ELETRÔNICA DE POTÊNCIA

CIRCUITOS COM FORMAS DE ONDAS PERIÓDICAS NÃO SENOIDAIS

APLICAÇÃO DA SÉRIE DE FOURIER (REVISÃO)

PRIMEIRO SEMESTRE DE 2005

CIRCUITOS COM FORMAS DE ONDA PERIÓDICAS NÃO SENOIDAIS

SÉRIE DE FOURIER
(REVISÃO)

1. FUNÇÕES PERIÓDICAS

Uma função $f(t)$ é periódica se:

$$f(t+T) = f(t) \text{ para } -\infty < t < \infty. \quad [1]$$

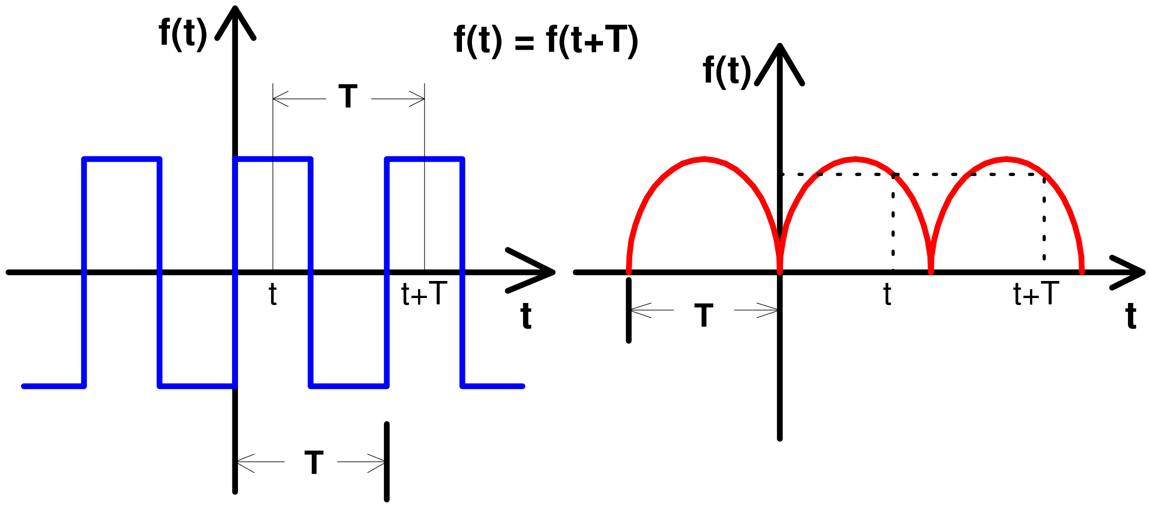


Figura 1- Funções Periódicas

O menor T que satisfaz a equação [1] é chamado de período de $f(t)$.

A equação [1] implica que

$$f(t + n.T) = f(t); \ \forall t \text{ no intervalo } -\infty < t < t; \text{ sendo } n \text{ inteiro.}$$

As funções periódicas são completamente especificadas por seus valores em qualquer período.

Seja $\qquad f_T(t) = f(t).[u(t-t_0) - u(t-t_0-T)] \qquad [2]$

Onde $\qquad u(t)$ é o degrau unitário

Então $\qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_T(t + n.T) \qquad [3]$

A função $f_T(t)$ é chamada de gerador de $f(t)$.

Funções periódicas possuem propriedades de simetria que facilitam sua análise.

Função par é uma função periódica que *f(-t) = f(t).*

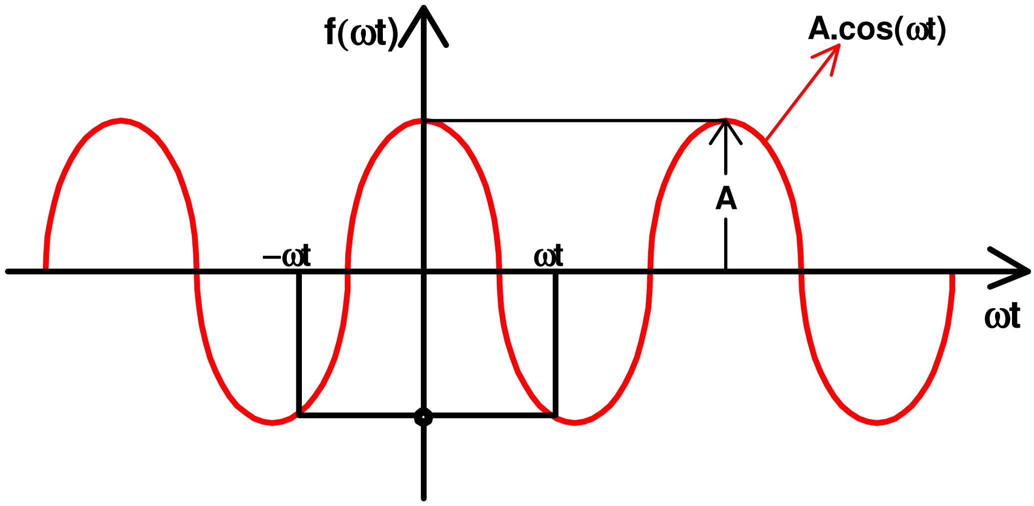


Figura 2 - Função par

Quando a função é par ela possui simetria com relação ao eixo das ordenadas (eixo y).

Função ímpar é uma função periódica que *f(-t) = -f(t).*

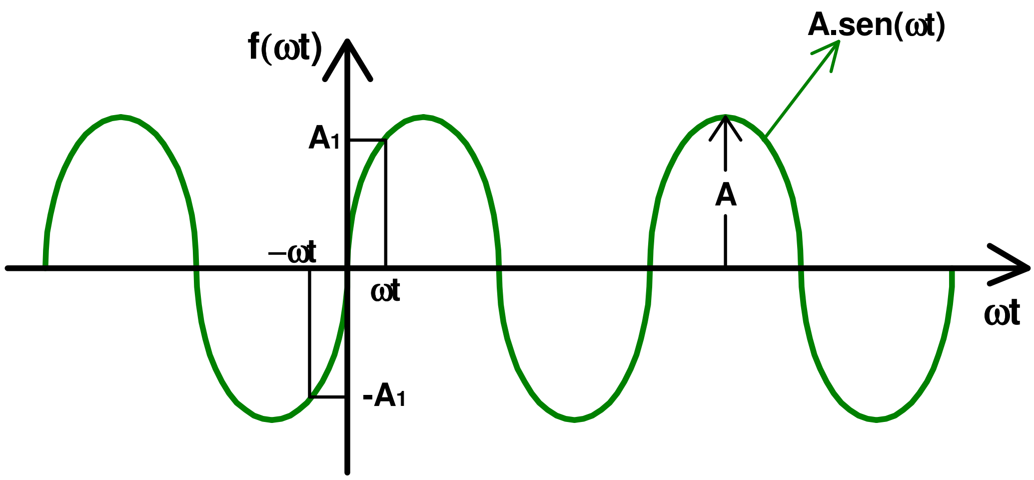


Figura 3 - Função ímpar

Quando a função é ímpar ela possui simetria com relação à origem.

Das figuras 2 e 3 acima verifica-se que:

$A.\cos[\omega.(-t)] = A.\cos(\omega.t)$ é uma função par

$A.\text{sen}[\omega.(-t)] = -A.\text{sen}(\omega.t)$ é uma função ímpar

Soma de funções pares resultam em uma função par:

$h_p(t) = K_1.f_p(t) + K_2.g_p(t)$, onde K_1 e K_2 são escalares, f_p, g_p e h_p são funções pares.

Soma de funções ímpares resultam em uma função ímpar:

$h_i(t) = K_1.f_i(t) + K_2.g_i(t)$, onde K_1 e K_2 são escalares, f_i, g_i e h_i são funções ímpares.

Produto de funções pares resultam em uma função par:

$h_p(t) = [K_1.f_p(t)] \cdot [K_2.g_p(t)]$, onde K_1 e K_2 são escalares, f_p, g_p e h_p são funções pares.

Produto de funções ímpares resultam em uma função ímpar:

$h_i(t) = [K_1.f_i(t)] \cdot [K_2.g_i(t)]$, onde K_1 e K_2 são escalares, f_i, g_i e h_i são funções ímpares.

Produto de funções pares por funções ímpares resultam em uma função ímpar:

$h_i(t) = [K_1.f_p(t)] \cdot [K_2.g_i(t)]$, onde K_1 e K_2 são escalares, f_i é uma função par, e g_i e h_i são funções ímpares.

Qualquer função periódica *f(t)* pode ser expressa como sendo a soma de uma função par com uma função ímpar.

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \qquad [4a]$$

$$f_i(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \qquad [4b]$$

$$f_p(t) + f_i(t) = f(t) \qquad [4c]$$

Definições importantes:

Valor médio ou média de uma função periódica *f(t)*:

$$f_{médio} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).dt \quad [5]$$

Valor médio quadrado de uma função periódica *f(t)* (é chamado de potência média em *f(t)*):

$$|f|^2{}_{médio} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2.dt \quad [6]$$

Raiz quadrada do valor médio quadrado, ou valor rms de uma função periódica *f(t)*:

$$f_{rms} = \sqrt{|f|^2{}_{médio}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2.dt} \quad [7]$$

2. SÉRIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Se uma função periódica *f(t)* obedece às condições de Dirichlet, então a função pode ser representada pela série trigonométrica de Fourier. É bom ressaltar que as condições de Dirichlet são suficientes, mas não necessárias, pois existem funções periódicas que não obedecem a estas condições, e, no entanto possuem série de Fourier.
As condições de Dirichlet são:

1. *f(t)* é contínua por partes
2. *f(t)* possui um número de máximos e mínimos finitos em qualquer intervalo finito.
3. *f(t)* é absolutamente integrável sobre um período, isto é: $\int_0^T |f(t)|.dt < \infty$

A série trigonométrica de Fourier é dada por:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega.t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega.t)] \qquad \text{onde } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ [rad/s]} \quad [8]$$

a_n e b_n são os coeficientes da série de Fourier e dependem de *f(t)*

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t).\cos(n\omega.t).dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} f(t).\operatorname{sen}(n\omega.t).dt \quad [9a]$$

$n = 0, 1, 2, 3....$

Outra forma de expressar a_n e b_n em função da variável ωt e período 2π, que é muito comum em engenharia elétrica, é dada abaixo:

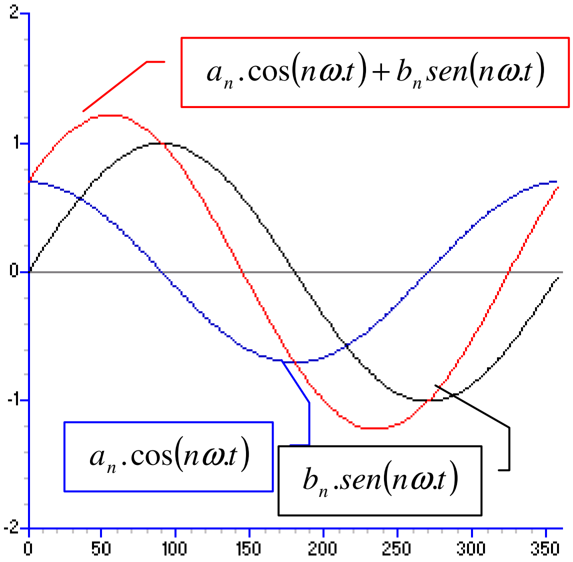
$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t).\cos(n\omega.t).d(\omega t)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(t).\operatorname{sen}(n\omega.t).d(\omega t) \quad [9b]$$

$n = 0, 1, 2, 3....$

Podemos observar que o primeiro termo da série, $a_0/2$ é o valor médio da função *f(t).*

Na análise de circuitos elétricos, é mais conveniente representar-se a série de Fourier combinando-se os termos em seno e cosseno em um único termo em seno ou cosseno (série de Fourier trigonométrica compacta).



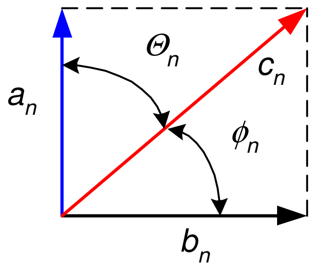


Figura 4

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n.\cos\left(n\omega.t+\theta_n\right)$$

$$c_0=a_0\,/\,2=\text{valor médio de } f(t) \qquad [10]$$

$$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \qquad \theta_n=-\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

ou

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n.\text{sen}\left(n\omega.t+\phi_n\right)$$

$$c_0=a_0\,/\,2=\text{valor médio de } f(t) \qquad [11]$$

$$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \qquad \phi_n=\arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

3. INFLUÊNCIA DA SIMETRIA SOBRE OS COEFICIENTES DE FOURIER

3.1. SIMETRIA PAR

Funções periódicas com simetria par são do tipo $f(t)=f(-t)$.

Para as funções periódicas com simetria par, as equações usadas para calcular os coeficientes da série de Fourier se reduzem a:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t).dt$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t).\cos(k.\omega.t).dt \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \quad [12]$$

$$b_k = 0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Observe que as funções periódicas com simetria par, não possuem termos em seno.

3.2. SIMETRIA ÍMPAR

Funções periódicas com simetria ímpar são do tipo $f(t) = -f(-t)$.

Para as funções periódicas com simetria ímpar, as equações usadas para calcular os coeficientes da série de Fourier se reduzem a:

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad [13]$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t).\text{sen}(k.\omega.t).dt \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Observe que as funções periódicas com simetria ímpar, não possuem termos em cosseno, e seu valor médio é nulo.

3.3. SIMETRIA DE MEIA ONDA

Funções periódicas com simetria de meia-onda são do tipo $f(t) = -f\left(t + T/2\right) = -f\left(t - T/2\right)$.

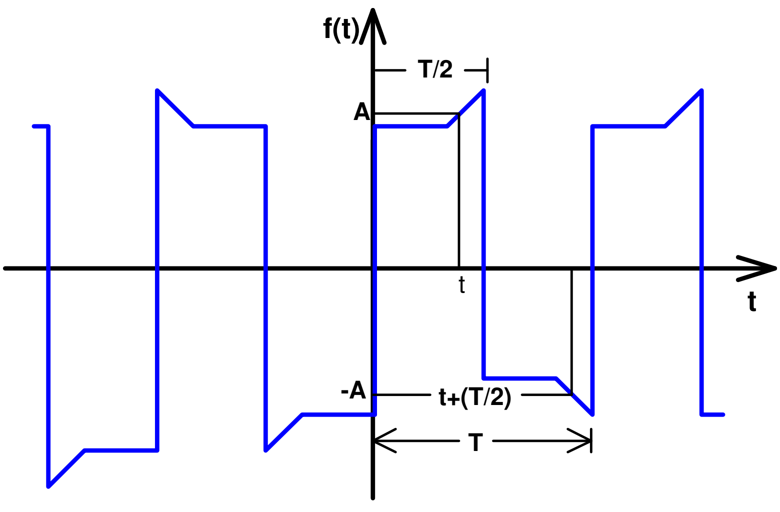


Figura 5 - Simetria de meia onda

Para as funções periódicas com simetria de meia-onda, as equações usadas para calcular os coeficientes da série de Fourier se reduzem a:

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0 \qquad k = 2, 4, 6, \ldots \ (k \text{ par})$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t).\cos(k.\omega.t).dt \qquad k = 1, 3, 5 \ldots \ \ (k \text{ ímpar}) \ \ [14]$$

$$b_k = 0 \qquad k = 2, 4, 6, \ldots \ (k \text{ par})$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t).\text{sen}(k.\omega.t).dt \qquad k = 1, 3, 5 \ldots \ \ (k \text{ ímpar})$$

Observe que as funções periódicas com simetria de meia-onda, só possuem termos ímpares, e seu valor médio é nulo.

3.4. SIMETRIA DE QUARTO DE ONDA

Funções periódicas com simetria de quarto de onda são funções que possuem simetria de meia-onda e, além disso, simetria em relação ao ponto médio dos semiciclos positivo e negativo.
Quando uma função possui simetria de quarto de onda, sempre é possível torná-la com simetria par ou ímpar.

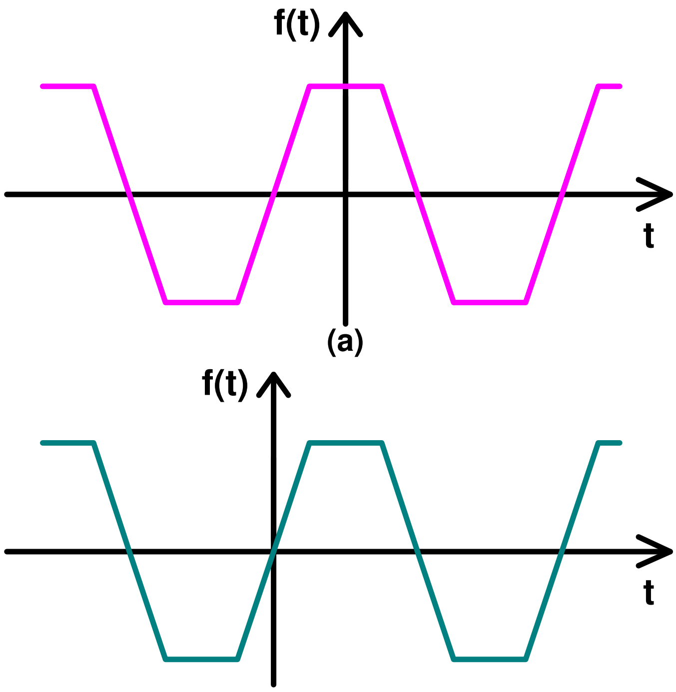


Figura 6 - (a) simetria de quarto de onda par (b) simetria de quarto de onda ímpar

Para as funções periódicas com simetria de quarto de onda, com simetria par, as equações usadas para calcular os coeficientes da série de Fourier se reduzem a:

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0 \qquad k = 2, 4, 6 \ldots \quad (k \text{ par})$$

[15]

$$a_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t).\cos(k.\omega.t).dt \qquad k = 1, 3, 5 \ldots \quad (k \text{ ímpar})$$

$$b_k = 0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \ (\text{qualquer } k)$$

Observe que as funções periódicas com simetria de quarto de onda, com simetria par, só possuem termos ímpares em cosseno, e seu valor médio é nulo.

Para as funções periódicas com simetria de quarto de onda, com simetria ímpar, as equações usadas para calcular os coeficientes da série de Fourier se reduzem a:

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0 \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \quad (\text{todo } k)$$

[16]

$$b_k = 0 \qquad k = 2, 4, 6 \ldots \quad (k \text{ par})$$

$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t).\text{sen}(k.\omega.t).dt \qquad k = 1, 3, 5 \ldots \quad (k \text{ ímpar})$$

Observe que as funções periódicas com simetria de quarto de onda, com simetria ímpar, só possuem termos ímpares em seno, e seu valor médio é nulo.

Exemplo 1 Calcular os coeficientes a_1 e b_1 da série de Fourier da senóide recortada de amplitude A como mostra a figura 7 abaixo.

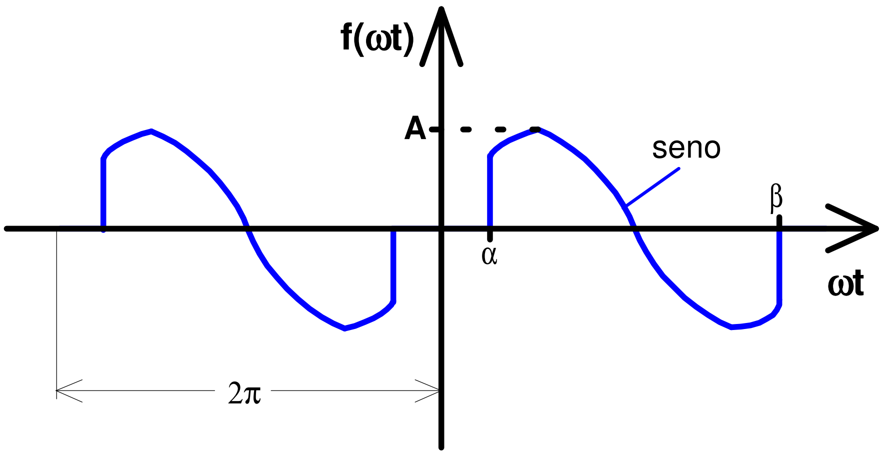


Figura 7

Solução: Das relações [9b] vem que:

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\cos(\omega t)d(\omega t) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta A.\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t)d(\omega t) = \frac{A}{2\pi}[\mathrm{sen}^2(\beta) - \mathrm{sen}^2(\alpha)]$$

$$\boldsymbol{b_1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\mathrm{sen}(\omega t)d(\omega t) = \frac{A}{\pi}\int_\alpha^\beta \mathrm{sen}(\omega t)\mathrm{sen}(\omega t)d(\omega t) = \frac{A}{2\pi}\left[(\beta - \alpha) + \frac{\mathrm{sen}(2\alpha) - \mathrm{sen}(2\beta)}{2}\right]$$

Exemplo 2 Calcular a série de Fourier do trem de pulsos de amplitude A e período T da figura 8 a seguir.

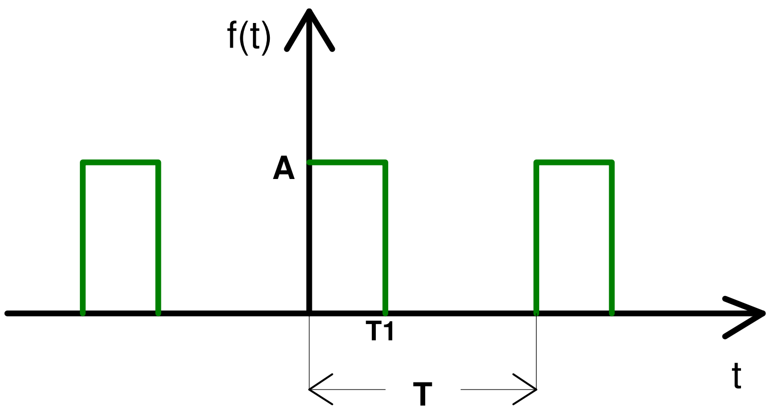


Figura 8

Solução: Das relações [9a] vem que:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T1} A.\cos(n\omega t)dt = \frac{2A}{n.T}[\mathrm{sen}(n\omega T1)]$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).dt = \frac{1}{T}\int_0^{T1} A.dt = \frac{A.T1}{T}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\mathrm{sen}(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T1} A.\mathrm{sen}(n\omega t)dt = \frac{2A}{n.T}[1 - \cos(n\omega T1)]$$

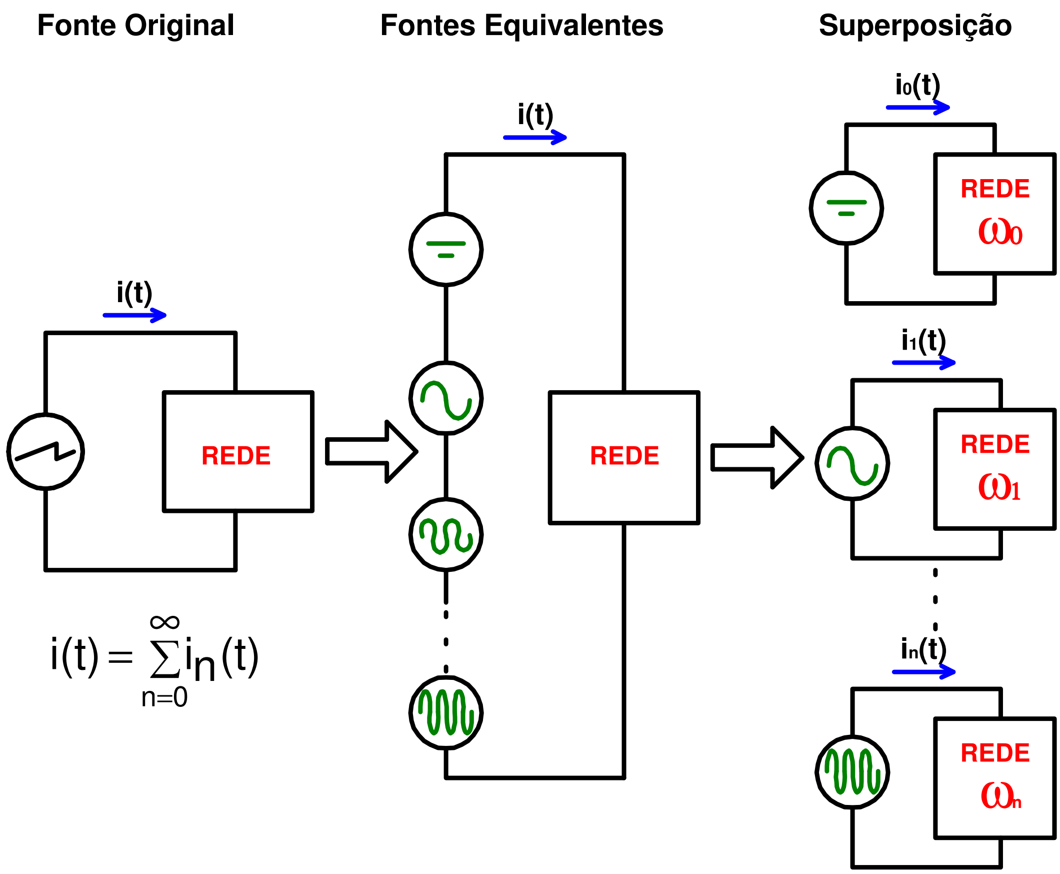
Portanto, escrevendo f(t) em termos dos coeficientes a_n e b_n vem que:

$$f(t) = \frac{A.T1}{2} + \frac{2A}{n.T}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{sen}(n\omega T1)\cos(n\omega t) + [1 - \cos(n\omega T1)]\mathrm{sen}(n\omega t)\right]$$

4. A SÉRIE DE FOURIER, O PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO E O CÁLCULO FASORIAL.

O principal conceito que se pode inferir da série de Fourier trigonométrica aplicada na análise de circuitos lineares que possuem geradores de tensão e/ou corrente com formas de ondas periódicas não senoidais, caracteriza-se pelos seguintes pontos:

a) O gerador de forma de onda não senoidal pode ser substituído por uma soma de geradores senoidais com amplitudes e freqüências dos respectivos harmônicos da série de Fourier de sua forma de onda periódica, além de um gerador constante (corrente contínua) com amplitude correspondente ao valor médio da forma de onda.
b) Se o circuito for linear pode-se aplicar o princípio da superposição, isto é, a resposta do circuito é a soma das respostas de cada termo (a cada gerador) da série de Fourier.
c) Se estivermos interessados apenas na resposta no regime permanente, pode-se utilizar a análise fasorial para se encontrar as respostas de cada termo (de cada gerador) senoidal (e/ou cossenoidal) da série de Fourier. Neste caso, facilita-se o trabalho se a série estiver escrita em sua forma compacta, isto é, ou somente em termos de seno ou de cosseno (ver item 2).



$$i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} i_n(t)$$

Figura 8 - Ilustração do Princípio da Superposição

Exemplo 3 Suponha um gerador de onda quadrada, de amplitude A e freqüência f Hertz (ou ω=2π.f rad/s) alimentado uma carga RL, conforme a figura 9 abaixo. Deseja-se determinar a corrente de regime permanente do circuito.

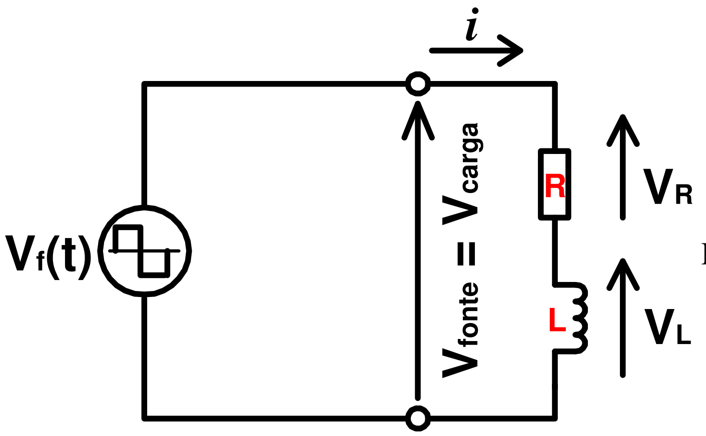


Figura 9 - Circuito RL série

A série de Fourier da função $v_f(t)$, com forma de onda quadrada, é dada por:

$$v_f(t) = \left(\frac{4A}{\pi}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\omega.t)}{n} \qquad n \text{ ímpar}$$

A solução será dada pela série de Fourier da corrente, onde cada harmônico de corrente pode ser calculado a partir de cada harmônico de tensão, dividindo-se o fasor tensão pela impedância calculada na freqüência do respectivo harmônico. O fasor corrente de cada harmônico é dado por:

$$I_n \underline{|\varphi_n} = \frac{V_n \underline{|\theta_n}}{Z_n \underline{|\phi_n}} = \frac{\left(4A/n\pi\right) \underline{|0^0}}{\sqrt{R^2 + (n\omega.L)^2} \underline{|\arctan\left(n\omega.L/R\right)}}$$

Portanto a corrente do circuito é dada pela seguinte série de Fourier:

$$\boldsymbol{i(t) = \frac{4A}{\pi} \cdot \sum \frac{1}{n.\sqrt{R^2 + (n\omega.L)^2}} \operatorname{sen}\left(n\omega.t - \arctan\left(n\omega.L/R\right)\right)}$$

Exemplo 4 A onda de tensão da figura a seguir é aplicada a um circuito série RL com R igual a 2000 Ω e L igual a 10 H. Achar a tensão no resistor empregando a série trigonométrica de Fourier.

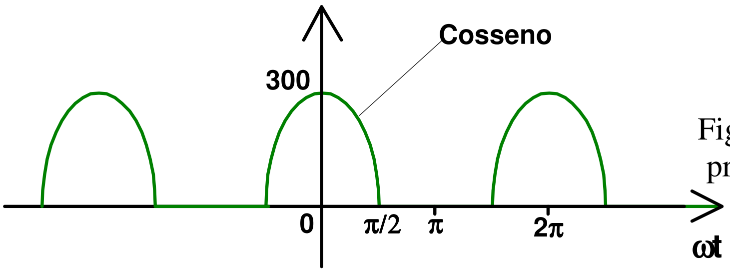


Figura 10 - Forma da tensão produzida por um retificador de meia onda.

Solução: A onda aplicada possui simetria par, portanto, contém apenas termos em cosseno, cujo os coeficientes são obtidos pela integração:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300.\cos(\omega t).\cos(n.\omega t).d(\omega t) = \frac{600}{\pi(1-n^2)} \cdot \cos(n\pi/2)$$

cos(nπ/2) é -1 quando n = 2, 6, 10, ... é +1 quando n = 4, 8, 12, ...
cos(nπ/2) é 0 quando n é ímpar

Para n igual a 1 a expressão é indeterminada e deve ser calculada separadamente.

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300.\cos^2(\omega t).d(\omega t) = \frac{300}{\pi} \cdot \left[\frac{\omega t}{2} + \frac{\text{sen}(2\omega t)}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{300}{2}$$

O valor de $a_0/2$, que é o valor médio da função é dado por:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 300.\cos(\omega t).d(\omega t) = \frac{300}{2\pi} [\text{sen}(\omega t)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{300}{\pi}$$

Assim, a série de Fourier da onda de tensão aplicada ao circuito RL série é dada por:

$$v = \frac{300}{\pi} \cdot \left\{ 1 + \frac{\pi}{2}\cos(\omega t) + \frac{2}{3}\cos(2\omega t) - \frac{2}{15}\cos(4\omega t) + \frac{2}{35}\cos(6\omega t) - ... \right\}$$

A impedância total do circuito série é Z = R + j(n.ωL) e deve ser calculada para cada harmônico na expressão da tensão v. Os resultados são mostrados na tabela abaixo.

n	n.ω	R	n.ωL	|Z|	θ
0	0	2k	0	2k	0°
1	377	2k	3,77k	4,26k	62°
2	754	2k	7,54k	7,78k	75,1°
4	1508	2k	15,08k	15,2k	82,45°
6	2262	2k	22,62k	22,6k	84,92°

Calculando-se os coeficientes para a série da corrente (observando os ângulos de atraso), temos:

n = 0 $\Rightarrow I_0 = \dfrac{300/\pi}{2k}$

n = 1 $\Rightarrow I_1 = \dfrac{300/2}{4,26k}\cos(\omega t - 62^\circ)$

n = 2 $\Rightarrow I_2 = \dfrac{600/3\pi}{7{,}78k}\cos(2\omega t - 75{,}1^{\circ})$ etc

A série da corrente é, então:

$$i = \frac{300}{2k\pi} + \frac{300}{(2)4{,}26k}\cos(\omega t - 62^{\circ}) + \frac{600}{3\pi(7{,}78k)}\cos(2\omega t - 75{,}1^{\circ}) - \frac{600}{15\pi(15{,}2k)}\cos(4\omega t - 82{,}45^{\circ}) +$$
$$+ \frac{600}{35\pi(22{,}6k)}\cos(6\omega t - 84{,}92^{\circ}) - ...$$

Fazendo-se o produto da corrente i pelo resistor de 2k vem que a tensão no resistor é:

$$\boldsymbol{v_R = 95{,}5 + 70{,}4\cos(\omega t - 62^{\circ}) + 16{,}4\cos(2\omega t - 75{,}1^{\circ}) - 1{,}67\cos(4\omega t - 82{,}45^{\circ}) +}$$
$$\boldsymbol{+ 0{,}483\cos(6\omega t - 84{,}92^{\circ}) - ...}$$

VALOR MÉDIO E RMS DE UMA FUNÇÃO PERIÓDICA

4.1. VALOR MÉDIO

O valor médio de uma função periódica, conforme já visto, é dado pela equação abaixo:

$$f_{médio} = F_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).dt \quad [17]$$

Representando-se *f(t)* por sua expansão em série de Fourier, tem-se:

$$F_0 = \frac{1}{T}\cdot\int_{t_0}^{t_0+T}\left[c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n.\text{sen}\left(n.\omega.t + \theta_n\right)\right].dt = c_0 = \frac{a_0}{2} \quad [18]$$

4.2. VALOR RMS

O valor médio de uma função periódica, conforme já visto, é dado pela equação abaixo:

$$f_{RMS} = F_R = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 .dt} \quad [19]$$

Representando-se *f(t)* por sua expansão em série de Fourier, tem-se:

$$F_R = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_{t_0}^{t_0+T}\left[c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n.\text{sen}\left(n.\omega.t + \theta_n\right)\right]^2 .dt} \quad [20]$$

A integração, em um período, de termos em seno, ou produtos de termos em seno com freqüências distintas é nula. Portanto, a equação anterior se reduz a:

$$F_R = \sqrt{\frac{1}{T}\left(c_0^2.T + \sum_{n=1}^{\infty} T.\frac{c_n^2}{2} \right)} = \sqrt{c_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_n}{\sqrt{2}}\right)^2} \qquad [21]$$

Observa-se, portanto, que o valor rms consiste na raiz quadrada da soma dos quadrados dos valores rms dos harmônicos individuais mais o quadrado do valor médio da função periódica.

5. ONDULAÇÃO E FATOR DE ONDULAÇÃO DE TENSÕES E CORRENTES PERIÓDICAS NÃO SENOIDAIS.

Considere um dipolo de um circuito linear a parâmetros concentrados som uma tensão e corrente periódicas não senoidais, descritas pelas séries de Fourier abaixo:

$$v = V_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} V_{pn}\,\mathrm{sen}(n\omega.t + \theta_{vn})$$

$$[22]$$

$$i = I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} I_{pn}\,\mathrm{sen}(n\omega.t + \theta_{in})$$

onde: V_{DC} – valor da componente contínua da tensão (valor médio da tensão)
V_{pn} – amplitude do harmônico de ordem n da tensão (valor de pico)
θ_{vn} – ângulo de fase do harmônico de ordem n da tensão
I_{DC} – valor da componente contínua da corrente (valor médio da corrente)
I_{pn} – amplitude do harmônico de ordem n da corrente (valor de pico)
θ_{in} – ângulo de fase do harmônico de ordem n da corrente

A partir dos resultados do item 5.2, pode-se determinar os valores rms (eficazes) da tensão e da corrente através das equações abaixo:

$$V_R = \sqrt{V_{DC}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2}$$

$$[23]$$

$$I_R = \sqrt{I_{DC}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}$$

onde: $V_n = V_{pn}\big/\sqrt{2}$ é o valor rms (eficaz) do harmônico de ordem n da tensão
$I_n = I_{pn}\big/\sqrt{2}$ é o valor rms (eficaz) do harmônico de ordem n da corrente

Os somatórios dentro das equações [23], referem-se à soma dos quadrados dos valores rms (eficazes) dos componentes harmônicos da tensão e da corrente. Como os componentes harmônicos são senóides e, portanto possuem médias nulas, as somatórias referem-se, portanto, ao quadrado do valor rms da componente CA das formas de onda, denominada de ondulação. As componentes CA (ou de ondulação) da tensão e da corrente são, portanto, definidas pelas equações a seguir:

$$V_{CA} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} V_n^2} = \sqrt{V_R^2 - V_{DC}^2}$$

[24]

$$I_{CA} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2} = \sqrt{I_R^2 - I_{DC}^2}$$

A partir das equações [24], define-se os fatores de ondulação da tensão e da corrente, conforme as equações abaixo:

$$\boldsymbol{r_v = \frac{V_{CA}}{V_{DC}}} \quad \textbf{ou, em valores percentuais} \quad \boldsymbol{r_v\,\% = r_v \bullet 100\%}$$

[25]

$$\boldsymbol{r_i = \frac{I_{CA}}{I_{DC}}} \quad \textbf{ou, em valores percentuais} \quad \boldsymbol{r_i\,\% = r_i \bullet 100\%}$$

onde: r_v é fator de ondulação de tensão, e r_i é o fator de ondulação de corrente.

Observe que para uma tensão (ou corrente) com forma de onda puramente alternada, o fator de ondulação é infinito, e para uma tensão (ou corrente) com forma de onda constante, o fator de ondulação é nulo.

6. POTÊNCIA E FATOR DE POTÊNCIA EM CIRCUITOS LINEARES COM CORRENTES E TENSÕES PERIÓDICAS NÃO SENOIDAIS.

Considere um dipolo de um circuito linear a parâmetros concentrados som uma tensão e corrente periódicas não senoidais, descritas pelas séries de Fourier das equações [22].

A potência instantânea nos terminais deste dipolo será dada pelo produto *v.i*. A potência média (ou eficaz) deste dipolo será, portanto:

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p.dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v.i.dt$$

[26]

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[V_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} V_{pn}\,\text{sen}(n\omega.t + \theta_{vn})\right].\left[I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} I_{pn}\,\text{sen}(n\omega.t + \theta_{in})\right]dt$$

Tendo em vista que os termos em seno e os termos com produto de senos de freqüências distintas possuem integrações nulas em um período, tem-se o seguinte resultado para a equação anterior:

$$P = V_{DC}.I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_{pn}.I_{pn}}{2} \cos(\theta_{vn} - \theta_{in}) = V_{DC}.I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n.I_n \cos(\theta_{vn} - \theta_{in})$$

[27]

$$P = V_{DC}.I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n.I_n \cos\varphi_n \qquad \text{onde} \quad \varphi_n = \theta_{vn} - \theta_{in}$$

A equação [26] mostra que a potência média (eficaz) total é a soma das potências médias obtidas a partir da interação de correntes e tensões com a mesma freqüência; correntes e tensões com freqüências diferentes não interagem para produzir potência média (eficaz).

Da mesma forma que é definida para circuitos com tensões e correntes senoidais, define-se também a potência aparente para circuitos com tensões e correntes periódicas não senoidais como sendo o produto da tensão rms (eficaz), com a corrente rms (eficaz), conforme a equação abaixo:

$$S = V_R \cdot I_R = \sqrt{V_{DC}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2} \cdot \sqrt{I_{DC}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2} \qquad [28]$$

Convém chamar atenção aqui que o termo **potência eficaz**, refere-se à **potência média**, isto é, o valor médio da potência instantânea, ao passo que os termos tensão e corrente eficazes referem-se aos valores rms da tensão e da corrente.

A partir das equações [27] e [28], determina-se o fator de potência, que é definido como sendo a relação entre a potência média (eficaz) e a potência aparente, conforme a equação abaixo:

$$fp = \frac{P}{S} = \frac{P}{V_R.I_R}$$

[29]

$$fp = \frac{V_{DC}.I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n.I_n \cos\varphi_n}{\sqrt{V_{DC}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2} \cdot \sqrt{I_{DC}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}}$$

Observe da equação [29], que quando as formas de onda de corrente e tensão não são senoidais, o fator de potência não pode ser igualado a cos(φ), onde φ é o ângulo da impedância do circuito.

6.1. POTÊNCIA E FATOR DE POTÊNCIA QUANDO UMA DAS FORMAS DE ONDA (TENSÃO OU CORRENTE) FOR SENOIDAL.

É muito comum em circuitos de eletrônica de potência ocorrer que uma da formas de onda, geralmente a tensão, de um determinado dipolo seja senoidal, enquanto que a corrente do mesmo é periódica, mas não senoidal. Neste caso, as equações dos itens anteriores podem ser simplificadas conforme apresentado a seguir.

Seja um dipolo, cujas formas de onda de tensão e corrente possam ser representadas pelas equações abaixo:

$$v = V_{p1}\ \mathrm{sen}(\omega.t + \theta_{v1})$$

[30]

$$i = I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} I_{pn}\ \mathrm{sen}(n\omega.t + \theta_{in})$$

Então, o cálculo da potência média (equações [26] e [27]) se reduz a:

$$P = V_1.I_1 \cos\varphi_1 \qquad [31]$$

Logo, pode-se observar que apenas o componente de primeiro harmônico da corrente é responsável pela potência média (eficaz). Os demais componentes, tanto o DC, quanto os harmônicos não produzem potência média.

A potência aparente do dipolo será dada então por:

$$S = V_1 \cdot I_R = V_1 \cdot \sqrt{I_{DC}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2} \qquad [32]$$

O fator de potência, neste caso, é determinado pela equação abaixo:

$$fp = \frac{P}{S} = \frac{V_1.I_1 \cos(\varphi_1)}{V_1 \cdot I_R} = \frac{I_1 \cos\varphi_1}{\sqrt{I_{DC}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}} = \delta \cdot \cos(\varphi_1)$$

[33]

$$\delta = \frac{I_1}{\sqrt{I_{DC}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}} \leq 1 \qquad (\delta = 1 \text{ para correntes senoidais})$$

Quando a forma de onda da corrente possuir componente DC (médio) nulo, as equações da potência aparente e do fator de potência podem ser reescritas conforme a seguir:

$$S = V_1 \cdot I_R = V_1 \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}$$

$$fp = \frac{P}{S} = \frac{V_1.I_1 \cdot \cos(\varphi_1)}{V_1 \cdot I_R} = \frac{I_1 \cos\varphi_1}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}} = FDH \cdot \cos(\varphi_1) \qquad [34]$$

$$FDH = \frac{I_1}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}} \leq 1 \qquad \text{FDH: Fator de Distorção Harmônico}$$

Pode-se, então, desenvolver-se a expressão da potência aparente.

$$S^2 = (V_1.I_1)^2 + \left(V_1^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} I_n^2 \right) = S_1^2 + D^2 \quad [35]$$

onde: S_1 é a potência aparente de primeiro harmônico
D é denominada de potência de distorção harmônico

A potência aparente S_1 é a potência aparente para formas de onda senoidais e pode ser escrita em termos da potência média (ativa ou eficaz) e da potência reativa, ambas de primeiro harmônico.

$$S_1^2 = P_1^2 + Q_1^2$$

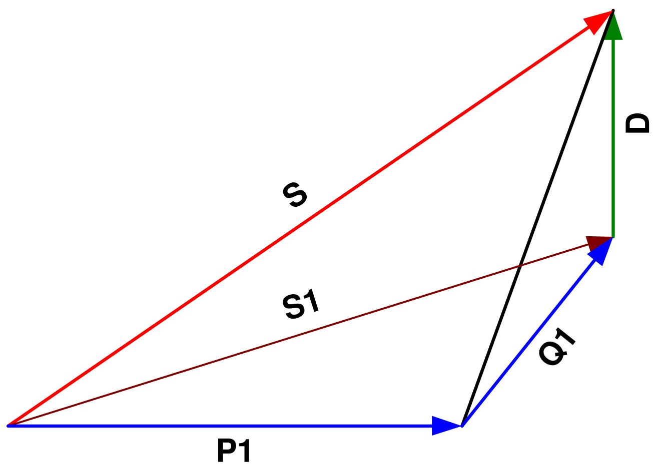
$$P_1 = V_1.I_1 \cos(\varphi_1) \quad [36]$$

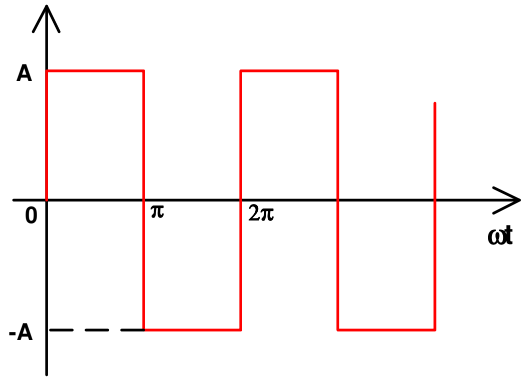
$$Q_1 = V_1.I_1 \,\mathrm{sen}(\varphi_1)$$

Logo, a equação [35] pode ser reescrita conforme a equação [37], mostrando que a potência aparente total é composta de um componente de potência ativa, devido ao primeiro harmônico, um componente de potência reativa devido ao primeiro harmônico, e um componente de distorção harmônica, devidos aos demais harmônicos de corrente.

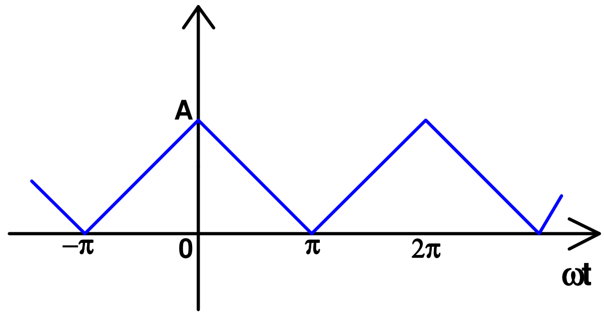
$$S^2 = P_1^2 + Q_1^2 + D^2 \quad [37]$$

A equação [37] define um tetraedro de potências, ao invés de um triângulo de potências como é o caso de circuitos com formas de onda puramente senoidais.

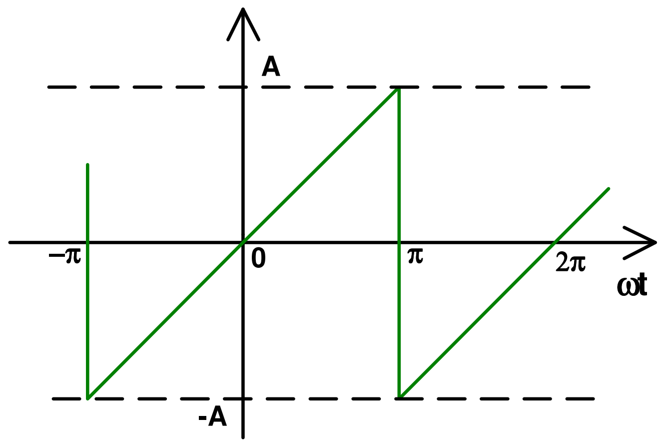




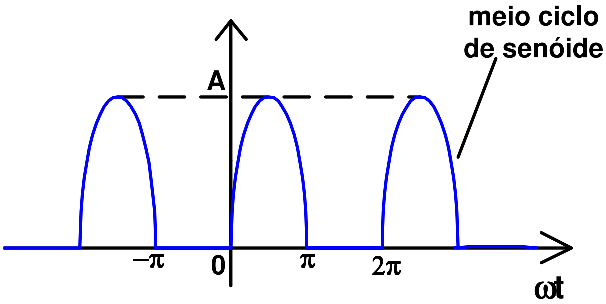
$$f(\omega t)=\frac{4A}{\pi}\left[\operatorname{sen}(\omega t)+\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3\omega t)+\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5\omega t)+\frac{1}{7}\operatorname{sen}(7\omega t)+\ldots\right]$$



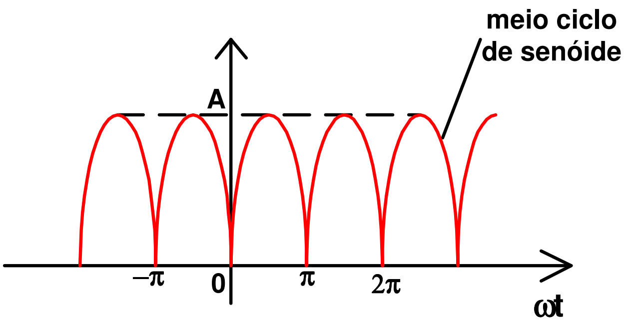
$$f(\omega t)=\frac{A}{2}+\frac{4A}{\pi^2}\left[\cos(\omega t)+\frac{1}{(3)^2}\cos(3\omega t)+\frac{1}{(5)^2}\cos(5\omega t)+\frac{1}{(7)^2}\cos(7\omega t)+\ldots\right]$$



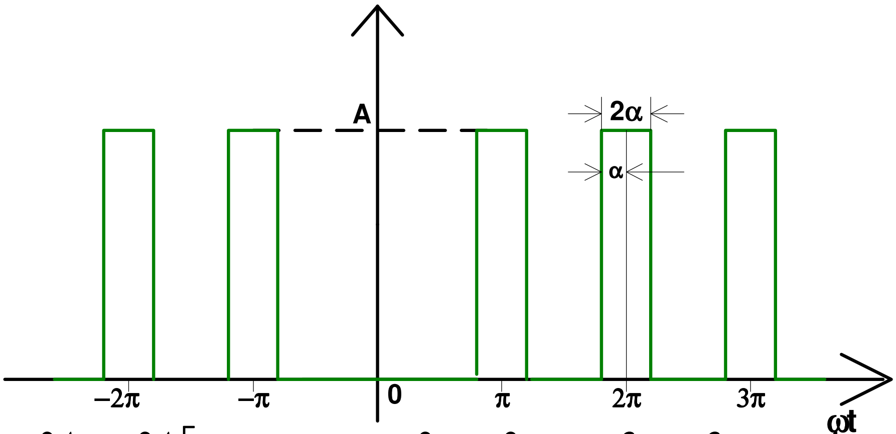
$$f(\omega t)=\frac{2A}{\pi}\left[\operatorname{sen}(\omega t)-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\omega t)+\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3\omega t)-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4\omega t)+\frac{1}{5}\operatorname{sen}(5\omega t)+\ldots\right]$$



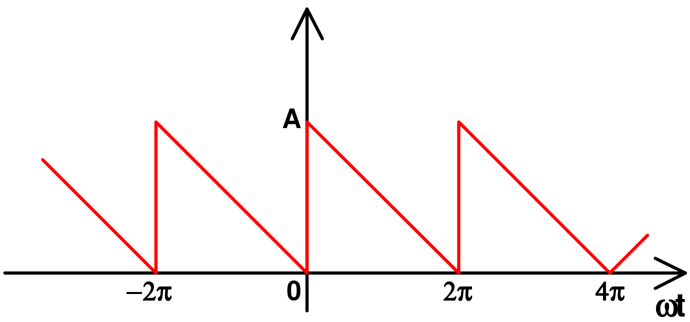
$$f(\omega t)=\frac{A}{\pi}\left[1+\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\omega t)-\frac{2}{1\cdot 3}\cos(2\omega t)-\frac{2}{3\cdot 5}\cos(4\omega t)-\frac{2}{5\cdot 7}\cos(6\omega t)-\frac{2}{7\cdot 9}\cos(8\omega t)-\ldots\right]$$



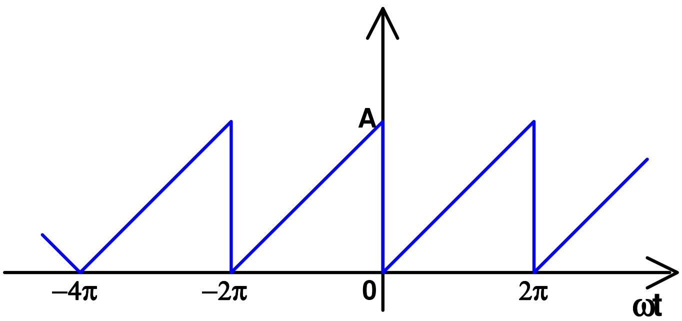
$$f(\omega t)=\frac{2A}{\pi}\left[1-\frac{2}{1\cdot 3}\cos(2\omega t)-\frac{2}{3\cdot 5}\cos(4\omega t)+\frac{2}{5\cdot 7}\cos(6\omega t)-\frac{2}{7\cdot 9}\cos(8\omega t)+\ldots\right]$$



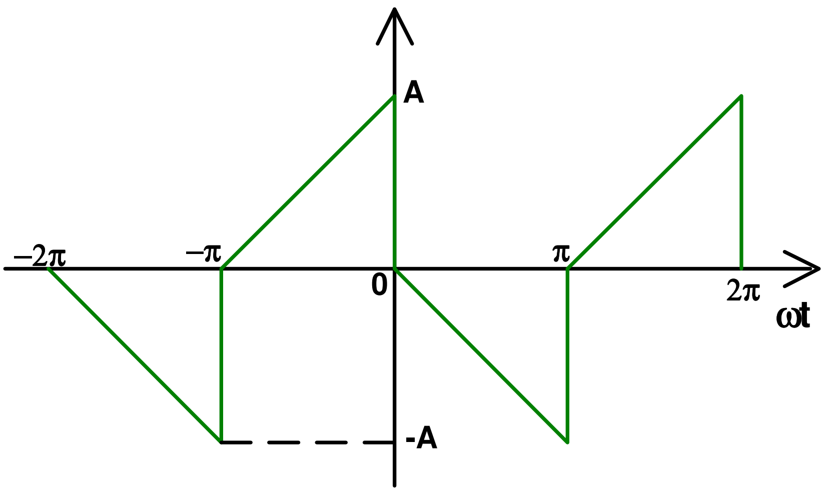
$$f(\omega t)=\frac{2A\alpha}{\pi}-\frac{2A}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{1}-\frac{\operatorname{sen}2\alpha\cos 2\alpha}{2}+\frac{\operatorname{sen}3\alpha\cos 3\alpha}{3}-\frac{\operatorname{sen}4\alpha\cos 4\alpha}{4}+\ldots\right]$$



$$f(\omega t)=\frac{A}{2}+\frac{A}{\pi}\left[\text{sen}(\omega t)+\frac{1}{2}\text{sen}(2\omega t)+\frac{1}{3}\text{sen}(3\omega t)+\frac{1}{4}\text{sen}(4\omega t)+\frac{1}{5}\text{sen}(5\omega t)...\right]$$

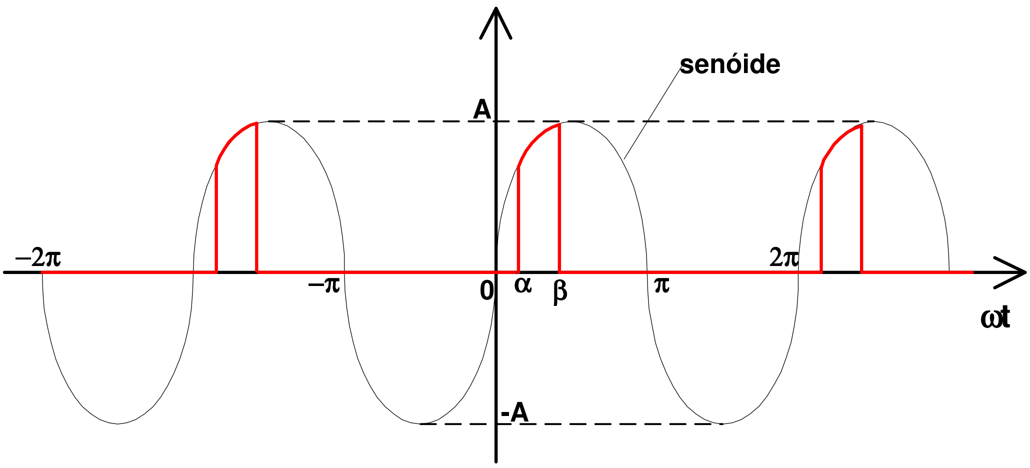


$$f(\omega t)=\frac{A}{2}-\frac{A}{\pi}\left[\text{sen}(\omega t)+\frac{1}{2}\text{sen}(2\omega t)+\frac{1}{3}\text{sen}(3\omega t)+\frac{1}{4}\text{sen}(4\omega t)+\frac{1}{5}\text{sen}(5\omega t)...\right]$$



$$f(\omega t)=\frac{4A}{\pi^2}\left[\cos(\omega t)+\frac{1}{(3)^2}\cos(3\omega t)+\frac{1}{(5)^2}\cos(5\omega t)+\frac{1}{(7)^2}\cos(7\omega t)+\frac{1}{(9)^2}\text{sen}(9\omega t)+...\right]+$$

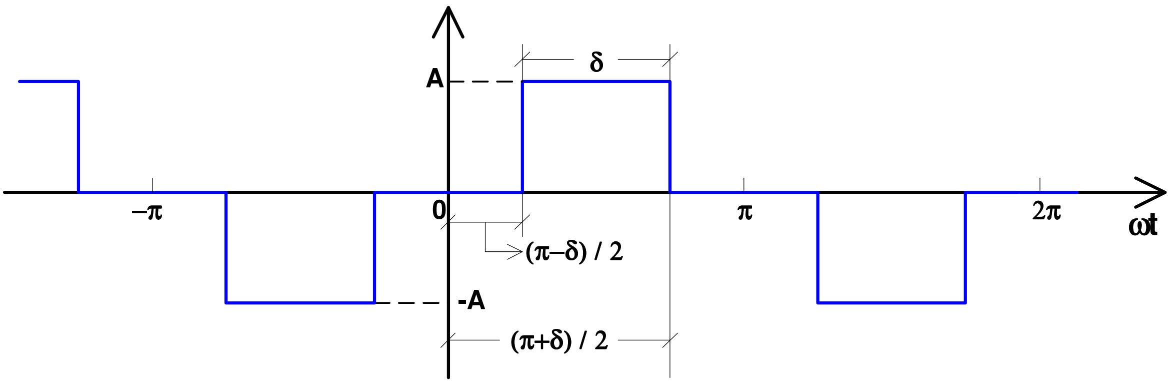
$$-\frac{2A}{\pi}\left[\text{sen}(\omega t)+\frac{1}{3}\cos(3\omega t)+\frac{1}{5}\cos(5\omega t)+\frac{1}{7}\cos(7\omega t)+\frac{1}{9}\text{sen}(9\omega t)+\frac{1}{11}\text{sen}(11\omega t)...\right]$$



$$f(\omega t)=\frac{A}{2\pi}\left[\cos(\alpha)-\cos(\beta)\right]+\frac{A}{2\pi}\left[\operatorname{sen}^2(\beta)-\operatorname{sen}^2(\alpha)\right]\cdot\cos(\omega t)+\frac{A}{2\pi}\left[(\beta-\alpha)+\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)-\operatorname{sen}(2\beta)}{2}\right]\cdot\operatorname{sen}(\omega t)+$$

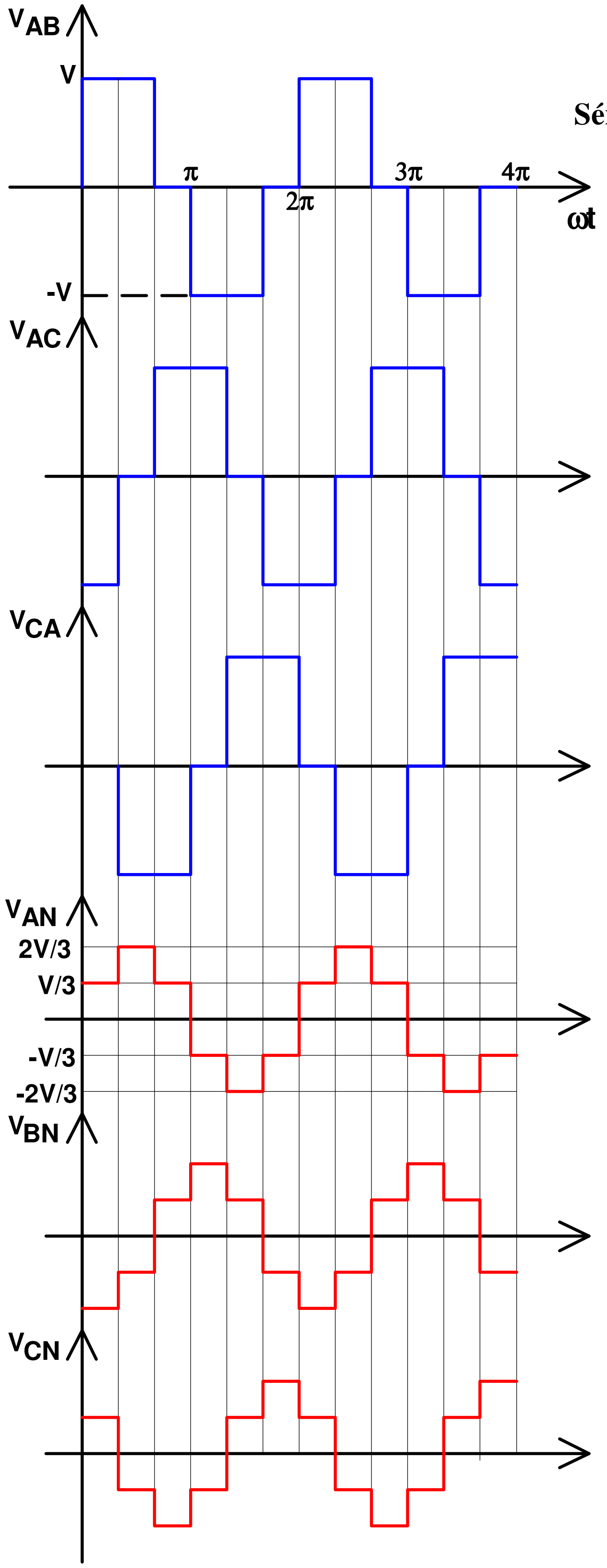
$$+\frac{A}{2\pi}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[\frac{\cos[(1-n)\alpha]-\cos[(1-n)\beta]}{(1-n)}+\frac{\cos[(1+n)\alpha]-\cos[(1+n)\beta]}{(1+n)}\right]\cos(n.\omega t)\right\}+$$

$$+\frac{A}{2\pi}\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[\frac{\operatorname{sen}[(1-n)\beta]-\operatorname{sen}[(1-n)\alpha]}{(1-n)}+\frac{\operatorname{sen}[(1+n)\alpha]-\operatorname{sen}[(1+n)\beta]}{(1+n)}\right]\operatorname{sen}(n.\omega t)\right\}$$



$$f(\omega t)=\frac{4A}{n\pi}\cdot\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)\operatorname{sen}(\omega t)+\operatorname{sen}\left(\frac{3\delta}{2}\right)\operatorname{sen}(3\omega t)+\operatorname{sen}\left(\frac{5\delta}{2}\right)\operatorname{sen}(5\omega t)+\operatorname{sen}\left(\frac{7\delta}{2}\right)\operatorname{sen}(7\omega t)+\ldots\right]$$

Forma de onda de um inversor trifásico
(Seis pulsos - 3 semicondutores em condução simultânea)

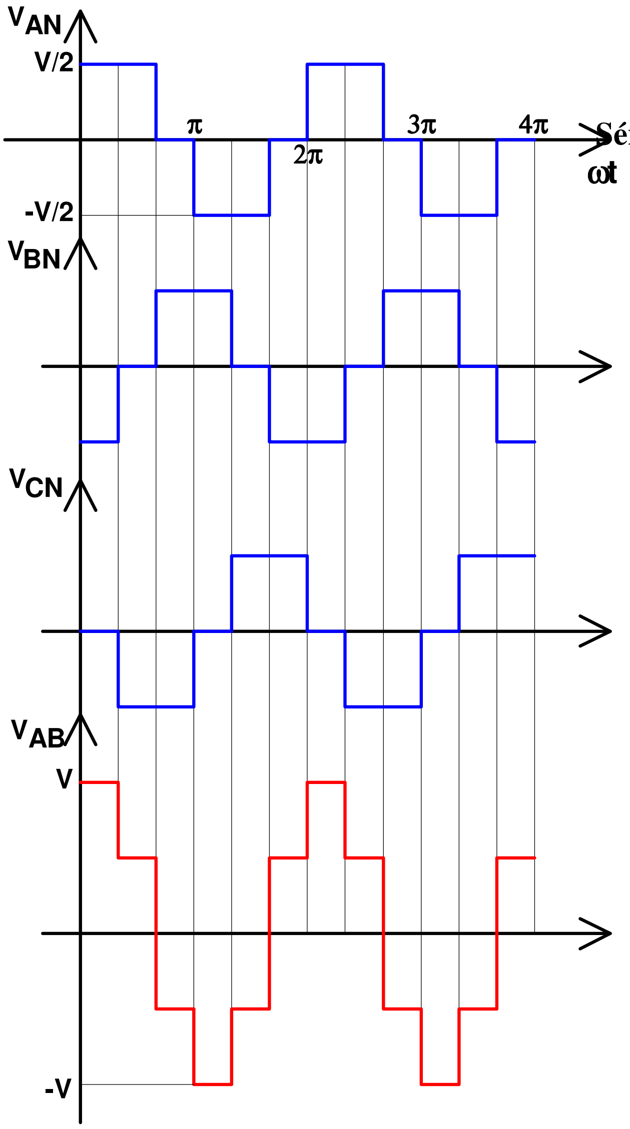


Série de Fourier

$$V_{AB} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4V}{n\pi} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \cdot \text{sen}\left[n\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$V_{AN} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4V}{n\pi\sqrt{3}} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \cdot \text{sen}(n\omega t)$$

Forma de onda de um inversor trifásico
(Seis pulsos - 2 semicondutores em condução simultânea)



Série de Fourier

$$V_{AN} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V}{n\pi} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \cdot \mathrm{sen}\left[n\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$V_{AB} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4V\sqrt{3}}{n\pi} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \cdot \mathrm{sen}\left[n\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$