Matemática Aplicada à Economia – LES 201

Aulas 3 e 4

17 e 18/08/2015

Análise de Equilíbrio

Sistemas Lineares e Álgebra Matricial

Márcia A.F. Dias de Moraes

Análise de Equilíbrio em Economia

(Chiang, cap 3)

O significado do equilíbrio:

- Equilíbrio: situação em que inexistem tendências à mudanças: ______________________
- Equilíbrio: tende a perpertuar-se se não houver mudanças em forças externas

Matematicamente:

- Os parâmetros e as variáveis exógenas são ___________________________________
- Δ fatores externos: define-se um ______________
- As _____________e os ________ e são novamente definidos

Equilíbrio

- Equilíbrio não implica uma situação ideal:
  - Equilibrio de renda nacional com desemprego
  - Equilíbrio com nível de preços exageradamente alto
- Nesse capítulo a discussão refere-se ao equilíbrio resultante de um processo impessoal de interação e ajustamento de forças econômicas
  - Ex. equilíbrio de mercado sobre condições dadas de oferta e procura
  - Equilíbrio da renda nacional sob certas condições
- Outras situações: "meta de equilíbrio" = equilíbrio desejável, ou ideal (otimização)

1. Equilíbrio Parcial de Mercado

- Equilíbrio parcial de mercado: apenas ____________
  - Assume-se que as outras variáveis permanecem constantes
  - determinação de uma variável em um mercado isolado
- Problema a ser resolvido:
  - achar os valores das ________________na condição de equilíbrio do modelo (= identificar o ponto de equilíbrio)
- Equilíbrio parcial:
  - Vantagens: facilita o processo de modelagem
  - Desvantagens:
    - Erros: pode estar desprezando interações entre as variáveis relevantes para a solução do modelo

1. Equilíbrio Parcial de Mercado

1.1) Modelo linear - 1 mercadoria

Construção do modelo:

- Passo 1: Escolha das Variáveis (3 variáveis)
  - Q_D = ________________
  - Q_S = ________________
  - P = ________________
- Passo 2: Pressupostos básicos do modelo

1. Equilíbrio Parcial de Mercado

- Passo 3: Especificação das equações de oferta e demanda

  Como a demanda e a oferta se comportam?
  - Q_D : função linear decrescente de P (↑P,↓Q)

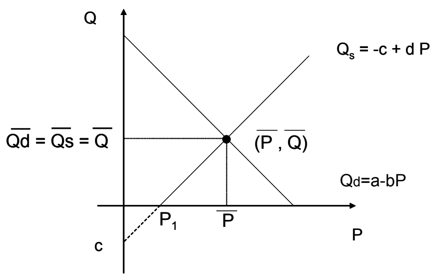
    $Qd = a - bP \qquad (a, b > 0)$
  - Q_S : função linear crescente de P (↑P, ↑Q)

    $Qs = -c - dP \qquad (c, d > 0)$

  Questão: por que c < 0?

  ____
  ____
  ____
  ____

1. Equilíbrio Parcial de Mercado



1. Equilíbrio Parcial de Mercado

Resolver o modelo:

- achar os valores das variáveis endógenas: ___________________ que devem satisfazer simultaneamente as três equações do modelo
- Resolução de um sistema de equações

1. Equilíbrio Parcial de Mercado

$$a - bP = -c + dP$$
$$(a + c) = P\,(d + b)$$

Solução em fç dos parâmetros

Substituindo o valor de P em Q_D (ou Q_S)

$$Q_D = \bar{Q} = a - b\left(\frac{a+c}{d+b}\right) = \frac{a(d+b)}{d+b} - \frac{b(a+c)}{d+b} = \frac{ad + ab - ab - bc}{d+b} =$$

Solução em fç dos parâmetros

$$\boxed{}$$

1. Equilíbrio Parcial de Mercado

Exemplo Numérico: Ache P* e Q* (equilíbrio)

Qd = 18 – 2P

Qs = - 6 + 6P

Equilíbrio: Qd = Qs

Substituindo em qualquer uma das equações:

1. Equilíbrio Parcial de Mercado

Exemplo – Modelo não linear

$$Qd = 4 - P^2$$
$$Qs = 4p - 1$$

Resolvendo: Equilíbrio: Qd = Qs

1. Equilíbrio Parcial de Mercado

1.2 – Modelo não linear - Graficamente:

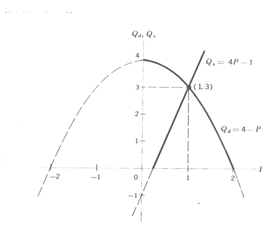


Figura 3.3

Equilíbrio Mercado após Cobrança Imposto

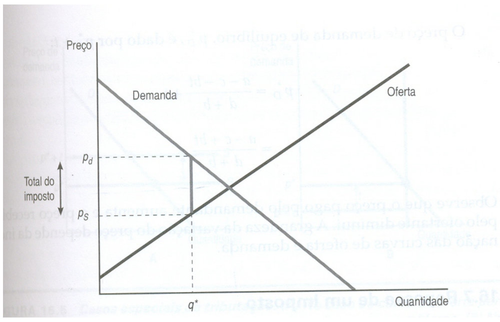
Quando governo aplica imposto, há 2 preços de interesse:

- preço demandante paga
- preço ofertante recebe

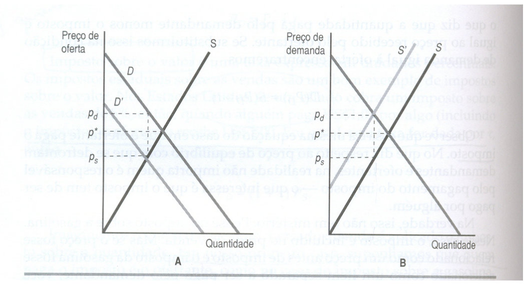
→ Diferença entre eles é o valor do imposto

Equilíbrio: importa quem paga?

Ex: Cobrança de Imposto



Imposição Imposto



Deslocamento curvas cobrança imposto

Ex: As equações de demanda e oferta de certo produto são as seguintes:

Demanda: p = 100 – 0,5 x

Oferta: p = 10 + 0,5x

a) Qual o equilíbrio de mercado?

b) Governo coloca imposto de R$3,00. Calcule o novo equilíbrio considerando:

b.1: que o governo cobra dos consumidores

b.2: que o governo cobra dos produtores

Exercícios – Deslocamento curvas cobrança imposto

EX: As equações de demanda e custo de certo produto são:

P = 100 – 2x

C = 500 + 3x.

a) Obtenha o preço que maximiza o lucro
b) Se o governo cobrar um imposto igual a R$2,00 por unidade vendida, qual o novo preço que maximiza o lucro?

2. Equilíbrio Geral de Mercado

- Modelos parciais: Q_D e Q_S são funções somente de seu próprio preço
  - Não é o que ocorre no mundo real
  - Para cada mercadoria, existem *n* bens (substitutos e complementares)
- Equilíbrio Geral: considera-se que os preços dos outros produtos podem também influenciar a demanda e a oferta do bem *i*
- Estrutura do modelo precisa ser ampliada
- _________ e _________ dos outros bens também são ____________ ao modelo

2. Modelo de Equilíbrio Geral de Mercado

- *n* mercadorias
- Condição de equilíbrio:
  - n equações de equilíbrio
  - n equações de Oferta
  - n equações de Demanda
- Solução: conjunto de preços _*Pi*_ e de correspondentes quantidades _*Qi*_, tal que as _n_ equações de equilíbrio sejam satisfeitas simultâneamente.

2. Equilíbrio Geral de Mercado

Ex: Caso de 2 mercadorias *n=2*

Nº de variáveis :______________________________

Nº equações de demanda: ________________________

Nº equações de oferta: _________________________

Nº equações de equilíbrio:_______________________

Caso de 3 mercadorias :

Nº de variáveis :______________________________

Nº equações de demanda: ________________________

Nº equações de oferta: _________________________

Nº equações de equilíbrio:_______________________

2. Equilíbrio Geral de Mercado

Ex: - Mercado com 2 mercadorias: soja e milho

- Equações de demanda e oferta lineares

Descrição do modelo em termos paramétricos

Soja

$Q_{d1} = Q_{s1}$ (equilíbrio mercado soja)

$$Q_{d1} = a_0 + a_1P_1 + a_2P_2$$

$$Q_{s1} = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2$$

Milho

$Q_{d2} = Q_{s2}$ (equilíbrio mercado milho

$$Q_{d2} = \alpha_0 + \alpha_1P_1 + \alpha_2P_2$$

$$Q_{s2} = \beta_0 + \beta_1P_1 + \beta_2P_2$$

Ex: Mercado com duas mercadorias

- Variáveis endógenas:

$$P, Q_{D1}, Q_{S1}, P_2, Q_{D2}\ Q_{S2}$$

- Parâmetros:

$$a_0, a_1, a_2,$$
$$b_0, b_1, b_2$$
$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$$
$$\beta_0, \beta_1, \beta_2$$

Ex: Mercado com duas mercadorias

Resolvendo o modelo: (substituição de variáveis)

Equilíbrio mercado soja:

$$a_0 + a_1P_1 + a_2P_2 = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2$$

$$a_0 - b_0 + P_1(a_1 - b_1) + P_2(a_2 - b_2) = 0 \qquad \text{(equação 1)}$$

Equilíbrio MercadoMilho:

$$\alpha_0 + \alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 = \beta_0 + \beta_1P_1 + \beta_2P_2$$

$$\alpha_0 - \beta_0 + P_1(\alpha_1 - \beta_1) + P_2(\alpha_2 - \beta_2) = 0 \qquad \text{(equação 2)}$$

Ex: Mercado com duas mercadorias

12 parâmetros: manipulações algébricas complicadas

Simplificando a notação, define-se:

$$c_i = a_i - b_i$$
$$\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$$

$$c_0 = a_0 - b_0 \qquad c_1 = a_1 - b_1 \qquad c_2 = a_2 - b_2$$
$$\gamma_0 = \alpha_0 - \beta_0 \qquad \gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1 \qquad \gamma_2 = \alpha_2 - \beta_2$$

Substituindo os parâmetros nas equações 1 e 2:

$$c_0 + P_1\,c_1 + P_2\,c_2 = 0 \qquad (3)$$
$$\gamma_0 + P_1\,\gamma_1 + P_2\,\gamma_2 = 0 \qquad (4)$$

Ex: Mercado com duas mercadorias

De (3): $\overline{P}_2 = \dfrac{-(c_0 + c_1P_1)}{c_2}$ (5)

Substituindo (5) em (4)

$$\gamma_1P_1 + \gamma_2 \dfrac{(-c_0 - c_1P_1)}{c_2} = -\gamma_0$$

$$\downarrow$$

$$\overline{P}_1 = \dfrac{\gamma_2c_0 - \gamma_0c_2}{\gamma_1c_2 - \gamma_2c_1} \quad (6)$$

Ex: Mercado com duas mercadorias

Substituindo (6) em (5)

$$\dfrac{-c_0 - c_1\left(\dfrac{\gamma_2c_0 - \gamma_0c_2}{\gamma_1c_2 - \gamma_2c_1}\right)}{c_2}$$

$$\downarrow$$

$$P_2 = \dfrac{-c_0\gamma_1 + c_1\gamma_0}{\gamma_1c_2 - \gamma_2c_1}$$

- Substitue-se os valores de P_1 e P_2 nas equações de Oferta/Demanda e acha-se os valores de Q_1 e Q_2

- Volta-se aos parâmetros iniciais

$$c_i = a_i - b_i$$
$$\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$$

Ex. Numérico: Mercado com duas mercadorias

Suponha que os parâmetros sejam os seguintes:

Produto 1

$$Qd_1 = 10 - 2P_1 + P_2$$
$$Qs_1 = -2 + 3P_1$$

Produto 2

$$Qd_2 = 15 + P_1 - P_2$$
$$Qs_2 = -1 + 2P_2$$

- Ache os valores de P_i e Q_i que equilibra os 2 mercados simultaneamente

Ex numérico Mercado com duas mercadorias

Resolução

2. Equilíbrio Geral de Mercado O caso de n mercadorias

- Quando inclui-se todas as mercadorias:
  - Modelo Equilíbrio Geral Walrasiano
  - Excesso de demanda para cada mercadoria é considerada função do preço de todas as mercadorias

Modelo caso *n* mercadorias:

(I) $Q_{di} = Q_{di}(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ $(i = 1,2, \ldots n)$

(II) $Q_{si} = Q_{si}(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ $(i = 1,2, \ldots n)$

(III) $Q_{di} = Q_{si}$ $(i = 1,2, \ldots n)$

2. Equilíbrio Geral de Mercado: o caso de n mercadorias

- Sistema com:
  - *3n* equações
  - *3n* incógnitas
- Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$Q_{di}(P_1, P_2, \ldots, P_n) = Q_{si}(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ $(i = 1,2, \ldots n)$

- Sistema reduzido a n equações
- Resolvidas simultaneamente, estas *n* equações determinam os *n* preços de equilíbrio P_i

As soluções para Q_i são derivadas pelas substituições de P_i nas funções de demanda e de oferta

2. Equilíbrio Geral de Mercado O caso de n mercadorias

- Quanto mais mercadorias (> n), mais equações e mais dificuldades para manipulá-las

↓

Método adequado: álgebra matricial
(Sistemas Lineares)

Para o sistema ter solução

a) nº equações = nº incógnitas
b) Não pode haver dependência funcional entre as variáveis (equações linearmente independentes)
a) Equações devem ser consistentes

→ Testes para checar soluções únicas (determinantes)

Modelos Lineares e Álgebra Matricial

Álgebra Matricial

1. Fornece modo compacto de se escrever sistema de equações (inclusive grandes)
2. Gera método de testar existência de solução pelo cálculo do determinante
3. Fornece método para achar solução única (se existir)

→ Aplicável somente à

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Modelos Lineares e Álgebra Matricial

Questão: quão realisticamente as equações lineares podem descrever relações econômicas concretas?

- Muitos casos: uma relação linear pode gerar aproximação suficiente à realidade não linear
- Outros: pode-se melhorar a exatidão da aproximação

Modelos Lineares e Álgebra Matricial

Melhorar a exatidão da aproximação

a) Divide-se a relação não linear em segmentos lineares (divide-se o domínio em n regiões)

Obtem linha reta que aproxima-se da curva em cada região

MODELOS LINEARES E ÁLGEBRA MATRICIAL

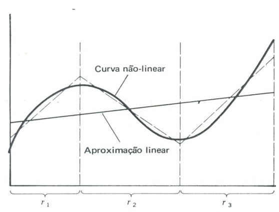


Figura 4.1

Modelos Lineares e Álgebra Matricial

Melhorar a exatidão da aproximação

b) Transformações das variáveis para se obter relação linear

Ex: $y = a\,x^{b}$

Aplicando-se logaritmo de ambos os lados:

$$\log y = \log a + b \log x$$
$$z = k + b\,.\,v$$

É linear nas variáveis log y e log x

Modelos Lineares e Álgebra Matricial

3 Componentes Básicos

- Coeficientes: $a_{ij} \rightarrow A$
- Variáveis: $x_1, \ldots, x_n \rightarrow X$
- Constantes: $d_1, \ldots, d_n \rightarrow d$

$i = 1,2,\ldots, m$ → linhas
$j = 1,2,\ldots, n$ → colunas

Dado o sistema de equações lineares:

$$6x_1 + 3x_2 + x_3 = 22$$
$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 12$$
$$4x_1 - 1x_2 + 5x_3 = 10$$

Podemos escrevê-lo em forma matricial: _________

Modelos Lineares e Álgebra Matricial

AX = d, onde:

Elementos da Matriz: a_{ij}, x_{ij}, d_{ij}

A posição de cada elemento é indicada pelo subscrito ij

Equilíbrio Parcial de Mercado

Qd = Qs

Qd = a - b P

Qs = - c + dP

Equilíbrio Parcial de Mercado

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & -d \end{bmatrix}}_{\text{Matriz dos Coeficientes}} \quad X = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_d \\ Q_s \\ P \end{bmatrix}}_{\text{Vetor Variáveis}} \quad d = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ a \\ -c \end{bmatrix}}_{\text{Vetor Constantes}}$$

AX = d   Como resolver?

Equilíbrio Geral de Mercado

(I) $Q_{di} = Q_{di}(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ (i = 1,2, …n)

(II) $Q_{si} = Q_{si}(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ (i = 1,2, …n)

(III) $Q_{di} = Q_{si}$ ou $Q_{di} - Q_{si} = 0$ (i = 1,2, …n)

Para n = 2

Produto 1

$$Q_{d1} = Q_{s1}$$
$$Q_{d1} = a_0 + a_1P_1 + a_2P_2$$
$$Q_{s1} = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2$$

Produto 2

$$Q_{d2} = Q_{s2}$$
$$Q_{d2} = \alpha_0 + \alpha_1P_1 + \alpha_2P_2$$
$$Q_{s2} = \beta_0 + \beta_1P_1 + \beta_2P_2$$

Sistemas Lineares e Álgebra Matricial

Escrever o sistema na forma AX = d

Sistemas Lineares

Dado um sistema genérico de equações lineares:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Como expressá-lo na forma matricial **AX = b**

Sistemas Lineares e Álgebra Matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$