PTC-2305: Terceira lista de exercícios

Exercícios sugeridos: 10, 17, 25, 30
Desafio: 12

1. A tensão V sobre um resistor de 1 Ω é uma variável aleatória uniforme entre 0 e 1 V. A potência instantânea é dada por $W = V^2$. Encontre a função distribuição de probabilidade $F_W(w)$ e a função de densidade de probabilidade $f_W(w)$. Repita o exercício para $V \sim \text{Uniforme}(-1, 1)$.

2. U é uma variável aleatória Uniforme$(0, 1)$ e $X = -\ln(1 - U)$. Calcule:

   (a) $F_X(x)$.

   (b) $f_x(x)$.

   (c) $\mathrm{E}[\,x\,]$.

3. A tensão de entrada de um retificador é uma variável aleatória U com distribuição uniforme em $[-1, 1]$ V. A saída do retificador é uma variável aleatória W dada por

$$W = g(U) = \begin{cases} 0, & U < 0 \\ U, & U \geq 0 \end{cases}$$

   Encontre $F_W(w)$ e calcule $\mathrm{E}[\,W\,]$.

4. Mostre que se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (Gaussiana), então a variável aleatória $Y = aX + b$ (com a e b constantes) é $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

5. A variável aleatória X tem função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x+2)}, & x \geq -2, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Calcule a probabilidade de $0 \leq X^2 \leq 1$.

   (b) Determine a função densidade de probabilidade de $Y = X^2$.

   (c) Encontre o valor esperado de Y. **Dica**: $\int xe^{-\lambda x} = -\lambda^{-1}(x + \lambda^{-1})e^{-\lambda x}$.

6. Para uma variável aleatória $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$, encontre a função distribuição de probabilidade e a função densidade de probabilidade de $Y = a + (b - a)U$, com $a < b$. Mostre que $Y \sim \text{Uniforme}(a, b)$.

7. A saída S de um circuito digital pode assumir os valores -1, -0.5, 0 e $+0.5$ com probabilidades iguais. S é convertida para uma tensão analógica através de um conversor D/A de dois bits, de forma que a tensão na saída seja $V = 2S$ (em volts).

   (a) Desenhe o gráfico da função distribuição de probabilidade de V.

   (b) Desenhe o gráfico da função distribuição de probabilidade de V^2.

   (c) Qual é a probabilidade de $V^2 \geq 0.25$?

8. A variável aleatória X corresponde aos resultados possíveis no lançamento de um dado honesto. Dada a função $f(\alpha) = \alpha^3$, uma outra variável aleatória Z é obtida fazendo $Z = f(X)$.

   (a) Quais os valores assumidos por Z e qual a sua função massa de probabilidade?

   (b) Obtenha o valor de $\mathrm{E}[\, f(X)\,]$ em função do valor de $\mathrm{E}[\, X\,]$.

   (c) Calcule o valor de $f(\mathrm{E}[\, X\,])$. Esse resultado é igual ao obtido para $\mathrm{E}[\, f(X)\,]$?

9. Seja $Y = \alpha \tan(X)$, onde $X \sim \text{Uniforme}(-\pi, \pi)$ e a é uma constante. Mostre que $Y \sim \text{Cauchy}(\alpha)$.

   Nota: A função densidade de probabilidade de uma VA Cauchy(α) é dada por

   $$f_Y(y) = \frac{\alpha/\pi}{y^2 + \alpha^2}, \quad \alpha > 0$$

   Dica: Assuma que a função $\arctan(\cdot) : (-\infty, +\infty) \to [-\pi/2, \pi/2]$ e encontre $F_Y(y)$.

10. A variável aleatória X é discreta e uniformemente distribuída em $[-1, 3]$. Encontre para $Y = |X| - 1$

    (a) $\mu_Y = \mathrm{E}[Y]$ diretamente da definição de Y e da função de probabilidade de X;

    (b) a função massa de probabilidade de Y, $p_Y(y)$;

    (c) $\sigma_Y^2 = \mathrm{var}[Y]$;

    (d) um limitante superior para $\Pr[\, |Y - \mu_Y| > 2\,]$.

11. A pmf de uma VA X é dita simétrica se satisfaz a relação $p_X(x) = p_X(-x)$, para $x = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$. Mostre que todos os momentos de ordem ímpar destas VAs são nulos, isto é, $\mathrm{E}[X^n] = 0$ para n ímpar.

12. (*Média de Cesàro*) A vida útil das lâmpadas usadas no sistema de iluminação de uma fábrica segue uma distribuição exponencial T com valor esperado desconhecido. A fim de determinar a probabilidade destas lâmpadas durarem mais de 3000 horas, proceda da seguinte maneira:

    (a) Calcule o valor esperado da VA $T \sim \text{Exponencial}(\lambda)$.

    (b) Calcule o valor esperado e a variância da VA S que representa a soma de m VAs Exponencial(λ) independentes.

    Dica: Não tente calcular a pdf! E não esqueça de que elas são independentes.

(c) A fim de estimar $\mathrm{E}[T]$, você mede a vida útil de m lâmpadas e calcula a média aritmética Y_m das medidas (note que Y_m é uma VA!). Aplique a desigualdade de Chebyshev no evento $\{|Y_m - \mathrm{E}[Y_m]| > \epsilon\}$ e mostre que $\lim_{m\to\infty} Y_m = \mathrm{E}[T]$ (em probabilidade), ou seja, que a probabilidade da média aritmética estar longe do valor esperado tende a 0 conforme $m \to \infty$.

(d) Assumindo que o resultado da sua média aritmética seja 2000 horas, determine $f_T(t)$, $F_T(t)$ e a probabilidade do evento $\{T > 3000 \text{ horas}\}$.

13. (*Desigualdade de Markov*) Dada uma VA $X \geq 0$ (não-negativa) e uma constante $c > 0$, demonstre que

$$\Pr[X \geq c] \leq \frac{\mathrm{E}[X]}{c}$$

Dica: Escreva $\mathrm{E}[X]$ como uma soma de integrais com limites em c. Substitua x por c e procure um limitante inferior.

14. A *moda* de uma distribuição é o valor para o qual sua pdf ou pmf é máxima. Calcule a moda e o valor esperado das VAs $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e $Y \sim \text{Rayleigh}(\sigma^2)$. Discuta os resultados obtidos.

Dica: $f_Y(y) = \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}$, $x \geq 0$. Você também vai precisar resolver uma integral Gaussiana. Dê uma olhada no vídeo sobre a distribuição Gaussiana disponível em **https://www.youtube.com/watch?v=vyHSG58FCyk**.

15. A tensão V_R sobre um resistor é uma variável aleatória Gaussiana com média nula e variância 16V^2: $V_R \sim \mathcal{N}(0, 16)$. Determine:

(a) A probabilidade de $V_R \leq 2\text{V}$.
Dica: use a tabela da função distribuição da normal padrão que se encontra no Moodle: **http://disciplinas.stoa.usp.br/pluginfile.php/198962/mod_label/intro/normal_table.pdf**.

(b) A probabilidade de $V_R > -1\text{V}$ dado que $V_R \leq 2\text{V}$.

(c) A função densidade de probabilidade condicional de V_R dado que $V_R \leq 2\text{V}$, ou seja, $f_{V_R \,|\, \{V_R \leq 2\}}(v \,|\, \{V_R \leq 2\})$.

(d) A função densidade de probabilidade de $X = |V_R|$.
Dica: Regra de Leibniz

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(y)dy = f(h(x))\frac{dh}{dx} - f(g(x))\frac{dg}{dx}.$$

16. Considere a variável aleatória X com distribuição

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.2, & -1 \leq x < 0 \\ 0.7, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

e o evento $B = \{|X| > 0\}$. Encontre $f_{X|B}(x|B)$ e calcule $\mathrm{E}[X|B]$ e $\mathrm{var}[X|B]$.

17. A P1 de Processos Estocásticos foi desastrosa. As notas dos alunos podem ser modeladas por uma VA Gaussiana $N \sim \mathcal{N}(4, 2)$. O Prof. Vítor, preocupado com a média baixa da turma, decidiu calcular algumas estatísticas para melhor diagnosticar a turma.

    (a) Primeiramente, ele gostaria de saber a função densidade de probabilidade condicional dos alunos que foram bem, ou seja, $f_{N|M}(n|M)$ para o evento $M = \{N > 5\}$ (nota acima da média).

    (b) Em seguida, ele quer comparar a nota média dos alunos que foram bem, isto é, $\mathrm{E}[N|M]$, com a média da turma inteira. O que esse resultado sugere?

    (c) Finalmente, ele gostaria de saber se as notas dos alunos que foram bem são parecidas. Para tal, calcule a variância condicional $\mathrm{var}[N|M]$. Como esse valor se compara à variância da turma toda? Interprete.

18. As variáveis aleatórias X e Y possuem função massa de probabilidade conjunta dada por

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} cxy, & x = 1, 2, 4 \text{ e } y = 1, 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    (a) Qual o valor da constante c?

    (b) Calcule $\Pr[Y < X]$.

    (c) Calcule $\Pr[Y > X]$.

    (d) Calcule $\Pr[Y = X]$.

    (e) Calcule $\Pr[Y = 3]$.

19. As variáveis aleatórias X e Y têm função de densidade de probabilidade conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} cxy^2, & 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    (a) Encontre a constante c.

    (b) Calcule $\Pr[X > Y]$ e $\Pr[X > Y^2]$.

    (c) Calcule $\Pr[\min(X, Y) \geq 1/2]$.

    (d) Calcule $\Pr[\max(X, Y) \leq 3/4]$.

20. As variáveis aleatórias X e Y tem função de densidade de probabilidade conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 5x^2/2, & -1 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq x^2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    Encontre as funções densidade de probabilidade marginais de X e de Y, isto é, $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

21. Considere a função massa de probabilidade do exercício 18 e a VA $W = X - Y$.

    (a) Qual a função massa de probabilidade $p_W(w)$?

    (b) Qual o valor esperado de W?

    (c) Qual o valor de $\Pr[W > 0]$?

22. As variáveis aleatórias X e Y tem pdf conjunta

$$f_{XY}(x, y) = ce^{-(x^2/8)-(y^2/18)}$$

    Qual o valor da constante c? X e Y são independentes?

23. As VAs X e Y possuem função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    Qual a função densidade de probabilidade de $W = X + Y$?

24. Considere as VAs X e Y com distribuição conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

    (a) Calcule a probabilidade de $X < Y^2$.

    (b) Calcule as distribuições marginais de X e Y.

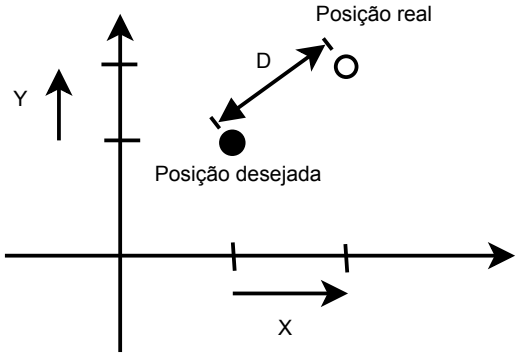
    (c) X e Y são independentes? Justifique.

    (d) Suponha que você saiba que ocorreu o evento $A = \{Y > X\}$. Qual é a função densidade de probabilidade condicional de (X, Y) dado A?

    (e) Calcule as distribuições marginais $f_{X|A}(x|A)$ e $f_{Y|A}(y|A)$.

    (f) *Dado que ocorreu* A, você pode dizer que X e Y são independentes? Justifique.

25. Uma máquina fresadora para confecção de placas de circuito impresso pode posicionar a broca para criar os furos com pequenos erros aleatórios nas direções horizontal e vertical (ver figura). Vamos denotar os erros como variáveis aleatórias: X (erro na direção horizontal) e Y (erro na direção vertical).



A fresa é construída de maneira que a função densidade de probabilidade conjunta dos erros X e Y é constante para erros a uma distância menor que 10μm, ou seja,

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c, & \sqrt{x^2+y^2} \leq 10\mu\text{m} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nestas condições,

(a) Ache o valor de c. **Dica:** Faça figuras para entender melhor o que está sendo calculado em cada caso.

(b) Calcule a probabilidade da distância D entre o furo realizado e sua posição ideal ser menor do que 5μm.

(c) Determine a função densidade de probabilidade $f_D(d)$ de $D = \sqrt{X^2+Y^2}$.

(d) Determine a função densidade de probabilidade marginal $f_X(x)$. X e Y são independentes?

(e) Calcule $\mathrm{E}[X]$.

26. Ao se medir os lados de uma tampa retangular, as medidas X e Y são VAs independentes com distribuições uniformes e valores em centímetros:

$$X \sim \text{Uniforme}(18, 22)$$
$$Y \sim \text{Uniforme}(20, 22)$$

Determine:

(a) A função de densidade de probabilidade conjunta $f_{XY}(x,y)$.

(b) A probabilidade de $X > Y$.

(c) A probabilidade do perímetro da tampa ser menor do que 80 cm.

(d) A função densidade de probabilidade de $M = \max(X,Y)$.

27. As VAs X e Y tem função de densidade de probabilidade conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} (x+y)/3, & 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Quais os valores de $\mathrm{E}[X]$ e $\mathrm{var}[X]$?

(b) Quais os valores de $\mathrm{E}[Y]$ e $\mathrm{var}[Y]$?

(c) Quanto vale $\mathrm{E}[X+Y]$?

28. As VAs X e Y tem função de densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)}, & x,y > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja A o evento $\{X+Y \leq 1\}$. Encontre a pdf condicional $f_{XY|A}(x,y|A)$.

29. Considere as VAs X e Y com pdf conjunta como no ex. 27 e o evento $A = \{Y \leq 1\}$.

    (a) Qual o valor de $P[A]$?

    (b) Encontre $f_{XY|A}(x, y|A)$, $f_{X|A}(x|A)$ e $f_{Y|A}(y|A)$.

30. As variáveis aleatórias X e Y tem pdf conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1/2, & -1 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

    (a) Encontre $f_Y(y)$.

    (b) Encontre $f_{X|Y}(x|y)$.

    (c) Qual o valor de $\mathrm{E}[X|Y = y]$?

31. X_1 e X_2 são duas VAs independentes e identicamente distribuídas, com valor esperado $\mathrm{E}[X_1] = \mathrm{E}[X_2] = \mu_X$ e $\mathrm{var}[X_1] = \mathrm{var}[X_2] = \sigma_X^2$.

    (a) Calcule $\mathrm{E}[X_1 - X_2]$

    (b) Calcule $\mathrm{var}[X_1 - X_2]$