PTC-2305: Quinta lista de exercícios

Exercícios sugeridos: 5, 6, 12, 19

1. Seja W uma VA exponencial com função densidade de probabilidade dada por

$$f_W(w) = \begin{cases} e^{-w}, & w \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   Encontre a função distribuição $F_{X(t)}(x)$ do processo atrasado $X(t) = t - W$.

2. Dado o processo $X(t)$ do exercício 1, encontre, para $t \geq 0$,

   (a) o valor esperado de $X(t)$.

   (b) a função de autocovariância $C_{XX}(t, t + \tau)$.
   Dica: $\mathrm{E}[W] = 1$ e $\mathrm{E}[W^2] = 2$.

3. Quais das seguintes funções $R_{XX}[\ell]$ podem ser funções de autocorrelação de um processo estocástico de tempo discreto $X[n]$? Justifique suas respostas (nas expressões abaixo, $\delta[\ell] = 1$ para $\ell = 0$ e $\delta[\ell] = 0$ para $\ell \neq 0$).

   (a) $R_{XX}[\ell] = 0.6\,\delta[\ell + 1] + 0.5\,\delta[\ell] + 0.6\,\delta[\ell - 1]$

   (b) $R_{XX}[\ell] = 0.3\,\delta[\ell + 1] - 0.5\,\delta[\ell] + 0.3\,\delta[\ell - 1]$

   (c) $R_{XX}[\ell] = -0.3\,\delta[\ell + 1] + 0.5\,\delta[\ell] - 0.3\,\delta[\ell - 1]$

   (d) $R_{XX}[\ell] = -0.3\,\delta[\ell + 1] + 0.5\,\delta[\ell] + 0.3\,\delta[\ell - 1]$

   (e) $R_{XX}[\ell] = 0.5\,\delta[\ell] - 0.3\,\delta[\ell - 1]$

4. Considere o processo aleatório $X[n] = X[n-1] + W_n$, com $X[0] = 0$ e W_n uma seqüência de VAs Gaussianas i.i.d. (com média μ_W e variância σ_W^2). Calcule a função de autocorrelação $R_{XX}(n_1, n_2)$.

5. Um processo aleatório $X(t)$ consiste de três funções: $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = -3$ e $x_3 = \sin(2\pi t)$. Cada função ocorre com igual probabilidade.

   (a) Encontre a função média $\mu_{X(t)}(t)$.

   (b) Calcule a função de autocorrelação, $R_{XX}(t_1, t_2)$.

   (c) O processo é estacionário no sentido amplo? E no sentido estrito?

6. $X(t)$ é um processo estacionário no sentido amplo com potência média igual a 1. Seja a VA $\Theta \sim \text{Uniforme}(0, 2\pi)$. Suponha que Θ e $X(t)$ são independentes.

(a) Qual o valor de $\mathrm{E}[X^2(t)]$?

(b) Qual o valor de $\mathrm{E}[\cos(2\pi f_c t + \Theta)]$, para uma f_c constante e determinística?

(c) Seja $Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta)$. Qual o valor de $\mathrm{E}[Y(t)]$?

7. Considere o processo $X(t) = A\cos(\omega t + \Theta)$, em que $A \sim \text{Uniforme}(0,2)$ e $\Theta \sim \text{Uniforme}(0,2\pi)$ são independentes entre si (atenção: note que A e Θ não dependem de t e são escolhidos apenas uma vez para cada realização do processo). Determine:

   (a) a função média $\mu_{X(t)}(t) = \mathrm{E}[X(t)]$ do processo.

   (b) a função de autocorrelação do processo $r_X(t_1,t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)]$.

   Dica: $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$.

   (c) O processo é estacionário? Justifique.

8. Seja o processo estocástico $X(t) = At + B$, onde A e B são variáveis aleatórias independentes e com distribuição uniforme no intervalo $[-1,1]$. Determine se $X(t)$ é um processo estacionário no sentido amplo.

9. Considere o processo aleatório $X(t) = A\cos(w_o t) + B\sin(w_o t)$, onde $A \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ e $B \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ são independentes. Calcule a função média e a função de eautocorrelação de $X(t)$ e mostre que se trata de um processo estacionário no sentido amplo. Calcule, também, $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2\,;\,t,t+\tau)$.

10. $X(t)$ é um processo aleatório estacionário no sentido amplo, com $\mu_{X(t)}(t) = 0$. Defina o processo $Y(t) = X(\alpha t)$, com $\alpha \neq 0$. Encontre $R_{YY}(t,t+\tau)$ em função de $R_{XX}(t,t+\tau)$. O processo $Y(t)$ é estacionário no sentido amplo? Caso seja, calcule sua densidade espectral de potência $S_{YY}(\omega)$.

11. Dado o processo estacionário $X(t)$, determine a densidade espectral de potência de $Y(t) = A + BX(t)$ em termos da densidade espectral de de potência de $X(t)$ e assumindo que A e B são constantes determinísticas reais.

12. Um processo estacionário no sentido amplo $X(t)$ com função de autocorrelação $R_{XX}(\tau) = e^{-4\pi\tau^2}$ é filtrado por um sistema com resposta em freqüência

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le 2\pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   Calcule:

   (a) a potência média da entrada $X(t)$.

   (b) a densidade espectral de potência da saída $S_{YY}(\omega)$.

   (c) a potência média da saída $Y(t)$.

13. Um filtro RC com resposta em freqüência

$$H(j\omega) = \frac{1}{100\pi + j\omega}$$

é excitado por um sinal $X(t)$ modelado como um processo estacionário no sentido amplo com densidade espectral de potência

$$S_{XX}(\omega) = \begin{cases} 10^{-4}, & |\omega| < 200\pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

resultando no processo $Y(t)$.

Determine:

(a) $\mathrm{E}\left[X^2(t)\right]$

(b) $S_{XY}(\omega)$

(c) $S_{YY}(\omega)$

(d) $\mathrm{E}\left[Y^2(t)\right]$

14. Seja $X(t)$ um processo estacionário no sentido amplo que é ergódico na média e na autocorrelação, mas com μ_X não-nula. Seja $Y(t) = CX(t)$, onde C é uma VA independente de $X(t)$ e $\mathrm{E}[C] \neq 0$. Mostre que $Y(t)$ não é ergódico nem na média, nem na autocorrelação.

15. Considere o processo estocástico $X(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\omega_n t + \Theta_n)$ onde a_n e $\omega_n \neq 0$ são constantes determinísticas e Θ_n é uma seqüência de VAs i.i.d. distribuídas uniformemente entre 0 e 2π.

(a) Encontre a função de autocorrelação de $X(t)$.

(b) Encontre a densidade espectral de potência de $X(t)$.

16. Seja $X(t)$ um processo estacionário no sentido amplo com função média $\mu_X(t) = 0$ e função de autocorrelação $R_{XX}(\tau)$. Considere o processo $Y(t) = 2 + X(t)$. Encontre $R_{YY}(\tau)$ e verifique se o processo $Y(t)$ também é estacionário no sentido amplo.

17. Considere um processo estacionário e ergódico $X(t)$ com média nula e PSD dada por, em W/Hz,

$$S_{XX}(\omega) = \begin{cases} 2, & |\omega| \leq 2 \text{ rad/s} \\ 0, & |\omega| > 2 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Suponha que o processo $X(t)$ passe por um filtro com resposta em freqüência $H(\omega) = 1 - |\omega|$, para $|\omega| \leq 1$, e $H(\omega) = 0$, caso contrário. A fase de $H(\omega)$ é nula. Determine:

(a) a potência média de uma realização $x(t)$ do processo $X(t)$.

(b) a densidade espectral de potência do processo $Y(t)$ na saída do filtro.

(c) a variância de $Y(t)$.

18. O temporizador de um circuito é controlado pela constante de tempo de um RC. O valor nominal da constante de tempo é 1 ms, mas este valor varia em cada circuito fabricado devido a variações nas resistências e capacitâncias. Considere que a condutância G seja uma VA com distribuição uniforme no intervalo $[0.9, 1.1]$ mS e assuma que C seja exatamente igual a 1 μF.

    A forma de onda no temporizador é uma exponencial decrescente

    $$V(t) = e^{-\frac{G}{C}t} H(t),$$

    para $V(t)$ em volts, t em ms, G em mS e C em μF. Note que, considerando o conjunto dos circuitos fabricados, $V(t)$ é um processo estocástico.

    (a) Calcule a função média $\mu_{V(t)}(t) = \mathrm{E}[V(t)]$.

    (b) Calcule a função de autocorrelação $R_{VV}(t_1, t_2) = \mathrm{E}[V(t_1)V(t_2)]$.

    (c) O processo $V(t)$ é estacionário?

    (d) O temporizador mede tempo verificando quando a tensão de saída cai abaixo de e^{-1} V, ou seja, o circuito mede $T : V(T) = e^{-1}$. Calcule a probabilidade de $T < 0.95$ ms.

19. Um sinal determinístico $v(t)$ é afetado por ruído branco $N(t)$ de média nula e densidade espectral de potência $S_{NN}(\omega) = 2 \times 10^{-6}\,\pi$. Considere o sinal $Y(t) = v(t) + N(t)$ e responda, deixando o resultado em função de $v(t)$:

    (a) Qual é a função média $\mu_{Y(t)}(t)$?

    (b) Qual é a função de autocorrelação de $Y(t)$?

    (c) Na tentativa de reduzir a influência do ruído $N(t)$, o sinal $Y(t)$ é filtrado por um passa-baixas ideal com banda B, isto é,

    $$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le B \\ 0, & |\omega| > B \end{cases}$$

    Qual deve ser o valor de B para que a potência do ruído na saída seja 0.01?