

Prática 6:

CIRCUITO RLC, TRANSIENTES e RESSONÂNCIA

Objetivos

Analisar o comportamento de circuitos RL, LC e RLC e analogias eletromecânicas. Vamos investigar o efeito da ressonância do circuito RLC no regime de oscilação forçada (sob ação de uma tensão harmônica) e no regime de oscilação livre (transiente elétrico).

Introdução

Circuito RL

As Figuras 01 e 02, abaixo, mostram um circuito contendo um resistor (R) e um indutor (L) em série. A regra de Kirchhoff aplicada ao circuito leva a:

$$V = L \frac{dI}{dt} + RI \quad (1)$$

Cuja solução é:

$$I = (V_0 / R) [1 - \exp(-t/\tau)] \quad (2)$$

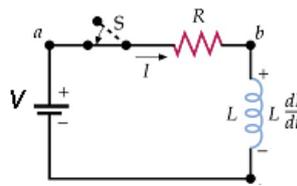


Figura - 01

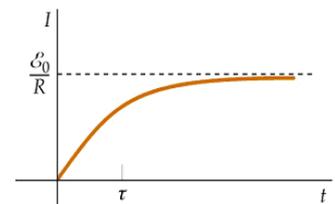


Figura - 02

onde $\tau = L/R$.

Circuito LC

A Figura 03, ao lado, mostra um capacitor ligado a um indutor e a uma chave. Vamos supor inicialmente que a chave esteja aberta e que o capacitor tenha uma carga inicial Q_0 . Em $t=0$ a chave é fechada e a carga flui através do indutor. Para simplificar nossa análise, vamos desconsiderar qualquer resistência no circuito (isto será feito a seguir).

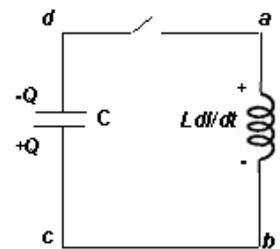


Figura - 03

Escolheremos arbitrariamente a direção da corrente no circuito de modo que quando a carga na placa de baixo do capacitor for mais $+Q$ a corrente é: $I = dQ/dt$. Com esta escolha a corrente será negativa logo depois da chave ser fechada ($t \sim 0$).

Com a escolha do sentido positivo da corrente, a queda de potencial no indutor, de a até b , é LdI/dt . No capacitor, de c até d , há uma queda de potencial Q/C . Então, a regra de

Kirchhoff aplicada ao circuito resulta em: $L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$. Como, $I = dQ/dt$ temos

$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$. Note que esta equação tem a mesma forma da equação que descreve o sistema massa-mola (oscilador harmônico): $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$. Sabemos que este sistema oscila na sua frequência angular natural $\omega_o^2 = k/m$, ou seja, $x(t) = A \cos(\omega_o t + \delta)$ [vide livros didáticos]. Analogamente, o circuito LC oscila com $\omega_o^2 = 1/LC$ e a equação para $Q(t)$ pode ser escrita como:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_o^2 Q \quad (3)$$

cuja solução pode ser escrita como:

$$Q(t) = A \cos(\omega t - \delta) \quad (4)$$

Uma vez que $I = dQ/dt$, obtemos então:

$$I(t) = -\omega A \sin(\omega t - \delta) \quad (5)$$

Vamos supor, por exemplo, que inicialmente a chave esteja aberta e que o capacitor tenha uma carga inicial Q_o . Em $t=0$ a chave é fechada a carga flui através do indutor. Com estas condições iniciais, a constante de fase deve ser nula ($\delta = 0$), pois a carga é máxima em $t = 0$ e da Eq.4 obtemos $A = Q_o$. Substituindo na Eq.5, temos então que a corrente é nula no instante $t = 0$ pois $I(t) = -\omega Q_o \sin(\omega t)$.

A Figura 04, ao lado, ilustra o comportamento de $Q(t)$ (a) e $I(t)$ (b) contra o tempo, no exemplo considerado.

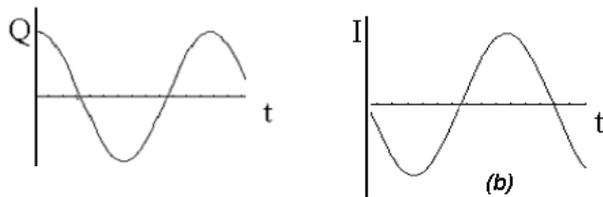


Figura 04

Circuito RLC

Analogamente ao caso do atrito na mecânica, o efeito do resistor está sempre presente, embora possa ser pequeno em alguns experimentos. Consideraremos a seguir um circuito RLC em série alimentado por uma fonte de tensão $V(t)$ (vide Figura 05, abaixo).

A lei de Kirchhoff aplicada a este circuito fornece a equação: $V(t) - L \frac{dI}{dt} - RI - \frac{Q}{C} = 0$ onde $I = dQ/dt$, logo:

$$V(t) = L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

(6)

Consideremos inicialmente o caso em que $V(t) = V_0 = 0$ (constante no tempo) com mesma condição inicial discutida no caso LC: em $t = 0$, $Q(0) = Q_0$, $V I (t) = 0$. Neste caso temos:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t - \delta) \quad (7)$$

$$\text{com } \gamma = R/2L \quad \text{e} \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}$$

ou seja, $Q(t)$ pode ser considerado um cosseno cuja amplitude decai exponencialmente. Quando $R \rightarrow 0$ então $\gamma \rightarrow 0$ e $\omega_1 \rightarrow \omega_0$, o sistema se comporta como um circuito LC puro. Tal como comentado no caso do circuito LC, o valor de δ depende das condições iniciais do problema. No caso em que o capacitor está inicialmente carregado e a chave é fechada em $t = 0$, temos $\delta = 0$, tal como no caso LC. Este comportamento é análogo ao oscilador amortecido por um meio viscoso estudado no Lab. Física Geral II. Em particular a condição inicial considerada neste exemplo é análoga ao caso em que em $t = 0$, o sistema massa-mola tem amplitude máxima (x_0) e velocidade nula (Figura 06, abaixo, onde a linha contínua corresponde à função $x(t) = x_0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t)$ e a envoltória tracejada corresponde ao decaimento exponencial $e^{-\gamma t}$).

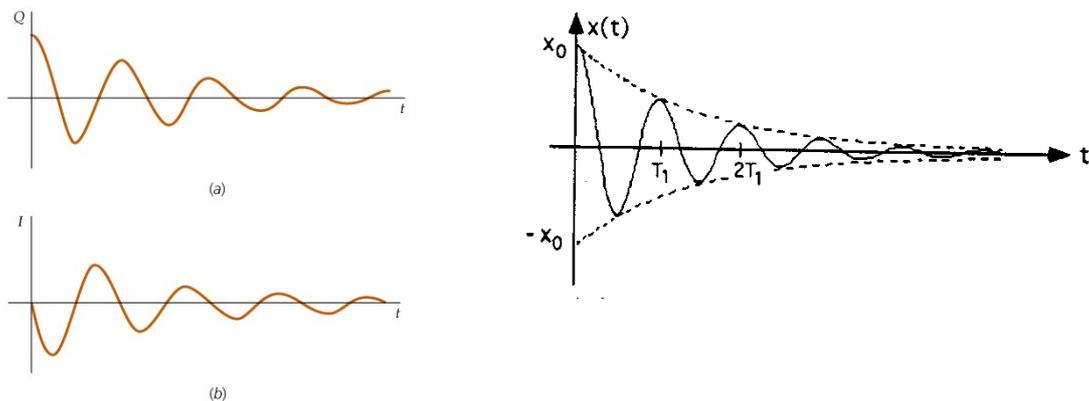


Figura 06 - Comparação do sinal transiente de um circuito RLC, carga no capacitor (Q) e corrente (I) com um sistema massa-mola.

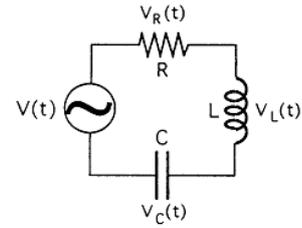


Figura - 05

A Figura anterior ilustra um exemplo de oscilação **sub-amortecida** onde $\omega_0 > \gamma$. Devemos notar que com o aumento de γ , ω_1 diminui e a amplitude de oscilação decai mais rápido. Ou seja, podemos dizer que o tempo característico $\tau = 1/\gamma$ diminui. Além disso, no caso $\omega_0 < \gamma$, $\omega_1 < 0$, ou seja, ω_1 torna-se um valor imaginário. Este caso é chamado de regime **super-amortecido** e não há oscilação. O caso $\omega_0 = \gamma$ é chamado de amortecimento **crítico**.

No Lab. de Fis.II estudamos o sistema massa mola no caso de oscilações livres, amortecidas e forçadas. No caso de oscilação forçada o sistema estava sujeito a uma força externa harmônica (senoidal ou cosenoidal), do tipo $F_{ex} = F_0 \cdot \text{sen}(\omega t)$. Analogamente, podemos estudar oscilações forçadas no circuito RLC usando uma fonte de tensão harmônica:

$$V_0 \cdot \text{sen}(\omega t) = L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \quad (8)$$

No estado estacionário, a solução da Eq.8 é dada por $Q(t) = Q_0 \text{sen}(\omega t - \delta)$ e conseqüentemente $I(t) = I_0 \cdot \text{cos}(\omega t - \delta)$ onde $I_0 = \omega Q_0$ com:

$$\omega Q_0 = I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - L\omega\right)^2}} \quad (9)$$

$$(\text{tg} \delta)^{-1} = \left(\frac{1}{\omega C} - L\omega\right) / R \quad (10)$$

A dependência com a freqüência é ilustrada na Figura abaixo para três valores distintos de R. Nota-se que a corrente é máxima na **freqüência de ressonância**:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11)$$

Neste caso ($\omega = \omega_0$) pode-se mostrar que I_0 é máxima com valor V_0/R .

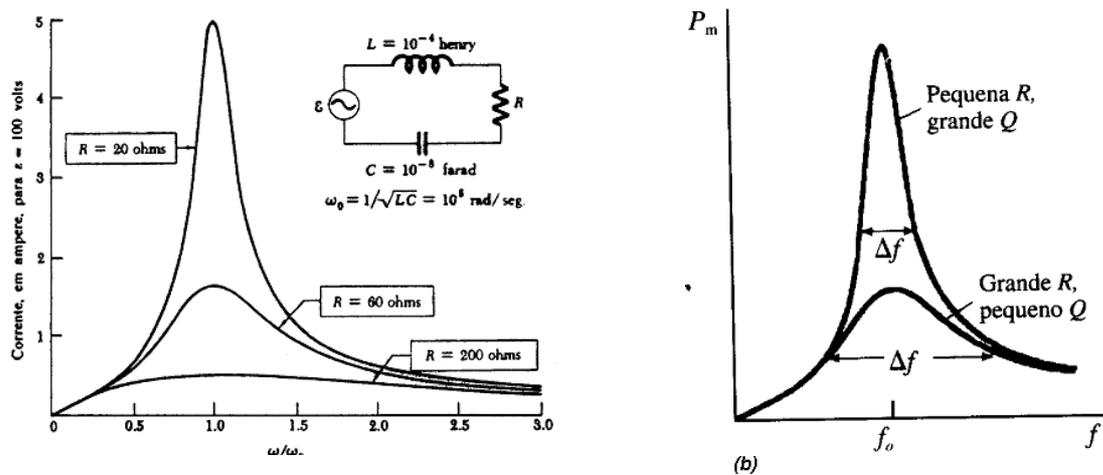


Figura - 07

A Figura 07 (b) mostra a potência média fornecida pelo gerador ao circuito, em função da frequência do gerador, para dois valores diferentes de R, num circuito RLC em série. A potência média é máxima quando a frequência do gerador for igual à frequência de ressonância.

Quando a resistência for pequena (figura 07(a)), a curva de ressonância é estreita; quando for grande, a curva é larga. Estas curvas podem ser caracterizadas pela largura de ressonância Δf , onde Δf também é chamado de $\frac{1}{2}$ largura.

Esta largura é a diferença das frequências em dois pontos da curva que correspondem a potência igual à metade da potencia máxima. Podemos definir o fator Q de um circuito RLC como:

$$Q = \frac{2\pi\omega}{|\Delta E|} = \omega_0 \frac{L}{R} \quad (12)$$

Quando a ressonância for razoavelmente aguda (isto é, quando for maior que cerca de 2 ou de 3), o fator Q pode ser aproximado por $Q = f_0/\Delta f$. Podemos assim, fazer uma analogia entre o circuito elétrico e um oscilador mecânico (sistema massa-mola):

obs: Q é uma constante adimensional que não tem nenhuma relação com a carga do capacitor, que também denotamos com a letra Q .

Parâmetros mecânicos

deslocamento, x

velocidade, $v = \frac{dx}{dt}$

aceleração, $a = d^2x/dt^2$

massa, m

constante elástica da mola, k

coeficiente de atrito, b

força de atrito, $-b\left(\frac{dx}{dt}\right)$

frequência de ressonância, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

energia cinética, $\frac{1}{2}mv^2$

energia potencial, $\frac{1}{2}kx^2$

Parâmetro elétricos

carga, q

corrente, $i = \frac{dq}{dt}$

variação da corrente: $\frac{di}{dt}$

indutância, L

inverso da capacitância, $\frac{1}{C}$

resistência, R

queda de tensão, Ri

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

energia potencial, $\frac{1}{2}Li^2$

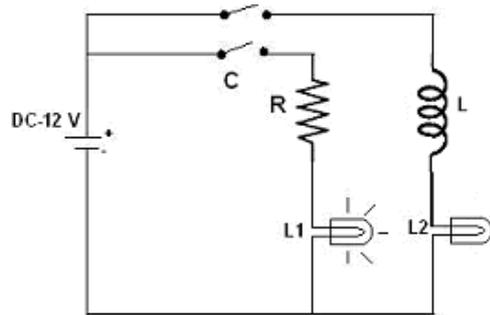
energia potencial, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}\right)q^2$

I. Transiente do circuito RL

O indutor oferece “*resistência*” a *mudanças* no valor da corrente. Para esclarecer melhor, consideremos um indutor ideal, que é constituído de fios cuja resistência ôhmica é muito baixa. Neste caso, se a corrente for constante, a diferença de potencial nos terminais do indutor será praticamente nula e podemos dizer que o **indutor ideal não oferece resistência à passagem da corrente constante**. Entretanto, se obrigarmos que haja uma variação no valor da corrente (por exemplo, ao ligar ou interromper o circuito) imediatamente irá aparecer uma diferença de potencial nos terminais do indutor, $V_L = -L \cdot di/dt$.

Demonstração

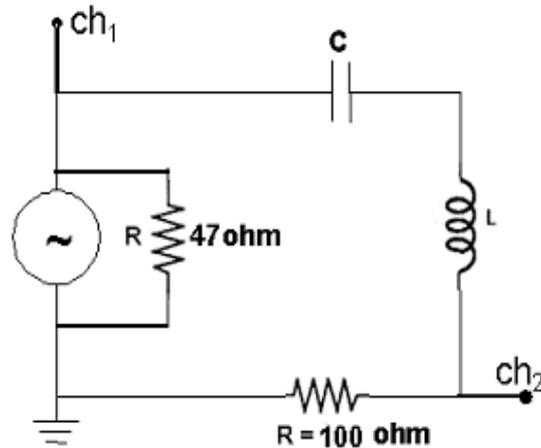
Observe o circuito da figura 08, no qual L_1 e L_2 representam duas lâmpadas de lanterna de automóvel (12V), R uma resistência $R \sim 14\Omega$ e L um indutor de 1000 espiras com núcleo de ferro fechado.



II. Circuito RLC e ressonância

Monte o circuito RLC da Figura 09, com gerador de tensão alternada de frequência variável, indutor de 1000 espiras ($L \sim 47\text{mH}$) e capacitor $C = 0,1\mu\text{F}$, tal como ilustrado ao lado, seguindo os seguintes passos:

i) Coloque o “terra” (pino preto, malha) do cabo coaxial, entre $R = 47\Omega$ e $R = 100\Omega$, como na Figura ao lado; não é preciso ligar o terra do outro cabo, pois são comuns, se preferir ligar, coloque os juntos neste ponto.



Dica: a placa de montagem tem um “ramo” (com 8 bornes), próprio para várias ligações.

Observação: Um gerador ideal tem resistência interna zero, mas na prática nem sempre é possível obtê-lo. Neste experimento colocamos o resistor de 47Ω em paralelo com o gerador para diminuir sua resistência interna.

ii) Conectem o pino vermelho do cabo do canal 1 na junção do resistor de 47Ω com o capacitor de $0,1\mu\text{F}$. Conecte o pino vermelho do cabo do canal 2 na junção do resistor de 100Ω com o indutor L. conecte, agora, um multímetro digital, ajustado na função de frequência, em paralelo com a fonte.

Observação: É importante assegurar que os dois botões de varredura do osciloscópio estejam na posição horária máxima, pois fora dessa posição não há calibração.

iii) Liguem o gerador e o osciloscópio e aguarde alguns segundos. Ajuste o osciloscópio através dos três botões rotativos graduados (volts/div e time/div, position), para visualizar, simultaneamente, na tela os dois canais. Atenção: O canal 1 só será utilizado para observar que o sinal do gerador deve variar somente na ressonância e bem próximo dela.

Conectem o multímetro digital (AUTO-RANGE) com a chave na posição em kHz em paralelo ao gerador. Neste caso o multímetro funciona como um frequencímetro, fornecendo a frequência, f (em kHz), do sinal.

a) variem continuamente a frequência do gerador, entre 1 a 10 kHz e observem para qual frequência V_R é máxima. Esta é a frequência de ressonância do circuito RLC.

b) Uma vez determinada f_0 , meça a dependência de V_R/V_0 com a frequência. Faça uma tabela com no mínimo 15 pontos de V_R (potencial em $R = 100\Omega$), V_0 (potencial da fonte em $R = 47\Omega$), V_R/V_0 ,

Dica: repare que não é necessário medir V_0 ao longo de todo experimento, pois haverá alteração apenas nas frequências próximas a frequência de ressonância.

$f(\text{kHz})$	$V_0(\text{mV})$	$V_R(\text{mV})$	V_0/V_R

c) Façam o gráfico de $(V_R/V_0) \times f$. (vide figura 07-a). (Ele está de acordo com o comportamento observado qualitativamente no item a)?

Obs:

- para obter um bom gráfico, escolha várias frequências próximas a f_0 ;

d) a largura de banda passante Δf é definida como o intervalo de frequência Δf no qual a amplitude cai por um fator 0,71 do valor de pico (a ressonância $f = f_0$).

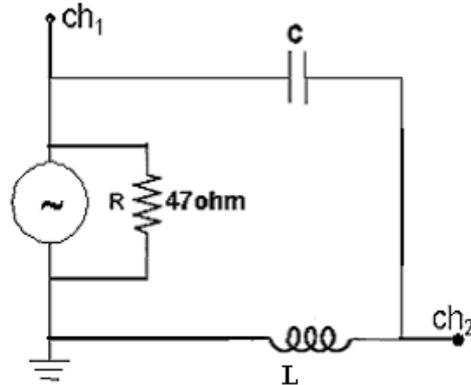
e) Substituam o resistor $R = 100\Omega$ por $R = 470\Omega$. Repita o item a) para encontrar novamente o valor da frequência de ressonância do circuito. Compare este resultado com o obtido na parte a). Houve alteração no valor da frequência de ressonância, f_0 ?

- e) Coloque agora um núcleo de ferro dentro do indutor e encontre o valor de f_0 . Houve variação em relação ao resultado anterior? Por quê?
- f) Utilizando o resultado do item anterior obtenha o novo valor da indutância da bobina (L^*) com a barra de ferro.

III. Transiente do circuito RLC

Monte o circuito da Figura 10, onde L e C são os mesmos usados no item II. Coloque o gerador na função de onda quadrada e a frequência ~ 60 Hz.

Conecte o osciloscópio de modo que você possa observar o sinal de V_L . É necessário ajustar as escalas, *volt/div* e *time/div*, para visualizar o sinal. Observe o sinal transiente da oscilação amortecida na tela do osciloscópio (deve ser análogo ao do sistema massa-mola mostrado na parte teórica).



- a) Meça o período da oscilação amortecida e calcule $f=1/T$. Este resultado está de acordo com os resultados obtidos na parte II?
- b) Estime o valor do tempo de amortecimento $\tau = 1/\gamma$.
Obs.: o valor de τ pode ser estimado observando no osciloscópio o tempo ($t_{1/2}$) que a envoltória do sinal ($e^{-\gamma t}$)
- c) Compare o valor do item b) com o calculado por $\tau_{\text{calc}} = 2L/R$ (Eq.7). Qual o valor de R que deve ser usado neste cálculo? Compare os valores de τ_{calc} e τ_{exp} .
- d) Troque as posições de L e C no circuito para observar o comportamento de $V_C(t)$. Compare os valores do período de oscilação T e τ_{exp} com os obtidos em $V_L(t)$. Esboce o sinal observado e justifique seus resultados.
- e) Observe como muda o sinal transiente quando se coloca a barra de ferro dentro da bobina (L^*). O período de oscilação muda? Caso afirmativo, aumenta ou diminui? Qual a explicação (qualitativa)? Repita a análise para o tempo de decaimento (τ_{exp}).
- f) Idem ao item anterior quando você reduz o número de espiras a 500 (sem usar o núcleo de ferro).
- g) Idem ao item anterior quando você muda a capacitância do circuito ($0,22\mu\text{F}$).
- h) Coloque um potenciômetro de $4.7\text{ K}\Omega$ (ou $1\text{ K}\Omega$) em série no circuito e observe o que ocorre quando a resistência R aumenta. Descreva qualitativamente suas observações e justifique.

i) Observe e descreva qualitativamente o que ocorre se o capacitor for retirado (ou colocado em curto-circuito). Neste caso teremos um circuito RL. Adicione ao circuito um resistor

$R = 100\Omega$. Observe o sinal de $V_R(t)$ e explique suas observações.

j) Observe e descreva qualitativamente o que ocorre se o indutor for retirado (ou colocado em curto-circuito). Neste caso teremos um circuito RC.

IV. Indutância mútua e ressonância (Como Demonstração)

No circuito da figura 11 com um gerador de funções (no modo senoidal), um resistor, duas bobinas de 1000 espiras e um osciloscópio. Ajuste o gerador para a amplitude máxima de saída e frequência na faixa de 1-10KHz. Observe no osciloscópio o sinal induzido em L_2 com amplitude V_2 (uma onda senoidal de mesma frequência que a do gerador). Mantendo fixa a posição de L_1 , aproxime, afaste e/ou gire o indutor L_2 .

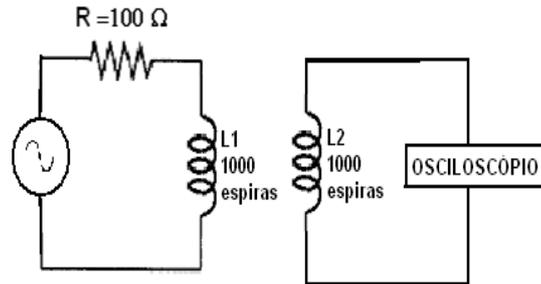
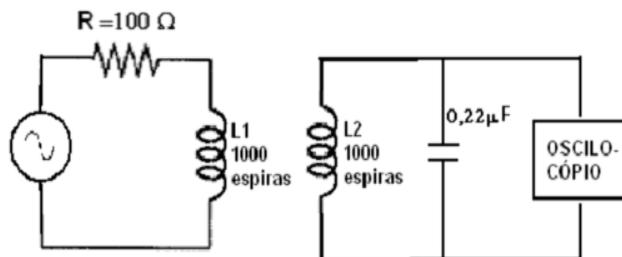


Figura 11 - Montagem experimental: dois circuitos sem conexão

a) Estime com o osciloscópio a tensão V_{L1} e V_{L2} (utilizando o canal 1 e 2, respectivamente). Compare os valores das tensões na configuração, onde se observa o máximo sinal em V_{L2} .

b) Mantendo a frequência do gerador fixa, meça a máxima distância possível entre L_1 e L_2 de tal forma que o sinal senoidal induzido em L_2 ainda seja perceptível no osciloscópio, ou seja, o sinal deve ser maior que o ruído. Qual a origem do **ruído**? Obs: aumente a sensibilidade do osciloscópio até encontrar a que seja mais adequada para a medida.

c) Mantendo o osciloscópio conectado, coloque agora um capacitor $C = 0,22\mu F$ em paralelo com o indutor L_2 como indicado na Figura 12. Varie o valor da frequência do gerador e observe a dependência do sinal V_{L2} com f . (O comportamento é o mesmo que o observado no item a)? Por quê?



d) No circuito da figura 12, mantenha a frequência fixa igual ao valor em que V_{L2} é máximo, meça a máxima distância possível entre L_1 e L_2 de tal forma que o sinal senoidal induzido ainda seja perceptível no osciloscópio.

c) **Prediga** como o comportamento de V_2 versus f deve mudar se for introduzida uma barra de ferro dentro de L_1 tal como feito anteriormente.

d) Realize os experimentos para verificar suas previsões do item d). Comente e discuta seus resultados.

Indutor de 1000 espiras s/ núcleo..... $L \sim 47\text{mH}$

Indutor de 1000 espiras c/ núcleo..... $L \sim 250\text{mH}$

Lista de materiais para esta prática.

Duas lâmpadas de 12V

3 resistores (14, 47 e 100Ω)

2 indutores de 1000 espiras (um deles deve ter um núcleo de ferro, $L \sim 47\text{mH}$)

Duas chaves para circuitos

Um osciloscópio

Um gerador de tensão alternada de frequência variável

Dois capacitores ($0,1\mu\text{F}$, $0,22\mu\text{F}$)

Placa de circuitos

Exercícios

1) Uma bobina com a resistência de $0,8\Omega$ e auto indutância de $3,0\text{ mH}$ é ligada a uma fonte de tensão com d.d.p. constante de 12V . Seja $t = 0$ o instante da ligação, quando a corrente é nula. Achar a corrente I e a sua taxa de variação dI/dt em: (a) $t = 0$; (b) $t = 0,1\text{s}$; (c) $t = 0,5\text{s}$.

2) Num certo instante, $4/5$ da energia total de um circuito LC oscilante estão armazenados no campo magnético do indutor. Calcule: (a) a carga no capacitor nesse instante, em termos da carga máxima no capacitor, (b) a corrente no indutor nesse instante, em termos da corrente máxima no indutor.

3) Um circuito LC tem indutância $L = 0,003\text{ mH}$ e uma capacitância $C = 200\text{ pF}$. (a) Calcule a frequência angular ω da oscilação. (b) Determine o período T da oscilação.

4) Calcule o tempo necessário para carregar um capacitor descarregado de $8,0\text{ pF}$, num circuito LC no qual a tensão máxima é de $1,0\text{ mV}$ e a corrente máxima é de 50 mA .

5)* mostre que $\tau_{\text{exp}} \sim 0,91t_{1/3}$, usando a definição descrita no experimento III.

6) (a) Qual a indutância necessária para construir um circuito LC que oscile com a frequência de 60 Hz , tendo um capacitor de $80 \times 10^{-6}\text{ F}$? (b) Qual o período de oscilação de um circuito LC constituído de uma bobina de 2 mH e um capacitor de $20 \times 10^{-6}\text{ F}$?

7)* Um circuito contém um resistor de $240\ \Omega$, um capacitor de $3,8\ \mu\text{F}$, e um indutor de 550 mH . Calcule a frequência de ressonância ω_0 e os valores de ω_1 , γ e τ . Inicialmente o capacitor é ligado a uma fonte com $V_0 = 1\text{V}$ e depois, em $t = 0$ é ligado em série com R e C. Esboce os gráficos de $Q(t)$, $I(t)$, $V_C(t)$ e $V_L(t)$.