# Capítulo 13

## TRANSFERÊNCIA RADIANTE ENTRE SUPERFÍCIES

PME2360 - TRANSFERÊNCIA DE CALOR

PROF. DR. GUENTHER CARLOS KRIEGER FILHO

guenther@usp.br

***Site LETE***

http://www.lete.poli.usp.br/PME2360.html

- Influência da posição relativa entre superfícies.

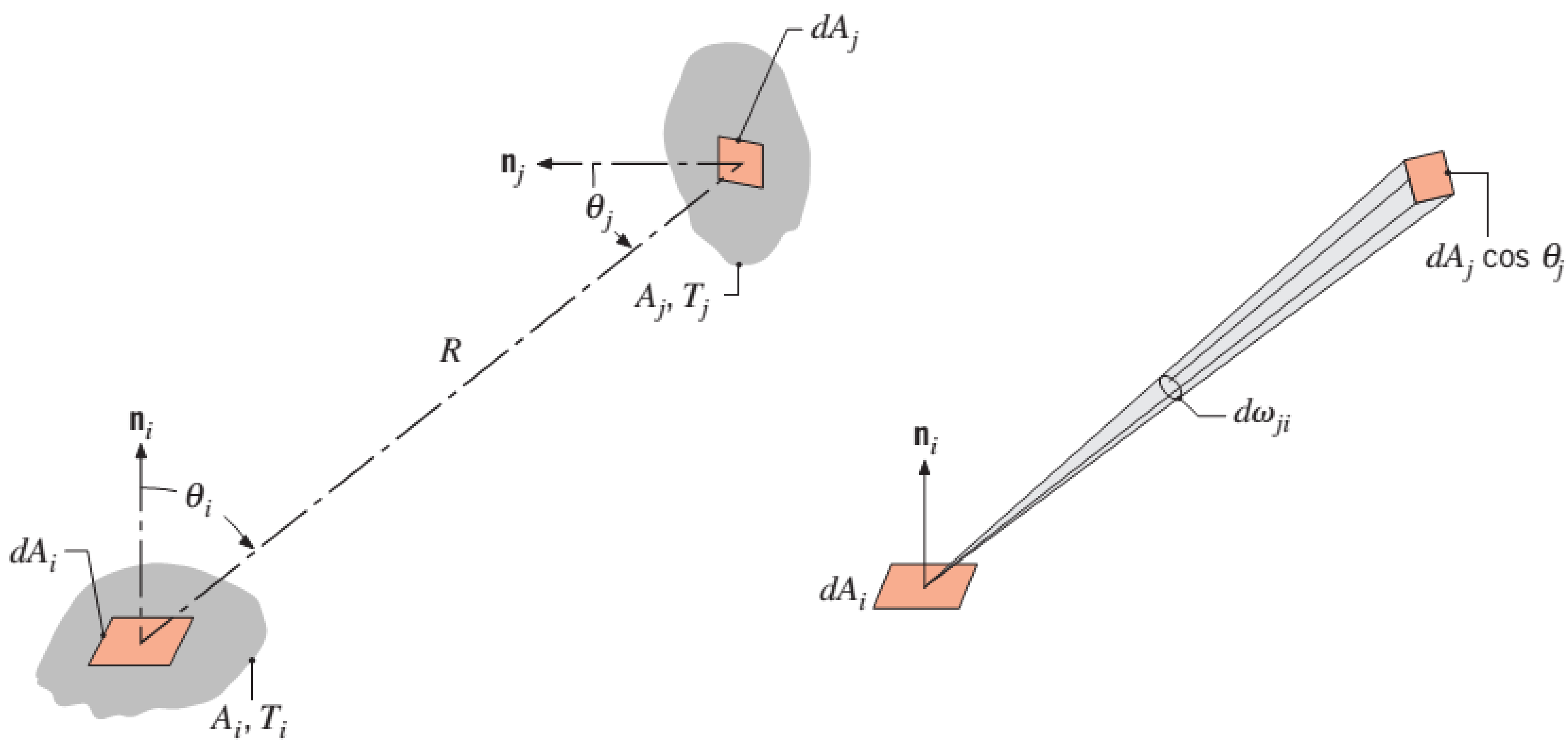


***Figura 13.1:*** Fator de forma entre elementos de superfície

# 13.1 Fator de forma

$F_{i,j} \rightarrow$ Fração da radiação que deixa a superfície $i$ e é interceptada pela superfície $j$.

Da definição de intensidade de radiação e ângulo sólido, a taxa de radiação que deixa $dA_i$ e é interceptada por $dA_j$ é:

$$dq_{i\rightarrow j} = I_i \underbrace{\cos\theta_i dA_i}_{dA_{n,i}} d\omega_{j-i} \tag{13.1}$$

onde

$$d\omega_{j-i} = \underbrace{(\cos\theta_j dA_j)}_{dA_{n,j}} / R^2 \tag{13.2}$$

então:

$$dq_{i\rightarrow j} = I_i \frac{cos\theta_i \cos\theta_j}{R^2} dA_i dA_j \tag{13.3}$$

Para $i$ um emissor e refletor *DIFUSO*, utilizando a Radiosidade Total:

$$J = \pi I_{e+r} \tag{13.4}$$

tem-se:

$$dq_{i \to j} = J_i \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j \tag{13.5}$$

A taxa total na qual a radiação deixa $i$ e é interceptada por $j$ é:

$$q_{i \to j} = J_i \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j. \tag{13.6}$$

Da definição de $F_{ij}$ pode-se escrever:

$$F_{ij} = \frac{q_{i-j}}{A_i J_i} \tag{13.7}$$

e então chega-se à expressão para o Fator de Forma:

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j. \qquad (13.8)$$

Analogamente, a fração da radiação o que deixa $A_j$ e é interceptada por $A_i$ é:

$$F_{ji} = \frac{1}{A_j} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi R^2} dA_i dA_j. \qquad (13.9)$$

Observe que o Fator de Forma:

- só depende da geometria das duas superfícies;

- como as integrações nas duas eqs. resultam num mesmo valor, vale a reciprocidade: $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$;

- como deduzido, só vale para superfícies difusas.

## 13.1.1 Relações de Fator de Forma

As principais relações necessárias à determinação dos fatores de forma de uma geometria são discutidos a seguir.

- Relação de *RECIPROCIDADE*
  Igualando-se as integrais das eqs. (13.8) e (13.9) tem-se:

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji} \tag{13.10}$$

- Regra do *SOMATÓRIO* em cavidade fechada:
  Toda energia que deixa $i$ é interceptada pelas superfícies da cavidade fechada:

$$\sum_{j=1}^{N} F_{ij} = 1 \tag{13.11}$$

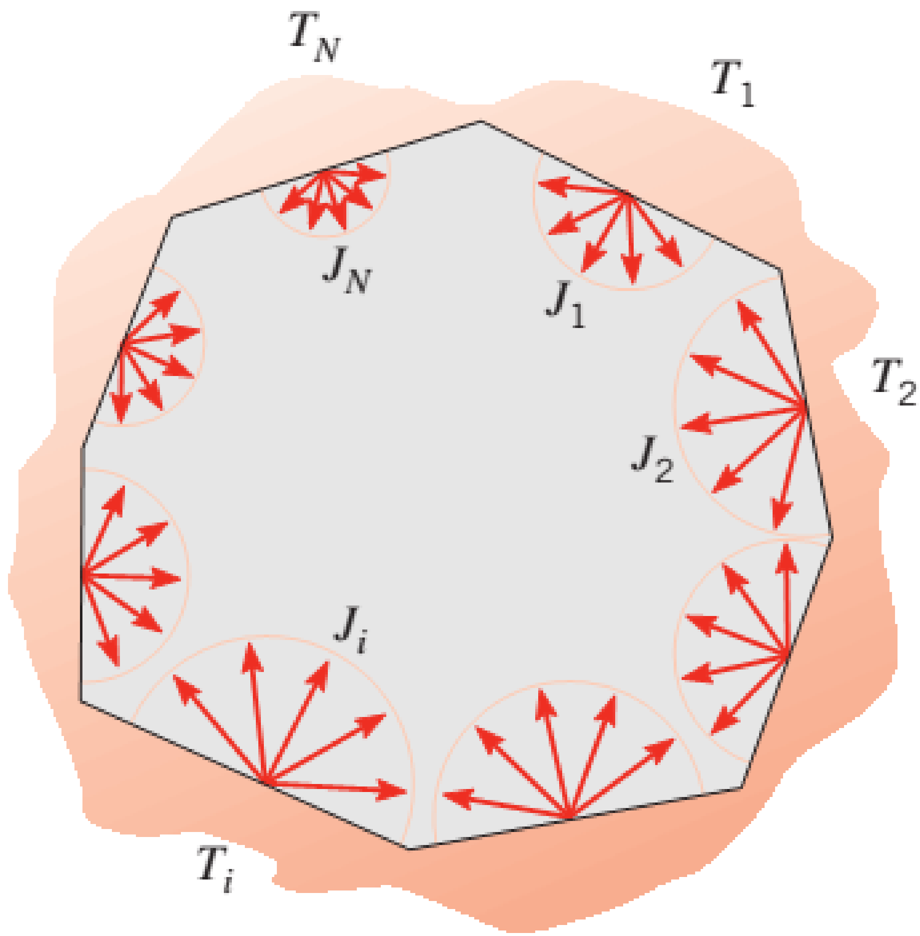


***Figura 13.2:*** Troca de radiação em cavidade ou invólucro

Esta expressão é aplicada $N$ vezes, ou seja, para cada uma superfície $j$ da cavidade.

- $F_{ii} \neq 0$ se $i$ for côncava e $F_{ii} = 0$ se $i$ for convexa.

- Matriz de $F_{ij}$

$$\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & ... & F_{1N} \\ F_{21} & F_{22} & ... & F_{2N} \\ ... & ... & ... & ... \\ F_{N1} & F_{N2} & ... & F_{NN} \end{pmatrix}$$

- A solução da eq. (13.8) para algumas geometrias está tabelada (Tab. 13.1 e 13.2).

- Superfícies compostas:
  Dado que o fator de forma é uma integração, pode-se escrever para uma superfície ($j$), que é composta por subpartes $k$:

$$F_{i(j)} = \sum_{k=1}^{N} F_{ik} \qquad (13.12)$$

## 13.2 Troca Radiante entre Superfícies Negras

-Para uma superfície negra vale:

- Não há reflexão;
- Radiação é só a emissão;
- Absorção é total.

A taxa na qual a radiação deixa $i$ e é interceptada por $j$ é:

$$q_{i\to j} = (A_i J_i) F_{ij}, \qquad (13.13)$$

mas como para um C.N. a radiosidade é igual à emissão de C.N., tem-se:

$$q_{i\to j} = A_i F_{ij} E_{cn,i} \qquad (13.14)$$

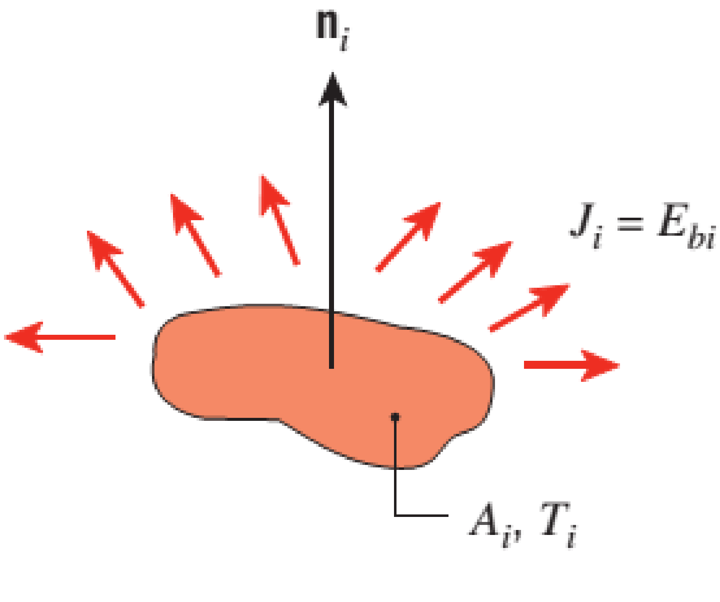


***Figura 13.3:*** Troca de radiação entre superfícies negras

Analogamente para a superfície $j$ vale:

$$q_{j\to i} = A_j F_{ji} E_{cn,j}. \tag{13.15}$$

A troca radiante líquida entre as duas superfícies é:

$$q_{ij} = q_{i\to j} - q_{j\to i} \tag{13.16}$$

ainda

$$q_{ij} = A_i F_{ij} E_{cn,i} - A_j F_{ji} E_{cn,j}. \tag{13.17}$$

Usando a Lei de Stefan-Boltzmann e a Relação de Reciprocidade chega-se a:

$$q_{ij} = A_i F_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4) \tag{13.18}$$

Para uma cavidade constituída de superfícies C.N., a taxa de calor que deve ser fornecidade/retiradada da superfície $i$ é dada por:

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} A_i F_{ij} \sigma (T_i^4 - T_j^4) \tag{13.19}$$

# 13.2.1 Troca Radiante entre Superfícies Cinzas e Difusas numa Cavidade

Considere uma cavidade (ou invólucro) com as seguintes características:

- Superfícies isotérmicas;
- Radiosidade e Irradiação difusas;
- Superfícies opacas ($\tau = 0$);
- Meio não participante das trocas radiativas.

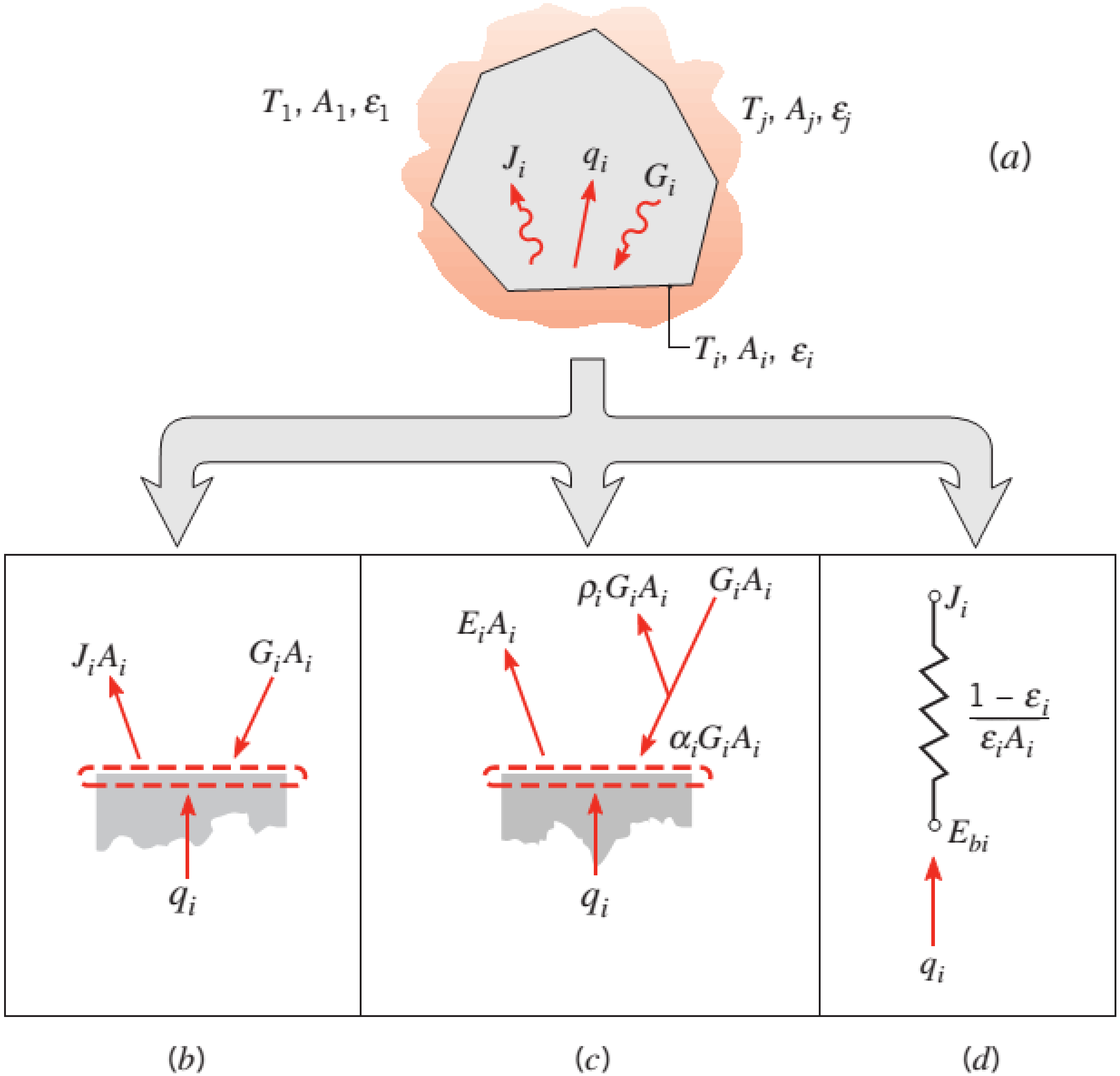


***Figura 13.4:*** Troca de radiação entre superfícies cinzas numa cavidade

A taxa radiante líquida $q_i$ que deixa/chega à superfície $i$ é avaliada pelo balanço de energia radiante:

$$q_i = A_i(J_i - G_i), \tag{13.20}$$

mas a radiosidade é:

$$J_i \equiv \underbrace{E_i}_{emitida} + \underbrace{\rho_i G_i}_{refletida} \tag{13.21}$$

e então

$$q_i = A_i(E_i + \rho_i G_i - G_i) = A_i(E_i + G_i \underbrace{(\rho_i - 1)}_{-\alpha_i}) \tag{13.22}$$

ou

$$q_i = A_i( \underbrace{E_i}_{PoderEmissivo} - \alpha_i \underbrace{G_i}_{Irradiacao} ) \tag{13.23}$$

Usando a Lei de Kirchhoff ($\alpha_i = \varepsilon_i$) e a emissão de Corpo Cinza ($E_i = \varepsilon_i E_{cn,i}$) pode-se escrever a Radiosidade como:

$$J_i = \varepsilon_i E_{cn,i} + \underbrace{(1-\varepsilon_i)}_{\rho_i} G_i \tag{13.24}$$

ou explicitando $G_i$

$$G_i = \frac{J_i - \varepsilon_i E_{cn,i}}{(1-\varepsilon_i)}. \tag{13.25}$$

Substituindo esta expressão no balanço de energia (13.20) tem-se:

$$q_i = A_i \left( J_i - \left( \frac{J_i - \varepsilon_i E_{cn,i}}{1-\varepsilon_i} \right) \right) \tag{13.26}$$

e finalmente

$$q_i = \frac{E_{cn,i} - J_i}{(1 - \varepsilon_i)/\varepsilon_i A_i}, \tag{13.27}$$

onde $q_i$ é a taxa líquida de energia radiante transferida para a superfície $i$. Pode-se também interpretar $q_i$ como o fluxo de calor que deve ser fornecido, por outros mecanismos que não radiação, à superfície para que ela se mantenha em $T_i$

-Circuito Equivalente:

- Corrente - $q_i$;

- DDP - $E_{cn,i} - J_i$

- Resistência - $(1 - \varepsilon_i)/\varepsilon_i A_i$

# 13.2.2 Troca Radiante entre Superfícies

Para se utilizar a eq. (13.27) é necessário conhecer a radiosidade $J_i$ da superfície, que é determinada como mostrado a seguir.

A taxa total de irradiação incidente sobre a superfície $i$, oriunda de todas as outras superfícies $j$ que compõem a cavidade de radiação, inclusive a própria superfície $i$, é dada por:

$$A_i G_i = \sum_{j=1}^{N} F_{ji} A_j J_j, \tag{13.28}$$

onde $N$ é o número de superfícies radiantes que compõem a cavidade. Utilizando-se a relação de reciprocidade para o Fator de Forma, pode-se re-escrever a eq.(13.28) como:

$$A_i G_i = \sum_{j=1}^{N} F_{ij} A_i J_j, \qquad (13.29)$$

que é substiduida na eq. (13.20):

$$q_i = A_i (J_i - \sum_{j=1}^{N} F_{ij} J_j). \qquad (13.30)$$

Utilizando-se ainda a regra do somatório para o fator de forma $\sum_{j=1}^{N} F_{ij} = 1.0$, tem-se:

$$q_i = A_i (\sum_{j=1}^{N} F_{ij} J_i - \sum_{j=1}^{N} F_{ij} J_j), \qquad (13.31)$$

ou ainda,

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} A_i F_{ij}(J_i - J_j). \qquad (13.32)$$

Assim, a taxa radiante líquida $q_i$ na superfície $i$ é função de todas as radiosidades das superfícies que compõem a cavidade. Igualando-se as duas expressões para taxa radiante líquida $q_i$, eqs. (13.27) e (13.32), tem-se:

$$\frac{E_{cn}(T_i) - J_i}{(1 - \varepsilon_i)/(\varepsilon_i A_i)} = \sum_{j=1}^{N} \frac{(J_i - J_j)}{(A_i F_{ij})^{-1}}. \qquad (13.33)$$

Então, para cada superfície radiante $i$ vale a expressão:

$$\frac{E_{cn}(T_i)}{(1-\varepsilon_i)/(\varepsilon_i A_i)} = \frac{J_i}{(1-\varepsilon_i)/(\varepsilon_i A_i)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{(J_i - J_j)}{(A_i F_{ij})^{-1}}, \tag{13.34}$$

que na forma matricial pode ser representada por:

$$[C] = [B][J] \tag{13.35}$$

onde

$$[J] = \begin{bmatrix} J_1 \\ . \\ . \\ j_i \\ . \\ . \\ j_N \end{bmatrix} \tag{13.36}$$

é o vetor de radiosidades das $N$ superfícies radiantes,

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 \\ \ldots \\ C_i \\ \ldots \\ C_N \end{bmatrix} \qquad (13.37)$$

é o vetor associado ao Poder Emissivo das superfícies e

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & \ldots & B_{1i} & \ldots & B_{1N} \\ \ldots & & & & \\ B_{i1} & \ldots & B_{ii} & \ldots & B_{iN} \\ \ldots & & & & \\ B_{N1} & \ldots & B_{Ni} & \ldots & B_{NN} \end{bmatrix} \qquad (13.38)$$

é a matriz associada aos Fatores de Forma $F_{ij}$ e áreas $A_i$.

Os elementos do vetor $[C]$ são calculados por:

$$C_i = \frac{E_{cn}(T_i) - J_i}{(1-\varepsilon_i)/(\varepsilon_i A_i)}, \tag{13.39}$$

com o Poder Emissivo de Corpo Negro $E_{cn}(T)$ determinado pela Lei de Stefan-Boltzmann [1]:

$$E_{cn}(T_i) = \sigma T_i^4, \tag{13.40}$$

Os elementos da matriz [B] são calculados por:

$$B_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{(1-\varepsilon_i)/(\varepsilon_i A_i)} + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(A_i F_{ij})^{-1}} & \text{para } i = j \\ -\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(A_i F_{ij})^{-1}} & \text{para } i \neq j \end{cases} \tag{13.41}$$

Para se calcular as radiosidades de cada superfície radiante,resolve-se o sistema (eq. 13.35). Observe-se, mais uma vez, que para tanto é necessário a determinação da matriz de Fatores de Forma $F_{ij}$.