODELO LINEAR

A figura 7 mostra o modelo de uma corda fixada pelas extremidades, para a qual se admite que os deslocamentos dos seus pontos sejam exclusivamente transversais<sup>4</sup>.

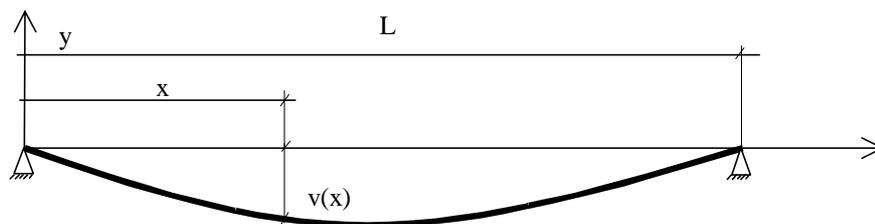


Figura 7. Corda distendida horizontalmente, vibrando com deflexão  $v(x,t)$

Admite-se que a corda seja homogênea, de comprimento  $L$ , disposta horizontalmente (ou seja, esteja sujeita a uma força de tração  $T$  suficientemente grande para que seja possível desprezar a deformação devida ao peso próprio). Admite-se ainda que as deformações da corda durante o movimento sejam suficientemente pequenas em relação à deformação inicial, para que também a variação da tração possa ser desprezada.

Mediante as hipóteses acima, pode-se, utilizando o princípio de D'Alembert, somar as forças de inércia ao carregamento externo ( $w = p + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ ) e considerar este novo carregamento em (2.7), derivada duas vezes. Então, Com a mudança óbvia de ( $v = y$  e  $T = H$ ), obtém-se a equação diferencial que governa a vibração forçada da corda, com deslocamentos exclusivamente transversais [CRAIG, 81]:

$$-\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + T \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = p(x,t) \quad (3.1)$$

onde  $\mu$  é a densidade linear de massa,  $T$  é a tração na corda e  $F$  é a distribuição das forças externas, verticais, agindo ao longo da corda.

Considere-se o caso de vibração livres, isto é,  $p(x,t) = 0$ . Neste caso, a resposta fica caracterizada pelas condições iniciais a que o sistema for submetido. Além disso, sendo  $\mu$  e  $T$  constantes, a

equação diferencial (3.1) é linear. Esta equação, com  $p(x,t)=0$ , é conhecida como equação de onda, e foi resolvida pela primeira vez por D'Alembert, que mostrou que a solução geral é

$$v(x,t) = f(x-\alpha t) + f(x+\alpha t) \quad (3.2)$$

onde  $f(x)$  é uma função arbitrária, determinada a partir das condições iniciais e  $\alpha = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  é a

velocidade de propagação da onda no meio elástico. A resposta  $v(x,t)$  pode ser então entendida como a superposição de duas ondas de deslocamento transversal que se propagam longitudinalmente à corda, em sentidos opostos. A figura 8 mostra sucessivas posições de uma corda, para o caso em que a deformação da corda é dada pela curva número 1, indicada na figura.

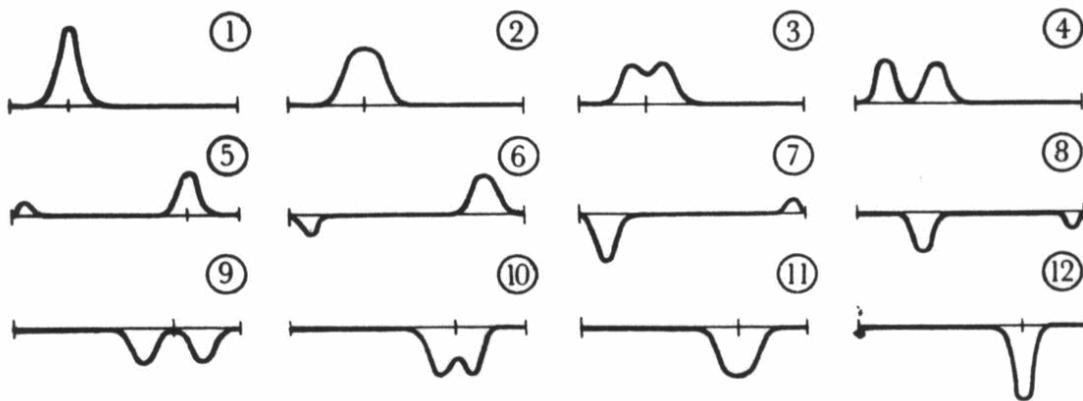


Figura 8. Propagação de onda em uma corda (extraído de SHILOV [74]).

Pode-se chegar à expressão (3.2) resolvendo (3.1) pelo método de separação de variáveis. Assim, seja  $v(x,t)$  expressa por

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x) \text{sen } \omega_n t \quad (3.3)$$

Substituindo (3.3) em (3.1) obtém-se uma série de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2 V_n}{dx^2} + \frac{\mu \omega_n}{T} V_n = 0 ; n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

cujas soluções são da forma

$$V_n(x) = A_n \text{sen } \beta_n x + B_n \text{cos } \beta_n x \quad (3.5)$$

onde  $\beta_n = \sqrt{\frac{\mu\omega_n^2}{T}}$ . Como as extremidades da corda estão fixas, as condições de contorno são nulas. Para soluções  $V_n(x)$  não triviais obtém-se, portanto,  $B_n = 0$  e  $\beta_n = \frac{n\pi}{L}$ , donde se extraem as frequências próprias  $\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  e os modos de vibração livre da corda  $V_n(x) = A_n \text{sen} \frac{n\pi}{L} x$ .

Para condições iniciais arbitrárias, a solução geral de (3.4) é

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} t \right) \quad (3.6)$$

Por meio da identidade  $\text{sen} A \text{sen} B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$  reconhecem-se as ondas viajantes previstas por (3.2):

$$\begin{aligned} f(x-\alpha t) &= \frac{A_n}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left( \frac{n\pi}{L} \left( x - \sqrt{\frac{T}{\mu}} t \right) \right) \\ f(x+\alpha t) &= -\frac{A_n}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left( \frac{n\pi}{L} \left( x + \sqrt{\frac{T}{\mu}} t \right) \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Considere-se o caso da corda vibrando exclusivamente no primeiro modo, isto é,  $n = 1$ . Neste caso, os deslocamentos transversais dos pontos da corda são dados por

$$v(x,t) = A \text{sen} \left( \frac{\pi}{L} x \right) \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} t \right) = V(t) \text{sen} \left( \frac{\pi}{L} x \right) \quad (3.8)$$

correspondendo a uma onda estacionária, com amplitude variando conforme  $V(t) = A \text{sen} \omega_1 t$ , onde

$\omega_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  é *frequência angular fundamental* da corda. Levando em conta que a frequência natural

é  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  e que  $m = \mu L$  é a massa total da corda, obtém se ainda  $f_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{mL}}$  (em Hz).

Substituindo-se (3.8) em (3.1) tem-se

$$\mu \frac{d^2 V}{dt^2} + \pi^2 \frac{T_0}{L^2} V = 0 \quad (3.9)$$

Portanto, uma corda linear, vibrando no primeiro modo, pode ser representada por um sistema massa-mola equivalente de parâmetros  $\left\{ m^* = \mu L; k^* = \pi^2 \frac{T_0}{L} \right\}$ .

### 3.2. MODELO NÃO-LINEAR

Se a amplitude de vibração da corda for tal que seu quadrado não puder ser desprezado, então a tração  $T$  na corda não pode mais ser considerada constante, e a equação do movimento da corda vibrando no plano torna-se não-linear<sup>5</sup>. Nesta seção, procura-se estabelecer a equação diferencial que governa as vibrações planas livres da corda, admitindo a variação da tração ao longo de seu comprimento. As hipóteses de deslocamentos pequenos e exclusivamente transversais são, porém, mantidas. Segundo Irvine<sup>7</sup> o modelo foi estudado pela primeira vez por G.F. Carrier, em 1945.

Considere-se portanto uma corda originalmente horizontal, cujos pontos experimentam deslocamentos exclusivamente verticais  $v(x, t)$ . Com esta hipótese, o acréscimo de deformação da corda, a partir de sua configuração inicial, é dado por  $\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$ . Admitindo um material elástico-linear, a tração em cada ponto da corda será

$$T(x) = EA\varepsilon(x) = T_0 + \frac{EA}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (3.10)$$

Novamente, a aplicação do princípio de D'Alembert para o movimento transversal fornece

$$-\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left[ T_0 + \frac{EA}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (3.11)$$

Observe-se que, em comparação com a equação (3.1), que expressa as vibrações livres do modelo linear, surge em (3.11) um termo extra, decorrente da variação da tração  $T$  ao longo de  $x$ . Como esta variação depende das amplitudes da vibração, o modelo é não-linear.

O modelo dado pela equação (3.11) é, no entanto, de difícil tratamento. Carrier introduziu uma hipótese adicional, considerando que, embora variando com a amplitude, a tração  $T$  permaneça uniforme ao longo da corda. Neste caso, para um material elástico linear, tem-se

$$T = k(\ell - \ell_0) = k(\ell - L) + T_0 \quad (3.12)$$

---

<sup>5</sup> Oscilações fora do plano, com a corda girando em torno de seu eixo são também possíveis, mas transcendem ao interesse do presente trabalho.

onde  $k = \frac{EA}{\ell_0}$  é a constante de mola da corda,  $\ell_0$  é o seu comprimento indeformado,  $\ell$  o comprimento atual da corda e, sendo ainda  $L$  a distância entre os apoios,  $T_0 = k(L - \ell_0)$ .

Portanto, novamente aplicando o princípio de D'Alembert, obtém-se uma nova equação diferencial

$$-\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + [T_0 + k(\ell - L)] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (3.13)$$

Ao contrário do que ocorre com os sistemas lineares, as frequências da corda de Carrier não são bem definidas, pois dependem da amplitude da oscilação. No entanto, IRVINE [81] mostra que os modos de vibração característicos deste sistema são os mesmos que no caso linear clássico. Assim, admite-se novamente que a corda vibre no primeiro modo, conforme

$$v(x, t) = V(t) \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right); \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \quad (3.14)$$

onde, para se obter maior precisão nas expansões subseqüentes, tomou-se a origem no meio do vão.

Substituindo (3.14) na equação diferencial (3.13) tem-se

$$\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + [T_0 + k(\ell - L)] \frac{\pi^2}{L^2} V = 0 \quad (3.15)$$

O comprimento da corda em função da amplitude será, portanto

$$\ell(x, t) = 2 \int_0^{L/2} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 V^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{L} x\right)} dx \quad (3.16)$$

Expandindo o integrando de (3.16) em série de Taylor, e substituindo em (3.15) a aproximação resultante para  $\ell(x, t)$ , truncada em  $O(V^2)$ , obtém-se

$$\mu \frac{d^2 V}{dt^2} + \pi^2 \frac{T_0}{L^2} V + \left(\frac{\pi^4}{24} - \frac{\pi^6}{480}\right) \frac{k}{L^3} V^3 = 0 \quad (3.17)$$

Portanto, admitindo a corda em vibrações planas, exclusivamente no primeiro modo, o movimento pode ser descrito por uma equação de Duffing [IRVINE, 81].

### 3.3. VIBRAÇÕES DA CORDA DO VIOLINO – MODELO MÍNIMO

Uma corda de violino é um sistema não-linear relativamente complicado, no qual um regime de oscilações auto-excitadas é provocado pelos sucessivos períodos de escorregamento-adesão, entre um arco e a corda. Este efeito foi pela primeira vez explicado por H. Helmholtz e Rayleigh no final do século XIX. A partir daí, modelos de complexidade crescente foram propostos, sendo que um resumo da teoria subjacente é dada por SCHUMACHER [95]. A seguir, pretende-se expor apenas um ‘modelo mínimo’, capaz de representar os aspectos essenciais da vibração da corda do violino. Uma discussão acerca da insuficiência deste modelo para representar as vibrações da corda de um violino real é dada em PAULETTI [99].

O **modelo mínimo** para a representação da corda do violino é esquematizado na figura 9a, que mostra um bloco de massa  $m$  vinculado a uma mola  $k$  e apoiado sobre uma esteira rolante rugosa, de velocidade constante  $\frac{ds_0}{dt}$ . Claramente, este modelo mínimo simplifica consideravelmente o comportamento de uma corda de violino real. A simplificação mais flagrante diz respeito à redução das vibrações da corda a apenas um grau de liberdade. A corda é no entanto um sistema contínuo, e esta simplificação pode obviamente se revelar exagerada, no que diz respeito a representação de uma corda real.

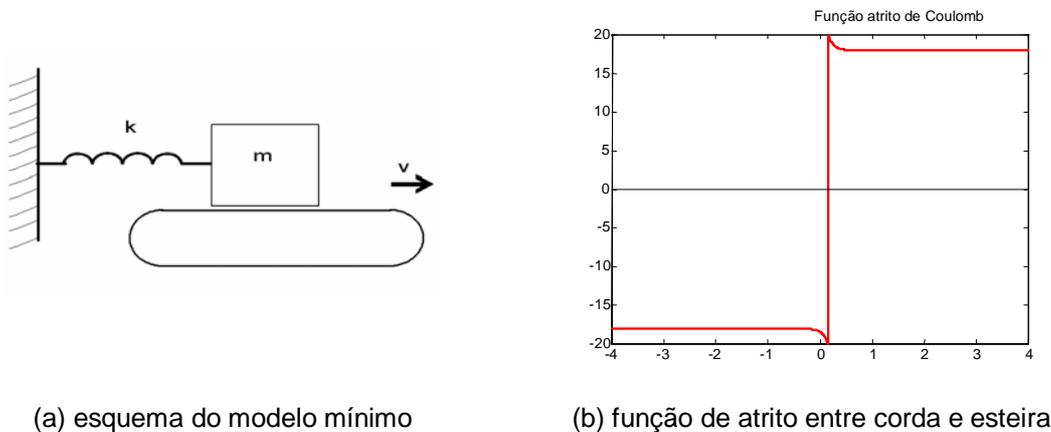


Figura 9. Modelo mínimo da corda de violino

Um estudo analítico interessante deste modelo é feito por BELTRAMI [87], que observa que a força de interação entre a corda e o arco é governada pela velocidade relativa  $\frac{dv}{dt} - \frac{ds_0}{dt}$ , onde  $\frac{dv}{dt}$  é a velocidade da corda e  $\frac{ds_0}{dt}$  aquela do arco. Enquanto a corda estiver aderida ao arco, a velocidade relativa é nula, isto é,  $\frac{dv}{dt} = \frac{ds_0}{dt}$ . Neste caso, uma vez que se admite que a velocidade do arco é

constante, a aceleração da corda é nula e a força de atrito que o arco exerce sobre a corda equilibra a força restauradora exercida pela corda, isto é, a força de atrito vale  $k^* v$ , enquanto  $|k^* v| \leq f_e$ , onde  $f_e$  é a máxima força de atrito. Em uma primeira aproximação, pode-se tomar  $f_e$  constante, sem prejuízo para o tipo de comportamento esperado. Quando o bloco se move em relação à esteira, por outro lado, a força de atrito é dada por  $-f_d \operatorname{sgn}\left(\frac{dv}{dt} - \frac{ds_0}{dt}\right)$ , sendo  $f_d < f_e$  uma força de atrito dinâmico.

Utilizando a 2ª Lei de Newton, obtém-se, para  $\frac{dv}{dt} - \frac{ds_0}{dt} \neq 0$ ,

$$m^* \frac{d^2v}{dt^2} + k^* v + f_d \operatorname{sgn}\left(\frac{dv}{dt} - \frac{ds_0}{dt}\right) = 0 \quad (3.18)$$

A equação (3.18) pode ser desmembrada em duas equações, dependendo do sentido da velocidade relativa. A energia total do sistema é constante e vale

$$E = \frac{1}{2} m^* \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} k^* v^2 \pm f_d v \quad (3.19)$$

Por sua vez, a equação (3.19) pode ser reescrita como :

$$E = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{k^*}{m^*} (v \pm f_d v)^2 = \text{cte} \quad (3.20)$$

$$E = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{k^*}{m^*} (v \pm f_d v)^2 = \text{cte} \quad (20)$$

relação que descreve duas famílias de elipses no espaço de fase  $\left(v; \frac{dv}{dt}\right)$ . Existe uma família I,

centrada no ponto  $\left(\frac{f_d}{k^*}; 0\right)$  e outra família II centrada em  $\left(-\frac{f_d}{k^*}; 0\right)$ . Enquanto persistir a

condição  $|v| \leq \frac{f_e}{k^*}$ , o bloco move-se solidariamente à esteira, com velocidade  $\frac{dv}{dt} = \frac{ds_0}{dt} > 0$ . Isto

significa, no plano de fase, um trecho de órbita sobre a reta horizontal definida por  $\frac{dv}{dt} = \frac{ds_0}{dt}$ ,

conforme pode ser identificado na figura 10.

As órbitas mostradas na figura 10 podem ser interpretadas levando-se em conta que condições

iniciais, dadas por um ponto  $\left( v_0 ; \left. \frac{dv}{dt} \right|_0 \right)$  no espaço de fase, caracterizam um estado de

energia e são interceptadas por uma elipse de uma das duas famílias. Se a velocidade do bloco for positiva, estas condições pertencem a uma elipse da família II. Se, ao contrário, a velocidade for negativa, o ponto inicial pertence a uma elipse da família I. Como a energia é constante, o sistema percorre a particular órbita elíptica à qual pertence o ponto inicial, até interceptar a reta horizontal

$\frac{dv}{dt} = \frac{ds_0}{dt}$ . A partir daí, corda e arco movem-se solidariamente, até o ponto  $\left( \frac{f_e}{k^*} ; \left. \frac{dv}{dt} \right|_0 \right)$ . A

partir daí, a força de atrito  $f_e$  não mais é capaz de fazer frente à força elástica  $-k^*v$  e a corda passa

a retardar-se em relação ao arco, com  $\frac{dv}{dt} - \frac{ds_0}{dt} > 0$ .

A velocidade absoluta da corda anula-se para um deslocamento além de  $\frac{f_e}{k^*}$ . A partir deste instante,

a corda retorna alcançando sua máxima velocidade, para a esquerda, em  $\frac{f_d}{k^*}$ . Em seguida, a corda

passa a desacelerar, seguindo sempre sobre a mesma trajetória elíptica até aderir novamente ao arco e iniciar um novo ciclo, sobre a mesma trajetória. Estabelece-se um ciclo limite, indicado na figura 10, em que a energia dissipada pelo atrito entre arco e corda é repostada pelo movimento do arco.

Para uma força de atrito  $f_d$  constante, os pontos estacionários  $\left( \pm \frac{f_d}{k^*} ; 0 \right)$  são pontos estáveis de

equilíbrio, e as órbitas com conteúdo energético menor que aquele correspondente ao ciclo limite também são estáveis. No entanto, ocorre que a transição entre a adesão e o escorregamento é de fato contínua, de modo que a força de atrito cai abrupta mas continuamente desde o valor da força de

atrito estático  $f_e$  e até o valor da força de atrito dinâmico  $f_d$ . Por esta razão, os pontos  $\left( \pm \frac{f_d}{k^*} ; 0 \right)$

são instáveis. A partir de condições iniciais  $\left( v_0 ; \left. \frac{dv}{dt} \right|_0 \right)$  internas à órbita do ciclo limite, a

corda vibraria com amplitudes e velocidades crescentes, com órbitas espiralando no plano de fase, até atingir o ciclo limite.

Quando a ação do arco sobre a corda do violino é vigorosa ( $v$  é um valor alto), a amplitude da órbita do ciclo limite é grande, correspondendo a um som potente. Porém, para velocidades suficientemente

altas, o ciclo limite aproxima-se uma órbita elíptica no diagrama de fases, a menos de um pequeno trecho horizontal, no qual  $\frac{dv}{dt} = \frac{ds_0}{dt}$ . Assim, o ciclo limite tem, aproximadamente, uma frequência,

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_0}{mL}}, \text{ diretamente ligada às características geométricas da corda.}$$

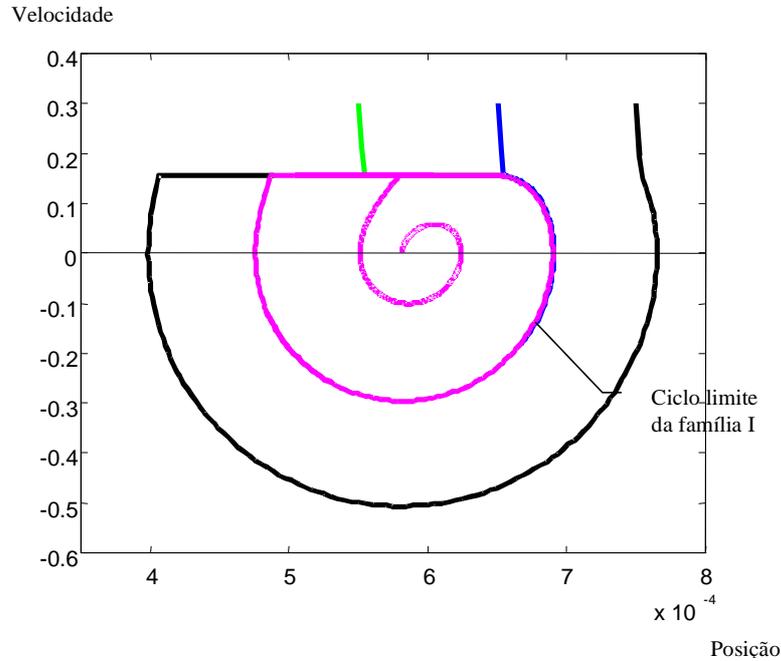


Figura 10. Diagrama de fase para o modelo mínimo

A figura 10, usada para ilustrar o estudo analítico de BELTRAMI [87] foi de fato gerada numericamente, empregando-se o modelo de corda não-linear discreta, (razão pela qual, de fato, as trajetórias não são perfeitamente elípticas), dado pela equação (3.17), acrescida, no segundo membro, da força do violino:

$$f_d \left( v, \frac{dv}{dt} \right) = \text{sign} \left( \frac{dv}{dt} - \frac{ds_0}{dt} \right) \left[ f_d - (f_e - f_d^{\min}) \right] \left( 1 - e^{-\alpha \left| \frac{dv}{dt} - \frac{ds_0}{dt} \right|} \right) \quad (3.21)$$

isto é, uma força de atrito dinâmico decaindo exponencialmente entre a força de atrito estática máxima  $f_e$  e a força dinâmica mínima  $f_d^{\min}$ .

Portanto

$$m^* \frac{d^2V}{dt^2} + \pi^2 \frac{T_0}{L} V + \left( \frac{\pi^4}{24} - \frac{\pi^6}{480} \right) \frac{k}{L^2} V^3 = f_d \left( v, \frac{dv}{dt} \right) \quad (3.22)$$

Estipulou-se que a corda deveria vibrar fundamentalmente na nota Lá de frequência fundamental 440Hz. Para se obter esta frequência, considerou-se uma corda com  $m = 0,01$ ,  $L = 1,0$  e  $T_0 = 7744$ . Fixando um comprimento indeformado  $\ell_0 = 0,9L$ , ajustaram-se os demais parâmetros da corda para se obter a frequência fundamental desejada. Quanto à força do arco, adotaram-se os parâmetros:  $f_d = 20$ ;  $f_d^{\min} = 18$ ;  $\alpha = 10$ ;  $\frac{ds_0}{dt} = 0,1526$  (figura 9b). A figura 11 mostra o transiente de deslocamentos da corda obtidos com a resolução numérica, associados ao diagrama de fase dado na figura 10.

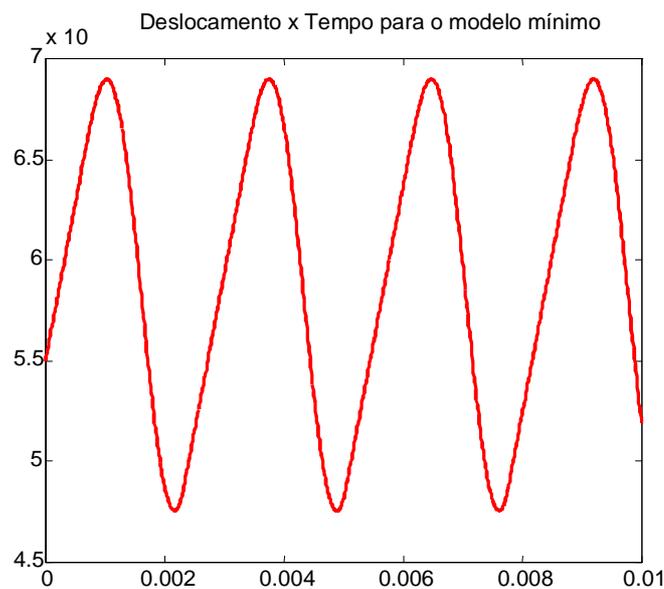


Figura 11. Deslocamentos para o modelo mínimo

Conforme se afirmou anteriormente, o modelo mínimo da corda de violino despreza uma série de fatores ligados ao comportamento da corda e do arco, à ação do músico e à resposta do corpo do violino. Os transientes associados à vibração de uma corda de um violino real são muito mais complexos do que o resultante do modelo. Uma comparação entre o modelo mínimo e a vibração de uma corda de violino real é empreendida em PAULETTI [99].

## REFERÊNCIAS

[BELTRAMI, 87] E. Beltrami, *Mathematics for Dynamic Modeling*. Academic Press, Inc., Boston, 1987.

[BUTKOV, 78] E. Butkov, *Física Matemática*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1978.

[CRAIG, 81] R.R. Craig, *Structural Dynamics. An Introduction to Computer Methods*. John Wiley & Sons, New York, 1981.

[HELMOLTZ, 95] H. Helmholtz, *On the Sensations of Tone*. Dover Pub., New York, 1954. German Ed. 1877.

[HIBBELER, 95] R.C. Hibbeler. *Engineering Mechanics*. 7th Ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

[IRVINE, 81] M. Irvine, *Cable Structures*. Dover Pub., New York, 1981.

[Pauletti, 99] R. M. O. Pauletti, H. Franco, F.M. Siqueira. *20th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. São Paulo, November, 1999.

[RAYLEIGH, 45] Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*. Dover, New York, 1945. 1<sup>a</sup> Ed. 1895.

[ROEDERER, 73] J.G. Roederer. *Introduction to the Physics and Psychophysics of Music*. Springer-Verlag, New York, 1973.

[SCHUMACHER, 95] R.T. Schumacher and J. Woodhouse. "The transient behaviour of models of bowed-string motion". *CHAOS* 5 (3) 509--523 1995.

[SHILOV, 74] G.E. Shilov, *Elementary Functional Analysis*. Dover Pub. Inc., 1974.