1^a Lista de Exercícios – Eletromagnetismo 1
Entrega: 17 de agosto

1.0 Prove os seguintes resultados de cálculo vetorial:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F} \right) = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G} \right) = \left(\vec{\nabla} \times \vec{F} \right) \cdot \vec{G} - \left(\vec{\nabla} \times \vec{G} \right) \cdot \vec{F}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(f \, \vec{F} \right) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{F} + f \, \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

1.1 Prove as seguintes relações para o vetor posição $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}\,'$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{R} = 0$$

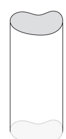
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = 3$$

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{R} = \vec{V} \quad \left(\text{para qqr } \vec{V} \right)$$

1.2 Considere o campo vetorial $\vec{F} = F_z(z)\hat{z}$ para os dois itens abaixo. Sem utilizar teoremas do cálculo vetorial (tais como Teorema de Gauss, Teorema de Stokes, identidades de Green, etc.), mostre pela "força bruta" que:

(a) $\oint_S d\vec{S} \times \vec{F} = 0$, para qualquer superfície fechada S.



(b) Tome um "cano" com uma seção de formato arbitrário, mas constante ao longo do cano (veja figura ao lado). O cano está orientado na direção z, com a tampa inferior em $z = z_1$, e a tampa superior na posição $z = z_2$. Mostre que, dentro do volume desse cano, a integral $\int_{\text{cano}} d^3x \, \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = A \times [F_z(z_2) - F_z(z_1)]$, onde A é a área da seção do cano.

Note que $\oint_S d\vec{S} \times \vec{F} = \int_{V(S)} d^3x \, \vec{\nabla} \times \vec{F}$, e que $\int_V d^3x \, \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{F}$. Evidentemente, se você pudesse utilizar essas identidades, os problemas acima seriam resolvidos em uma ou duas linhas!

1.3 Seja r o valor absoluto do vetor posição que vai da origem até o ponto (x, y, z), $f(r)$ uma função escalar arbitrária de r, e $\vec{F}(r)$ um campo vetorial que depende apenas de r. Prove que

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{df}{dr}; \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(r) = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{d\vec{F}}{dr}$$

1.4 Calcule o divergente e o rotacional para o campo vetorial $\vec{v} = r^n \hat{r}$. Inteprete geometricamente o resultado do rotacional e verifique a consistência do seu divergente através do teorema da divergência. Com o resultado, obtenha o valor da integral:

$$J = \int_{\mathcal{V}} dV e^{-r} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right) ,$$

onde $\mathcal{V}$ é uma esfera de raio r_0 centrada na origem.

1.5 Demonstre a "primeira identidade de Green", dada por:

$$\int_V dV \left(f \, \vec{\nabla}^2 g + \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g \right) = \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \left(f \, \vec{\nabla} g \right)$$

1.6 Fazendo $f = \varphi$ (que pode ser, por exemplo, o potencial eletrostático, $\vec{\nabla}\varphi = -\vec{E}$), e tomando $g = 1/R = 1/|\vec{x} - \vec{x}\,'|$, mostre que, devido ao *Teorema* de Green:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}\,')}{R} + \frac{1}{4\pi} \oint_{S(V)} d\vec{S}\,' \cdot \left[\frac{1}{R} \vec{\nabla}' \varphi(\vec{x}\,') - \varphi(\vec{x}\,') \vec{\nabla}' \frac{1}{R} \right] ,$$

onde $\vec{\nabla}'$ é o operador diferencial com respeito à coordenada $\vec{x}'$.

1.7 Use a função delta de Dirac em coordenadas apropriadas para expressar as seguintes distribuições de cargas como densidades de cargas tridimensionais $\rho(\mathbf{r})$:

(a) Uma carga Q uniformemente distribuída sobre uma casca esférica de raio R (em coordenadas esféricas)

(b) Em coordenadas cilíndricas, uma carga λ uniformemente distribuída em uma superfície cilíndrica da raio b.

(c) Em coordenadas cilíndricas, uma carga Q uniformemente distribuída sobre um disco circular chato de espessura desprezível e raio R.

(d) O mesmo que a parte (c), mas usando coordenadas esféricas.

1.8 A média temporal do potencial elétrico do átomo neutro de hidrogênio é dada por:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-ar}}{r}\left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right) ,$$

onde q é a carga elementar e $\alpha^{-1} = a_0/2$, onde a_0 é o raio de Bohr. Encontre a *distribuição de carga* $\rho(r)$ que dá origem a esse potencial e interprete esse resultado.

1.9 Encontre o *potencial elétrico* a uma distância z ($z > 0$) do centro de uma casca esférica de raio R, que possui uma densidade superficial de carga σ uniforme. Trate tanto o caso $z > R$ quanto o caso $0 < z < R$. Expresse a sua resposta em termos da carga total (q) dessa casca esférica. [Dica: utilize a lei dos cossenos para escrever r em termos de R e $\cos\theta$. Lembre-se de escolher o sinal positivo da raiz quadrada: $\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz} = +(R - z)$ se $R > z$, e o oposto se $z > R$.]

1.10 Um cabo coaxial longo carrega uma densidade volumétrica uniforme de carga ρ_0 num cilindro interno de raio a, e uma densidade de carga *superficial* σ_0 na casca cilíndrica exterior (de raio b). A carga superficial é negativa, e possui a magnitude exata tal que o cabo, como um todo, gera um campo elétrico *nulo* fora da casca cilíndrica externa. Encontre o campo elétrico nas seguintes regiões: (a) no interior do cilindro de raio a, ou seja, $\rho < a$ (onde ρ é a distância ao eixo z em coordenadas cilíndricas); (b) no espaço entre os dois cilindros, $a < \rho < b$; e (c) no exterior do cabo, $\rho > b$. Faça um gráfico da intensidade do campo elétrico como função de ρ.

1.11 Utilize o método das imagens para encontrar a *força elétrica* que age numa carga pontual q nas seguintes situações:

- (a) Uma "cunha" feita de dois condutores planos juntados com um ângulo de 90°. Ou seja, imagine que um dos condutores ocupa o semi-plano infinito $x \geq 0$, e o outro condutor, o semi-plano infinito $y \geq 0$. Considere que a carga encontra-se na posição $x = x_0 > 0$ e $y = y_0 > 0$.
- (b) Um quadrante delimitado por planos condutores. Ou seja, imagine que os semi-planos infinitos $\{x \geq 0, y \geq 0\}$, $\{x \geq 0, z \geq 0\}$, e $\{y \geq 0, z \geq 0\}$, são constituídos de material condutor. Nesse caso, considere que a carga pontual encontra-se na posição $x = x_0 > 0$, $y = y_0 > 0$ e $z = z_0 > 0$. [Dica: utilize o resultado do item anterior.]