PTC-2305: Respostas da terceira lista de exercícios

1.
$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & w < 0 \\ \sqrt{w}, & 0 \le w \le 1 \\ 1, & w > 1 \end{cases}$$

$$f_W(w) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{w}}, & 0 \le w \le 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

2. (a)
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

   (b)
$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

   (c) $\mathrm{E}[\,X\,] = 1$

3.
$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & w < 0 \\ (w+1)/2, & 0 \le w < 1 \\ 1, & w > 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{E}[\,W\,] = 1/4$$

4. Demonstração.

5. (a) $\Pr[0 \le X^2 \le 1] = e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$

   (b) $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} \left[e^{-\lambda(\sqrt{y}+2)} + e^{-\lambda(-\sqrt{y}+2)} \right], & 0 \le y \le 4 \\ \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} e^{-\lambda(\sqrt{y}+2)}, & y > 4 \end{cases}$

   (c) $\mathrm{E}[\,Y\,] = \dfrac{\lambda^{-1} - 2}{2\lambda}$

6.

$$F_y(y) = \begin{cases} 0, & y < a \\ \dfrac{y-a}{b-a}, & a \le y < b \\ 1, & y > b \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le y \le b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

7. (a) Figura 1a
   (b) Figura 1b
   (c) $\Pr[V^2 \ge 0.25] = \dfrac{3}{4}$

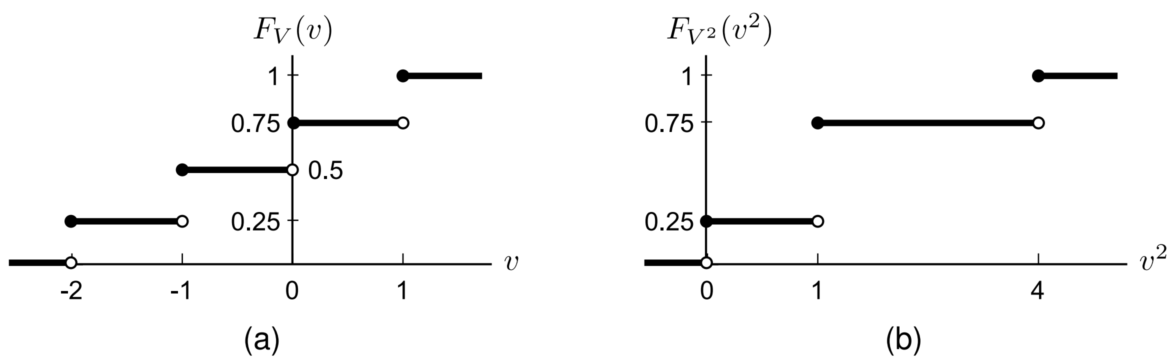

Figura 1: (a) $F_V(v)$; (b) $F_{V^2}(v^2)$

8. (a) $\mathcal{S}_Z = \{1, 8, 27, 64, 125, 216\}$ e $p_Z(z) = \begin{cases} 1/6, & z = 1, 8, 27, 64, 125, 216 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
   (b) $E\{f(X)\} = E\{Z\} = 73.5.$
   (c) $f(E\{X\}) = 42.875.$

9. Demonstração

10. (a) $\mathrm{E}[Y] = \dfrac{2}{5}$
    (b) $f_Y(y) = \dfrac{2}{5}\delta(y) + \dfrac{1}{5}[\delta(y+1) + \delta(y-1) + \delta(y-2)]$
    (c) $\sigma_Y^2 = \mathrm{var}[Y] = \dfrac{26}{25}$
    (d) $\Pr[\,|Y - \mu_Y| > 2\,] \le 0.26$

11. Demonstração.

12. (a) $\mathrm{E}[T] = \dfrac{1}{\lambda}$.
    (b) $\mathrm{E}[S] = \dfrac{m}{\lambda}$ e $\mathrm{var}[S] = \dfrac{m}{\lambda^2}$.
    (c) Demonstração.
    (d) $T \sim$ Exponencial(1/2000) e $\Pr[T > 3000 \text{ horas}] \approx 22.31\,\%$.

13. Demonstração

14. $\mathrm{Moda}[X] = \mu$, $\mathrm{Moda}[Y] = \sigma$, $\mathrm{E}[X] = \mu$ e $\mathrm{E}[Y] = \sigma\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

15. (a) $\Pr[V_R \leq 2\mathrm{V}] \approx 0.69$
    (b) $\Pr[V_R > 1\mathrm{V} \,|\, V_R \leq 2\mathrm{V}] \approx 0.42$
    (c) $f_{V_R\,|\,\{V_R \leq 2\}}(v \,|\, \{V_R \leq 2\}) = \begin{cases} \dfrac{1}{0.69}\,\mathcal{N}(0,16), & v \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
    (d) $f_X(x) = \begin{cases} 2\,\mathcal{N}(0,16), & x > 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 16}}, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

16.

$$f_{X|B}(x|B) = \begin{cases} 0.4, & x = -1 \\ 0.6, & x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad \mathrm{E}[X|B] = 0.2 \qquad \mathrm{var}[X|B] = 0.96$$

17. (a) $f_{N|M}(n|M) = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{N}(4,2)}{1 - F_N(5)} \approx 4.17 \cdot \mathcal{N}(4,2), & w > 5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
    (b) $E[N|M] = \dfrac{1}{1 - F_N(5)} \left\{ \dfrac{e^{-1/4}}{\sqrt{\pi}} + 4[1 - F_N(5)] \right\} \approx 5.83$. De fato a prova foi um desastre: mesmo considerando apenas os alunos que tiraram nota acima a média, o valor esperado não aumentou muito. Portanto, pouquíssimos alunos tiraram notas altas.
    (c) $\mathrm{var}(N|M) \approx 0.52$. A variância diminuiu consideravelmente. Ou seja, os alunos que tiraram acima da média, tiraram notas muito parecidas (e de acordo com o item b, não muito altas).

18. (a) $c = 1/28$
    (b) $\Pr[Y < X] = 18/28$
    (c) $\Pr[Y > X] = 9/28$
    (d) $\Pr[X = Y] = 1/28$
    (e) $\Pr[Y = 3] = 21/28$

19. (a) $c = 6$
    (b) $\Pr[X \geq Y] = 2/5$ e $P[Y \leq X^2] = \dfrac{1}{4}$
    (c) $\Pr[\min(X, Y) \geq 1/2] = \dfrac{21}{32}$
    (d) $\Pr[\max(X, Y) \leq 3/4] = \dfrac{3^5}{4^5}$

20.

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x^4, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{5}{6}\left(1 + y^{3/2}\right), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

21. (a)

$$p_W(w) = \begin{cases} 3/28, & w = -2 \\ 6/28, & w = -1 \\ 1/28, & w = 0 \\ 14/28, & w = 1 \\ 4/28, & w = 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    (b) $\mathrm{E}[W] = \dfrac{14}{28}$
    (c) $\Pr[W > 0] = \dfrac{18}{28}$

22. $c = \dfrac{\pi}{18}$. X e Y são independentes.

23.

$$f_W(w) = \begin{cases} 2/3w^2, & 0 \leq w < 1 \\ -2/3w^3 + 4w - 8/3, & 1 \leq w \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

24. (a) $\Pr[X < Y^2] = \dfrac{1}{3}$

(b)

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(c) Sim.

(d)

$$f_{XY|A}(x,y|A) = \begin{cases} 2, & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \text{ e } y > x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(e)

$$f_{X|A}(x|A) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_{Y|A}(y|A) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(f) Não.

25. (a) $c = \dfrac{1}{100\pi}$

(b) $\Pr[D < 5\mu\text{m}] = \dfrac{1}{4}$

(c) $f_D(d) = \begin{cases} \dfrac{d}{50}, & d \leq 10\mu\text{m} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

(d) $f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{100 - x^2}}{50\pi}, & x \in [-10, 10] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$

X e Y não são independentes.

(e) $\mathrm{E}[X] = 0$

26. (a) $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}, & (x,y) \in [18,22] \times [20,22] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

(b) $\Pr[X > Y] = \dfrac{1}{4}$

(c) $\Pr[2p < 80 \text{ cm}] = \dfrac{1}{4}$

(d) $f_M(m) = \begin{cases} \dfrac{m-19}{4}, & 20 \leq m < 22 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

27. (a) $\mathrm{E}[X] = 5/9$ e $\mathrm{var}[X] = 13/162$

    (b) $\mathrm{E}[Y] = 11/9$ e $\mathrm{var}[Y] = 23/81$

    (c) $\mathrm{E}[X+Y] = 16/9$

28.

$$f_{XY|A}(x,y|A) = \begin{cases} \dfrac{6e^{-(2x+3y)}}{1-3e^{-2}+2e^{-3}}, & x+y \leq 1 \text{ e } x,y > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

29. (a) $\Pr[A] = 1/3$

    (b)

$$f_{XY|A}(x,y|A) = \begin{cases} x+y, & 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_{X|A}(x) = \begin{cases} x+1/2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_{Y|A}(y) = \begin{cases} y+1/2, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

30. (a)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2(y+1), & -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    (b)

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y+1}, & -1 \leq x \leq y \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    (c) $\mathrm{E}[X|Y=y] = \dfrac{y-1}{2}$

31. (a) $\mathrm{E}[X_1 - X_2] = 0$

    (b) $\mathrm{var}[X_1 - X_2] = 2\sigma_X^2$