

**LES0160 - Matemática Aplicada a Finanças**

# **Alguns Conceitos de Matemática Financeira**

**Prof. Dr. Roberto Arruda de Souza Lima**

**ESALQ/USP**

**2015**

# Programa

- **Juros: simples, compostos, aplicações**
- **Correção Monetária e Inflação**
- **VPL**
- **Payback**
- **TIR**
- **Avaliação de Investimentos**
- **Substituição e Reposição de Equipamentos**

# Valor do dinheiro

- **Deve uma empresa aceitar um projeto que, a partir de um investimento de R\$ 1 milhão, promete render R\$ 200 mil por ano durante nove anos?**

**Conceito de valor do dinheiro no tempo**

# Valor do dinheiro

- **José está tentando vender seu carro. Ele recebeu duas ofertas:**
  - **Oferta 1: R\$ 30.000 a vista.**
  - **Oferta 2: R\$ 34.160 para receber ao final de um ano.**
- **Considerando que José pode aplicar seu dinheiro no banco, a uma taxa de 12% a.a., qual proposta ele deve aceitar?**

# Valor do dinheiro

Preços  
alternativos  
de venda

Data

R\$ 30.000

R\$ 34.160

0

1

**Valor Futuro**

- Se aceitar a oferta para receber a vista e aplicar o dinheiro, em um ano ele terá:  
$$30.000 + 0,12 \times 30.000 = 33.600$$
- Melhor alternativa: Vender por R\$ 34.160 (recebendo em um ano).

# Valor do dinheiro

- Método alternativo: empregar o conceito de **valor presente**:
- Quanto José precisaria aplicar hoje no banco para ter R\$ 34.160 no próximo ano?

$$PV \times 1,12 = 34.160$$

$$PV = \frac{34.160}{1,12} = 30.500$$

# Valor do dinheiro

- Método alternativo: empregar o conceito de **valor presente**:

$$PV = \frac{FV_1}{1+r}$$

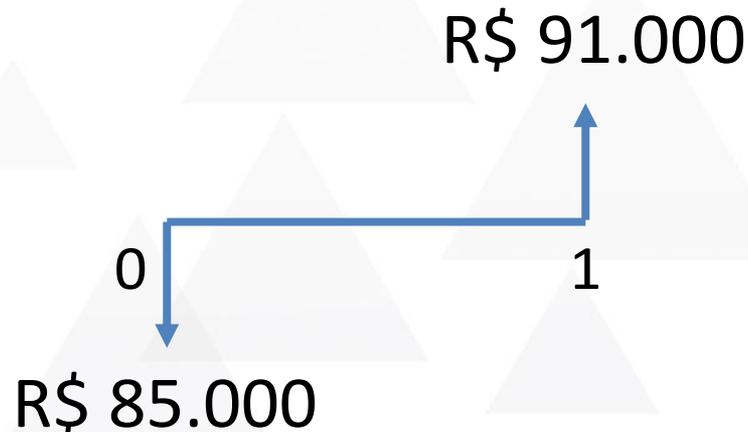
Em que:

$FV_1$  = fluxo de caixa na data 1;

$r$  = taxa de juros

# Valor do dinheiro

- Exemplo:
  - Luiza está pensando em investir num terreno que custa R\$ 85.000.
  - Está segura de que no próximo ano esse terreno estará valendo R\$ 91.000, o que significa um ganho certo de R\$ 6.000.



# Valor do dinheiro

- Exemplo:
  - Luiza está pensando em investir num terreno que custa R\$ 85.000.
  - Está segura de que no próximo ano esse terreno estará valendo R\$ 91.000, o que significa um ganho certo de R\$ 6.000.
  - Taxa de juros disponível no banco é de 10% a.a.
  - Ela deve fazer este investimento?

$$PV = \frac{FV}{1+r} = \frac{91.000}{1,10} = 82.727,27$$

# Valor do dinheiro

$$PV = \frac{FV}{1+r} = \frac{91.000}{1,10} = 82.727,27$$

- Muitas vezes desejamos determinar o custo ou benefício exato de uma decisão.

$$-85.000 + \frac{91.000}{1,10} = -2.273 \quad \text{VPL}$$

- –R\$ 2.273 é o valor do investimento depois de se considerar todos os benefícios e todos os custos usando como base a data 0.

# Valor do dinheiro

- **Valor presente líquido** é o valor presente dos fluxos de caixa futuros menos o valor presente do custo do investimento.
  - **O VPL utiliza fluxos de caixa** (não confundir com lucro contábil)
  - **O VPL usa todos os fluxos de caixa do projeto**
  - **O VPL desconta os fluxos de caixa** corretamente (considera o valor do dinheiro no tempo)

# Valor do dinheiro

$$PV = \frac{FV}{1+r}$$


Como calcular os juros?

# Juros

## JUROS SIMPLES

Juros calculados (e pagos) unicamente sobre o capital inicial (principal) e ao tempo em que é aplicado.

$$J = P \cdot i \cdot n$$

Sendo:

J = valor do juro pago

P = Principal (capital)

i = taxa de juro (forma unitária)

n = número de períodos

# Juros

## JUROS SIMPLES

Juros calculados (e pagos) unicamente sobre o capital inicial (principal) e ao tempo em que é aplicado.

$$J = P \cdot i \cdot n$$

$$\text{Saldo Devedor} = P + J$$

$$\text{Saldo Devedor} = P + P \cdot i \cdot n$$

$$\text{Saldo Devedor} = P \cdot (1 + i \cdot n)$$

# Juros

## JUROS COMPOSTOS

Neste caso, o juro gerado pela aplicação é incorporado à mesma, passando a participar da geração de juros no período seguinte.

$$J = P \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

Sendo:

J = valor do juro pago

P = Principal (capital)

i = taxa de juro (forma unitária)

n = número de períodos

# Juros

## JUROS COMPOSTOS

Neste caso, o juro gerado pela aplicação é incorporado à mesma, passando a participar da geração de juros no período seguinte.

$$J = P \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

$$\text{Saldo Devedor} = P + J$$

$$\text{Saldo Devedor} = P + P \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

$$\text{Saldo Devedor} = P + P \cdot (1 + i)^n - P$$

$$\text{Saldo Devedor} = P \cdot (1 + i)^n$$

# Juros

## Exercícios

1. Qual será o montante de um capital de R\$ 5.000, aplicado a 12% ao ano, **juros simples**, por dois anos?

R\$ 6.200,00

2. Qual será o montante de um capital de R\$ 5.000, aplicado a 12% ao ano, **juros compostos**, por dois anos?

R\$ 6.272,00

# Juros

## Exercícios

3. Um indivíduo toma um empréstimo de R\$ 160,00 pelo prazo de 100 dias. O banco cobra **juros simples** de 9,0% ao ano. Calcule o valor total (principal acrescido de juros) que deverá ser pago no vencimento desta operação. R\$ 164,00
4. Um indivíduo toma um empréstimo de R\$ 160,00 pelo prazo de 100 dias. O banco cobra **juros compostos** de 9,0% ao ano. Calcule o valor total (principal acrescido de juros) que deverá ser pago no vencimento desta operação. Considere que ocorre capitalização diária dos juros. R\$ 163,88

# Juros

## Exercícios

5. Um indivíduo tem a oportunidade de fazer um investimento que custa R\$ 900. Se fizer esse investimento agora, receberá R\$ 180 daqui a um ano. Adicionalmente, receberá R\$ 215 e R\$ 785 daqui a dois e três anos, respectivamente. A taxa apropriada de desconto para este investimento é igual a 10% a.a.
- a) Deveria fazer o investimento?
  - b) Qual o VPL desta oportunidade de investimento?
  - c) Se o investimento custasse R\$ 950, deveria fazê-lo? Calcule o VPL para justificar sua resposta.

# Juros

## TABELA PRICE

- O valor de cada prestação é calculado pela fórmula abaixo:

$$\text{PMT} = \frac{P \cdot i \cdot (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}$$

Em que:

PMT = Valor da prestação

P = Principal

i = taxa de juros (forma unitária)

n = número total de prestações (períodos) <sup>20</sup>

# Juros

## TABELA PRICE

- O valor de cada prestação é calculado pela fórmula abaixo:

$$\text{PMT} = \frac{P \cdot i \cdot (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}$$

**Os juros na Tabela Price são simples ou compostos?**

# Juros

## TABELA PRICE

Exemplo:

$$P = \$ 1.000,00$$

$$i = 10\%$$

$$n = 5$$

$$\Rightarrow \text{PMT} = 263,80$$

Mês	Saldo Inicial (a)	Juros (b)	Prestação (c)	Saldo Final (a + b - c)	Principal Pago (c - b)
1	1.000,00	100,00	263,80	836,20	163,80
2	836,20	83,62	263,80	656,02	180,18
3	656,02	65,60	263,80	457,82	198,20
4	457,82	45,78	263,80	239,80	218,02
5	239,80	23,98	263,80	0,00	239,82

# Inflação

Definição e abrangência desse fenômeno:

Inflação é a **situação** de **umentos** **contínuos** e **generalizados** dos preços dos bens e serviços em uma economia.

# Inflação

## CORREÇÃO MONETÁRIA

- Instituída com o propósito de preservar o poder aquisitivo da moeda.
- A alteração do valor da moeda em razão do processo inflacionário implica no empobrecimento de quem a detém (fere o direito de propriedade).
- Valor não é alterado (o que implicaria em ganho ou perda), apenas é atualizado.

# Inflação

As diversas medidas de inflação podem ser usadas para indexar contratos ou preços de bens e serviços

A utilização de índices diferentes produz resultados diferente.

A indexação de contratos financeiros nem sempre é feita por medidas de inflação

# Inflação

## TAXA DE INFLAÇÃO

$$\text{Taxa de inflação do mês } i = \left( \frac{\text{Índice do mês } i}{\text{Índice do mês } (i - 1)} \right) - 1 \cdot 100$$

A taxa de crescimento do índice é a taxa de inflação

# Exemplo

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the following content:

1 André fez um empréstimo bancário no dia 01/fev/2005 no valor de R\$ 10.000,00.  
2 O contrato venceu (e foi pago integralmente) no dia 01/fev/2006.  
3 O contrato previa correção monetária pela variação do IGP-M e juros simples de 2% a.m.  
4 Qual valor foi pago por André no dia 01/fev/2006?

5  
6 Dados: IGP-M 01/fev/05 333,288  
7 IGP-M 01/fev/06 338,128

Data	Índice	Saldo Inicial	Correção Monetária	Saldo Corrigido	Juros	Saldo Final
01/02/05	333,288	10.000,00				10.000,00
01/02/06	338,128	10.000,00	145,22	10.145,22	2.468,67	12.613,89

15 Resposta: André pagou R\$ 12.613,89 em 01/fev/2006.

The spreadsheet interface includes the ribbon with tabs for Arquivo, Página Inicial, Inserir, Layout da Página, Fórmulas, Dados, Revisão, and Exibição. The status bar at the bottom shows the system date and time as 16:40 on 05/08/2012.

***Decisões de Investimentos e  
Dimensionamento dos Fluxos de  
Caixa***

# Introdução

- As decisões de investimento são voltadas a promover alterações no volume de capital destinado a produção de bens e serviços (ampliação do volume de atividade, reposição e modernização e ativos, arrendamentos, aquisições, entre outras)
- Todo o processo de decisões financeiras requer uma compreensão dos **princípios de formação e utilização das taxas de juros** do mercado
- Um investimento é atraente quando seu retorno for superior às taxas de remuneração do capital

# Introdução

O processo de avaliação e seleção de alternativas de investimento envolve:

- a) Dimensionamento dos fluxos de caixa
- b) Avaliação dos fluxos de caixa
- c) Definição das taxas de retorno exigidas
- d) Introdução do risco

# Tipos de Investimento

**1**

## Investimentos economicamente independentes

A aceitação de um não implica a desconsideração dos demais, podendo ser aceitos de forma simultânea

## Investimentos com restrição orçamentária

Exigem recursos orçamentários acima dos limites da empresa, inviabilizando a aceitação de todos

**2**

# Tipos de Investimento

3

## Investimentos economicamente dependentes

A aceitação de um exerce influência (negativa/positiva) sobre o outro ou depende da implementação do outro

## Investimentos mutuamente excludentes

Ocorre quando a aceitação de uma proposta elimina totalmente a possibilidade de implementação da outra

4

# Tipos de Investimento

5

## Investimentos com dependência estatística

Apresentam variações conjuntas em seus resultados ao longo do tempo, estando associado aos mesmos eventos externos

# Relevância dos Fluxos de Caixa nas Decisões de Investimento

- Por meio dos resultados de caixa, a empresa assume efetiva capacidade de pagamento e reaplicação dos benefícios gerados na decisão de investimentos
- É fundamental o conhecimento dos benefícios futuros esperados e de sua distribuição ao longo da vida prevista do projeto
- O fluxo de caixa não coincide normalmente com o resultado contábil da empresa, apurado pelo regime de competência

# Fluxos de Caixa Incrementais

- Os fluxos de caixa são mensurados em termos incrementais, estando perfeitamente associados ao dispêndio de capital
- Tudo aquilo que não venha a sofrer variação alguma em função da decisão de investimento tomada não apresenta interesse para o dimensionamento do fluxo de caixa
- É fundamental identificar os efeitos colaterais decorrentes do projeto em avaliação sobre os demais resultados da empresa

# Desembolso ou investimento inicial

- Refere-se ao volume comprometido de capital direcionado à geração de resultados operacionais futuros
- São avaliados por seus respectivos preços de compra acrescidos de todos os gastos necessários para serem colocados em funcionamento
- A necessidade de investimentos adicionais em capital de giro assume característica idêntica à do investimento de capital

# Influência da Inflação nas Decisões de Investimento

## Inflação

- Atua como indicador de risco nas decisões de investimento em função da sua complexidade e dificuldade de previsão
- Reflete de maneira não uniforme nos elementos de resultados
- Propõe-se trabalhar com os fluxos de caixa expressos em valores constantes, convertidos individualmente

# ***Métodos de Avaliação Econômica de Investimentos***

# Métodos de Análise de Investimentos

Os métodos quantitativos de análise econômica de investimentos podem ser classificados em dois grandes grupos:

- Os que não levam em conta o valor do dinheiro no tempo e
- Os que consideram essa variação por meio do critério do fluxo de caixa descontado.

**A avaliação de um ativo é estabelecida pelos benefícios futuros esperados de caixa trazidos a valor presente mediante uma taxa de desconto que reflete o risco de decisão**

# Períodos de *Payback*

Consiste na determinação do **tempo** necessário para que o **dispêndio de capital seja recuperado** por meio dos fluxos de caixa promovidos pelo investimento

É interpretado como um importante **indicador do nível de risco** de um projeto de investimento

Em épocas de maior incerteza da conjuntura econômica o limite-padrão definido pelas empresas em geral reduz-se bastante

# Períodos de *Payback*

## Exemplo ilustrativo

ALTER-NATIVA	VALOR DO INVESTI-MENTO	FLUXOS DE CAIXA				
		ANO 1	ANO 2	ANO 3	ANO 4	ANO 5
A	- \$ 300.000	\$ 100.000	\$ 100.000	\$ 100.000	\$ 100.000	\$ 100.000
B	- \$ 300.000	\$ 90.000	\$ 50.000	\$ 60.000	\$ 50.000	\$ 250.000

O *payback* da alternativa **A** é de 3 anos, pois os \$ 300.000 investidos, são recuperados em três meses (\$100.000 por mês)

O *payback* da alternativa **B** é de 4,2 anos, pois os \$ 300.000 investidos, são recuperados \$ 90.000 no primeiro ano, \$ 140.000 no segundo ano, \$ 200.000 no terceiro, \$ 250.000 no quarto e \$ 50.000 no último ano (20% x \$ 250.000)

# Restrições do método de *payback*

**Duas importantes restrições são normalmente imputadas ao método de *payback*:**

- a) não leva em conta as magnitudes dos fluxos de caixa e sua distribuição nos períodos que antecedem ao período de *payback*;**
- b) não leva em consideração os fluxos de caixa que ocorrem após o período de *payback*.**

# Restrições do método de *payback*

ALTER- NATIVA	VALOR DO INVESTI- MENTO	FLUXOS DE CAIXA				
		ANO 1	ANO 2	ANO 3	ANO 4	ANO 5
C	-\$ 500.000	\$ 400.000	\$ 100.000	\$ 50.000	\$ 50.000	\$ 50.000
D	-\$ 500.000	\$ 100.000	\$ 400.000	\$ 300.000	\$ 300.000	\$ 300.000

O *payback* das duas alternativas é igual a dois anos, podendo ser implementados se o prazo fixado pela empresa for esse e os projetos forem considerados independentes

Porém, é nítida a preferência por C, em razão de promover um retorno, em termos de fluxos de caixa, 80% do valor do investimento no primeiro ano e os 20% restantes no segundo ano

# Payback descontado

ALTER-NATIVA	VALOR DO INVESTI-MENTO	FLUXOS DE CAIXA				
		ANO 1	ANO 2	ANO 3	ANO 4	ANO 5
C	-\$ 500.000	\$ 400.000	\$ 100.000	\$ 50.000	\$ 50.000	\$ 50.000
D	-\$ 500.000	\$ 100.000	\$ 400.000	\$ 300.000	\$ 300.000	\$ 300.000

ALTER-NATIVA	VALOR DO INVESTI-MENTO	FLUXOS DE CAIXA DESCONTADO				
		ANO 1	ANO 2	ANO 3	ANO 4	ANO 5
C	-\$ 500.000	<i>400.000</i>	<i>100.000</i>	<i>50.000</i>	<i>50.000</i>	<i>50.000</i>
		<i>1,25</i>	<i>(1,25)<sup>2</sup></i>	<i>(1,25)<sup>3</sup></i>	<i>(1,25)<sup>4</sup></i>	<i>(1,25)<sup>5</sup></i>
D	-\$ 500.000	<i>100.000</i>	<i>400.000</i>	<i>300.000</i>	<i>300.000</i>	<i>300.000</i>
		<i>1,25</i>	<i>(1,25)<sup>2</sup></i>	<i>(1,25)<sup>3</sup></i>	<i>(1,25)<sup>4</sup></i>	<i>(1,25)<sup>5</sup></i>

ALTER-NATIVA	VALOR DO INVESTI-MENTO	FLUXOS DE CAIXA DESCONTADO				
		ANO 1	ANO 2	ANO 3	ANO 4	ANO 5
C	-\$ 500.000	\$ 320.000	\$ 64.000	\$ 25.600	\$ 20.480	\$ 16.384
D	-\$ 500.000	\$ 80.000	\$ 256.000	\$ 153.600	\$ 122.880	\$ 98.304

# Payback descontado

ALTER-NATIVA	VALOR DO INVESTI-MENTO	FLUXOS DE CAIXA DESCONTADO				
		ANO 1	ANO 2	ANO 3	ANO 4	ANO 5
C	-\$ 500.000	\$ 320.000	\$ 64.000	\$ 25.600	\$ 20.480	\$ 16.384
D	-\$ 500.000	\$ 80.000	\$ 256.000	\$ 153.600	\$ 122.880	\$ 98.304

O *payback* descontado da alternativa C mostra que ela é inviável, pois a soma dos valores dos benefícios (\$ 446.464) não atingem o valor do investimento inicial.

O *payback* descontado da alternativa D alcança é de 3,08 anos, pois os \$ 500.000 investidos, investidos, são recuperados \$ 80.000 no primeiro ano, \$ 256.000 no segundo ano, \$ 153.600 no terceiro, \$ 10.400 no quarto ano ( $0,0846\% \times \$ 122.880$ )

# Restrições do método de *payback*

Considerando-se as duas alternativas de investimento:

ANO	ALTERNATIVA D			ALTERNATIVA E		
	FC ORIGINAL (\$)	FC DESCON-TADO (\$)	FC ACUMU-LADO (\$)	FC ORIGINAL (\$)	FC DESCON-TADO (\$)	FC ACUMU-LADO (\$)
0	(500.000)	(500.000)	(500.000)	(500.000)	(500.000)	(500.000)
1	100.000	80.000	(420.000)	100.000	80.000	(420.000)
2	400.000	256.000	(164.000)	400.000	256.000	(164.000)
3	300.000	153.600	(10.400) <i>payback</i>	300.000	153.600	(10.400) <i>payback</i>
4	300.000	122.880	112.480	300.000	122.880	112.480
5	300.000	98.304	210.784	100.000	32.768	145.248

# Restrições do método de *payback*

Comparando os dois investimentos, temos

- Os projetos têm o mesmo *payback*, pois, em ambos o capital investido será recuperado no mesmo momento
- O projeto **D** é superior a **E**, pois apresenta maior fluxo de caixa após o período de *payback*.
- O método do *payback* não considera os resultados de caixa que ocorrem após o período de *payback*.

# *Payback*

Regra do período de *payback* para a tomada de decisão de investimentos:

- Todos os projetos de investimento que possuem períodos de *payback* superior a “x” anos são rejeitados.
- Todos os projetos de investimento que possuem períodos de *payback* igual ou inferior a “x” anos são aceitos.
- Padrões arbitrários no Período de *Payback*.

# *Payback*

## ▪ Vantagens do Método:

- Fácil de entender
- Leva em conta a incerteza de fluxos de caixa mais distantes
- Viesado em favor da liquidez

## ▪ Desvantagens do Método:

- Ignora o valor do dinheiro no tempo
- Exige um período-limite arbitrário
- Ignora fluxos de caixa posteriores a data limite
- Viesado contra projetos de longo prazo

# Taxa Interna de Retorno (TIR)

- É a taxa de desconto que iguala, em determinado momento de tempo, as entradas com as saídas previstas de caixa
- O cálculo da TIR requer o conhecimento dos montantes de dispêndio de capital e dos fluxos de caixa líquidos incrementais gerados pela decisão
- Representa a rentabilidade do projeto expressa em termos de taxa de juros composta equivalente periódica.

# Taxa Interna de Retorno (TIR)

A formulação da taxa interna de retorno é representada, supondo-se a atualização de todos os movimentos de caixa para o momento zero, da forma seguinte:

$$I_0 + \sum_{t=1}^n \frac{I_t}{(1+K)^t} = \sum_{t=1}^n \frac{FC_t}{(1+K)^t}$$

**Em que:**

$I_0$  = montante do investimento no momento zero (início do projeto);

$I_t$  = montantes previstos de investimento em cada momento subsequente;

$K$  = taxa de rentabilidade equivalente periódica (TIR);

$FC$  = fluxos previstos de entradas de caixa em cada período de vida do projeto (benefícios de caixa).

# Taxa Interna de Retorno (TIR)

## Exemplo ilustrativo

Investimento de \$ 300 com benefícios de caixa de \$ 100, \$ 150, \$ 180 e \$ 120, respectivamente, nos próximos quatro anos

$$300 = \frac{100}{(1+K)} + \frac{150}{(1+K)^2} + \frac{180}{(1+K)^3} + \frac{120}{(1+K)^4}$$

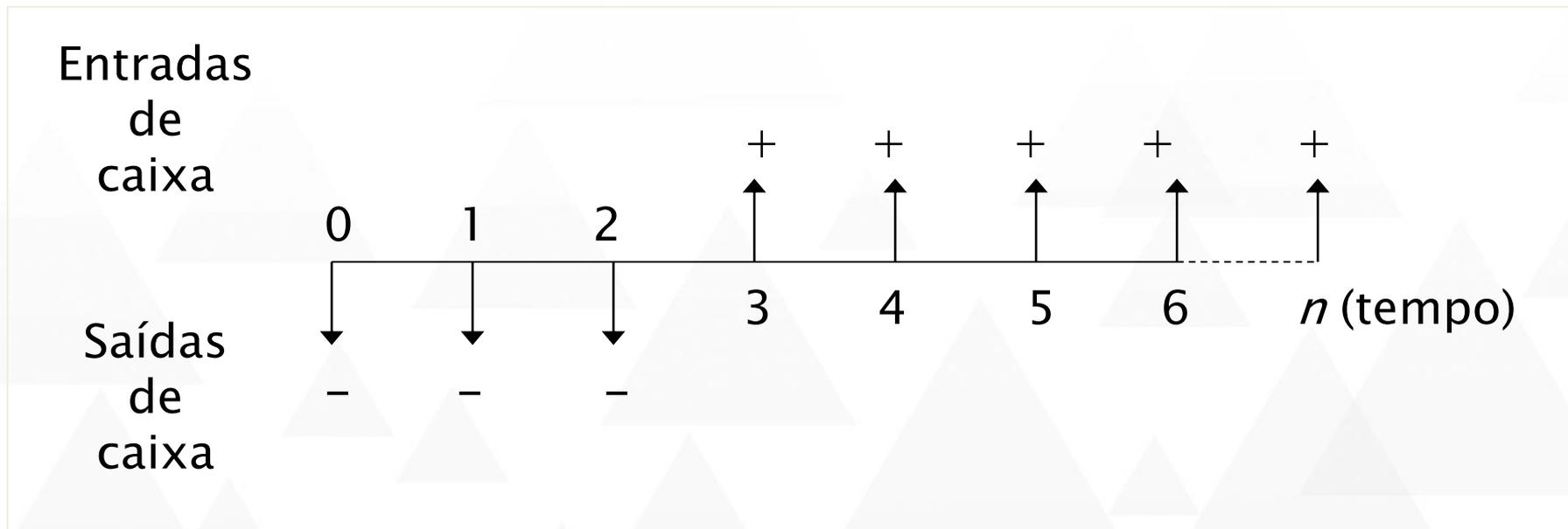
Resolvendo-se com o auxílio de uma calculadora financeira, temos  $K = 28,04\%$

# Taxa Interna de Retorno (TIR)

- Se a taxa interna de retorno exceder (ou igualar) o percentual mínimo desejado pela empresa, considera-se o investimento como economicamente atraente, devendo ser aceito
- O projeto pode até ser lucrativo, mas, se produzir uma taxa de retorno inferior à desejada pela empresa, será inviável

# TIR em projetos de investimento não convencionais

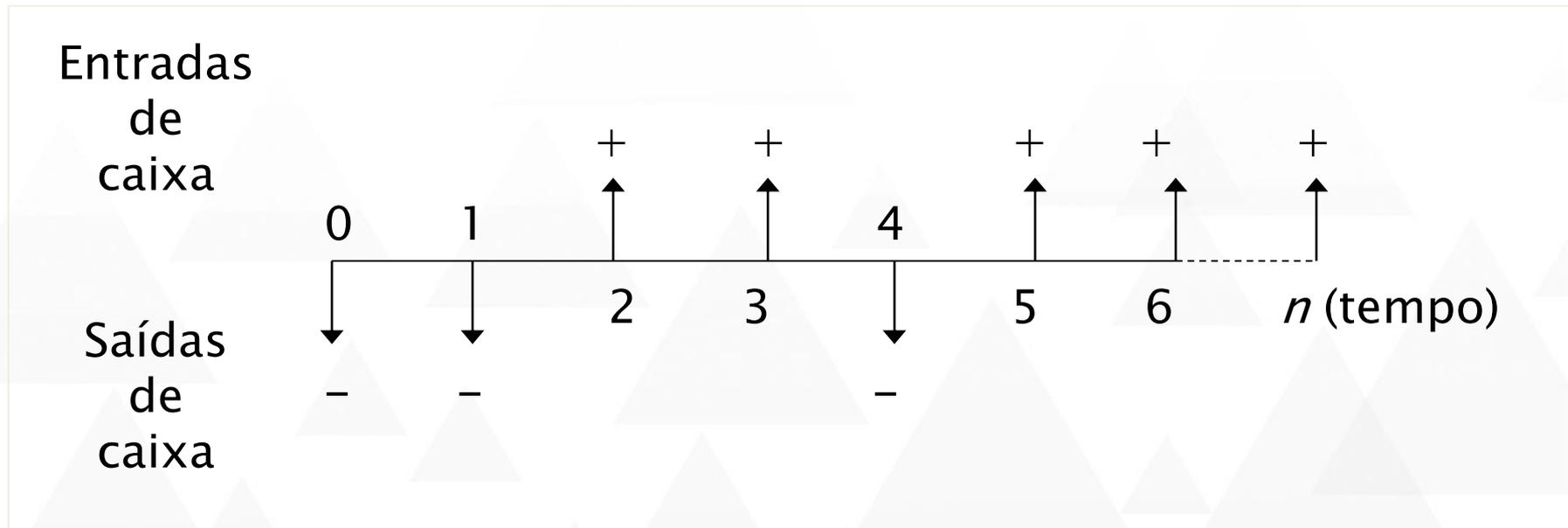
- Padrão de fluxo de caixa *convencional*:



- Nessa situação, há somente uma inversão de sinais, a qual ocorre após o último fluxo de saída de caixa (período 2) e se passa de negativo (-) para positivo (+).

# TIR em projetos de investimento não convencionais

- Padrão de fluxo de caixa *não convencional*:



- Nessa situação, ocorrem diversas inversões de sinais, gerando fluxo de caixas negativos e positivos ao longo da duração do projeto

# TIR em projetos de investimento não convencionais

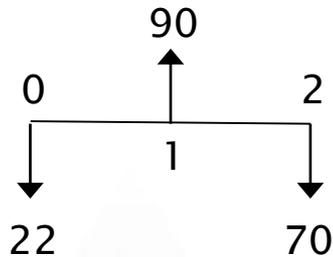
Nesses casos, mediante a aplicação do critério da TIR, poderão ser encontradas três respostas:

- múltiplas taxas de retorno que igualam, em determinado momento, as entradas com as saídas de caixa
- uma única taxa interna de retorno
- taxa interna de retorno indeterminada (não há solução)

# TIR em projetos de investimento não convencionais

## ▪ Múltiplas TIR

Ex:



$$22 = \frac{90}{(1+r)} - \frac{70}{(1+r)^2}$$

$$\frac{90}{(1+r)} - \frac{70}{(1+r)^2} - 22 = 0$$

$$\frac{90(1+r) - 70 - 22(1+r)^2}{(1+r)^2} = 0$$

$$90(1+r) - 70 - 22(1+r)^2 = 0$$

$$90 + 90r - 70 - 22(1 + 2r + r^2) = 0$$

$$90 + 90r - 70 - 22 - 44r - 22r^2 = 0$$

$$-22r^2 + 46r - 2 = 0$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

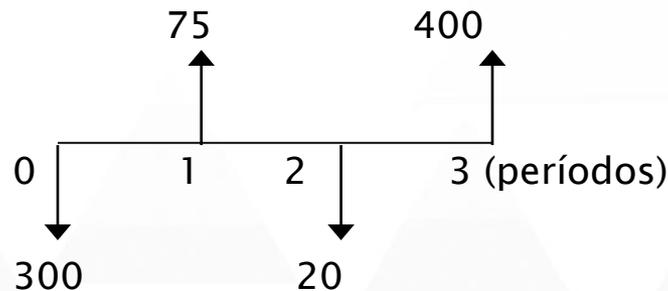
$$r_1 = \frac{-46 + \sqrt{2116 + 176}}{-44} = \frac{-46 + 44,04}{-44} = 0,0444 = 4,44\%$$

$$r_2 = \frac{-46 - \sqrt{2116 + 176}}{-44} = \frac{-46 - 44,04}{-44} = 2,0465 = 204,65\%$$

# TIR em projetos de investimento não convencionais

- *Investimento não convencional com uma única TIR*

Ex:



$$-300 + \frac{75}{(1+r)} - \frac{20}{(1+r)^2} + \frac{400}{(1+r)^3} = 0$$

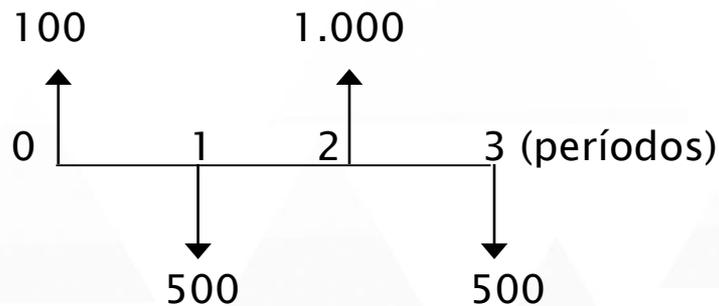
Resolvendo-se com o auxílio de uma calculadora financeira:

$$\text{TIR } (r) = 16,89\% \text{ a.a.}$$

# TIR em projetos de investimento não convencionais

- *Investimento não convencional com TIR indeterminada*

Ex:



$$100 - \frac{500}{(1+r)} + \frac{1.000}{(1+r)^2} - \frac{500}{(1+r)^3}$$

Resolvendo-se com o auxílio de uma calculadora financeira:

TIR (r) = indeterminado. Não há solução

# TIR

## Regra de decisão

Fluxos	Nº de TIRs	Critério
Primeiro fluxo é negativo e todos os demais fluxos são positivos	1	Aceitar se $TIR > r$ Rejeitar se $TIR < r$
Primeiro fluxo é positivo e todos os demais fluxos são negativos	1	Aceitar se $TIR < r$ Rejeitar se $TIR > r$
Alternância dos sinais do fluxo de caixa	Pode haver mais de uma TIR	Não há TIR válida

# Valor Presente Líquido (VPL)

O VPL é obtido pela diferença entre o valor presente dos benefícios líquidos de caixa, previstos para cada período do horizonte de duração do projeto, e o valor presente do investimento (desembolso de caixa):

$$VPL = \left[ \sum_{t=1}^n \frac{FC_t}{(1+K)^t} \right] - \left[ I_0 + \sum_{t=1}^n \frac{I_t}{(1+K)^t} \right]$$

onde:

$FC_t$  = fluxo (benefício) de caixa de cada período

$K$  = taxa de desconto do projeto, representada pela rentabilidade mínima requerida

$I_0$  = investimento processado no momento zero

$I_t$  = valor do investimento previsto em cada período subsequente

61

# Valor Presente Líquido (VPL)

## Exemplo ilustrativo:

Supondo que uma empresa esteja avaliando um investimento no valor de \$ 30.000,00, do qual se esperam benefícios anuais de caixa de \$ 10.000, \$ 15.000,00, \$ 20.000,00 e \$ 10.000,00 nos próximos quatro anos e tenha definido uma taxa de retorno de 20%, temos:

$$VPL = \left[ \frac{10.000,00}{1,20} + \frac{15.000,00}{(1,20)^2} + \frac{20.000,00}{(1,20)^3} + \frac{10.000,00}{(1,20)^4} \right] - 30.000,00$$

$$VPL = [8.333,33 + 10.416,67 + 11.574,07 + 4.822,53] - 30.000,00$$

$$VPL = 5.146,60$$

62

# Valor Presente Líquido (VPL)

- Um VPL positivo demonstra uma rentabilidade superior à mínima aceitável, enquanto um NPV negativo indica um retorno inferior à taxa mínima requerida para o investimento
- O VPL expressa, em última análise, o resultado econômico (riqueza) atualizado do projeto de investimento
- O VPL pressupõe, implicitamente, que seus fluxos intermediários de caixa devem ser reinvestidos à taxa de desconto utilizada na avaliação do investimento. <sup>63</sup>

# Ainda sobre Inflação

- Fluxo nominal de caixa: é aquele que é determinado tomando-se os valores efetivamente pagos ou recebidos na data da sua ocorrência.
- Fluxo real de caixa: é aquele expresso em moeda com poder de compra da data 0.

## Descontando fluxos nominais e reais de caixa

- Os fluxos nominais de caixa devem ser descontados à taxa nominal.
- Os fluxos reais de caixa devem ser descontados à taxa real.

# ***Dinâmica dos Métodos de Avaliação de Investimentos***

# A Análise Comparativa dos Métodos para um Único Investimento

## **Um investimento será economicamente atrativo se:**

- Apresentar VPL positivo ou, no mínimo, igual a zero
- Possuir uma TIR superior à taxa mínima requerida

# Decisões Conflitantes

Em projetos mutuamente excludentes, os métodos **VPL** e **TIR** poderão produzir **resultados conflitantes** para a decisão

- As razões dessas diferenças são explicadas:
- Pelas escalas dos investimentos
- Pelas diferentes contribuições dos fluxos de caixa no tempo

# Decisões Conflitantes

## Exemplo ilustrativo

Alternativas de investimento com taxa de retorno de 20% no período

ALTERNATIVAS	INVESTIMENTO INICIAL (\$)	BENEFÍCIOS ESPERADOS DE CAIXA			
		$T_1$ (\$)	$T_2$ (\$)	$T_3$ (\$)	$T_4$ (\$)
A	-100.000,00	60.000,00	50.000,00	40.000,00	40.000,00
B	-200.000,00	30.000,00	40.000,00	180.000,00	200.000,00

Aplicando os métodos de análise, temos:	ALTERNATIVAS	TIR	VPL
		A	
	B		

# Decisões Conflitantes

## Conflito de decisões em projetos mutuamente excludentes

- A TIR é expressa em termos relativos (percentual)
- O VPL mensura a riqueza do projeto em valores absolutos
- Em investimentos de diferentes escalas,  
**o VPL é superior ao TIR**

# Decisões Conflitantes

## Análise incremental

ALTERNATIVAS	INVESTIMENTO INICIAL (\$)	BENEFÍCIOS ESPERADOS DE CAIXA			
		$T_1$ (\$)	$T_2$ (\$)	$T_3$ (\$)	$T_4$ (\$)
A	-100.000,00	60.000,00	50.000,00	40.000,00	40.000,00
B	-200.000,00	30.000,00	40.000,00	180.000,00	200.000,00
Valores incrementais (B-A)	(100.000,00)	(30.000,00)	(10.000,00)	140.000,00	160.000,00

$$\text{VPL incremental: } -100.000 - \frac{30.000}{1,20} - \frac{10.000}{(1,20)^2} + \frac{140.000}{(1,20)^3} + \frac{160.000}{(1,20)^4}$$

VPL incremental: \$ 26.234,60

O VPL incremental define a riqueza adicional acrescida pelo investimento B de maior escala

# Decisões Conflitantes

## Interseção de Fischer

É a TIR incremental. Revela a taxa de desconto que produz o mesmo VPL para as duas alternativas de investimento

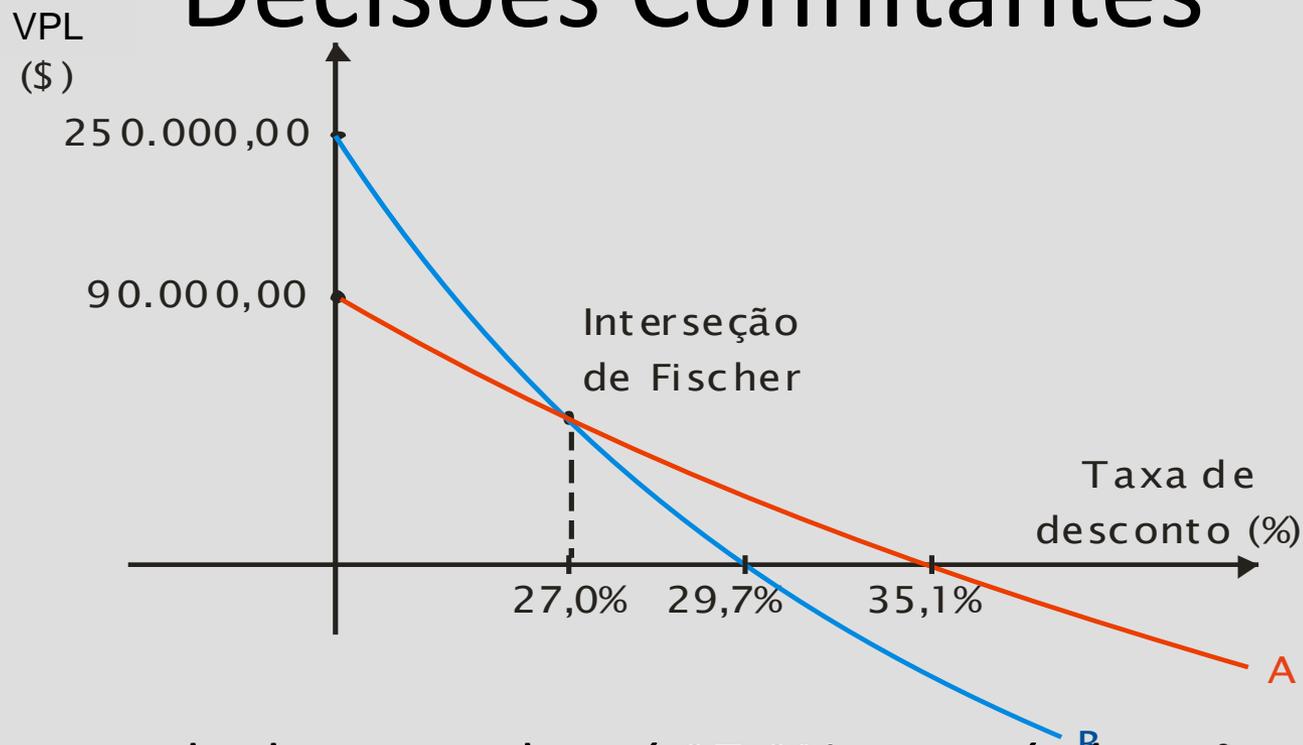
A TIR incremental é obtida por meio da seguinte expressão de cálculo:

$$100.000 = -\frac{30.000}{(1+r)} - \frac{10.000}{(1+r)^2} + \frac{140.000}{(1+r)^3} + \frac{160.000}{(1+r)^4}$$

Resolvendo-se:

TIR (r) = 27,0% ao período

# Decisões Conflitantes



Para uma taxa de desconto de até 27,0% ao período, o **investimento B** é preferível a A, apresentando maior riqueza líquida gerada. A partir de 27,0%, o **investimento A** passa a ser o mais atraente, mantendo essa superioridade até a taxa de 35,1% ao período

# Decisões Conflitantes

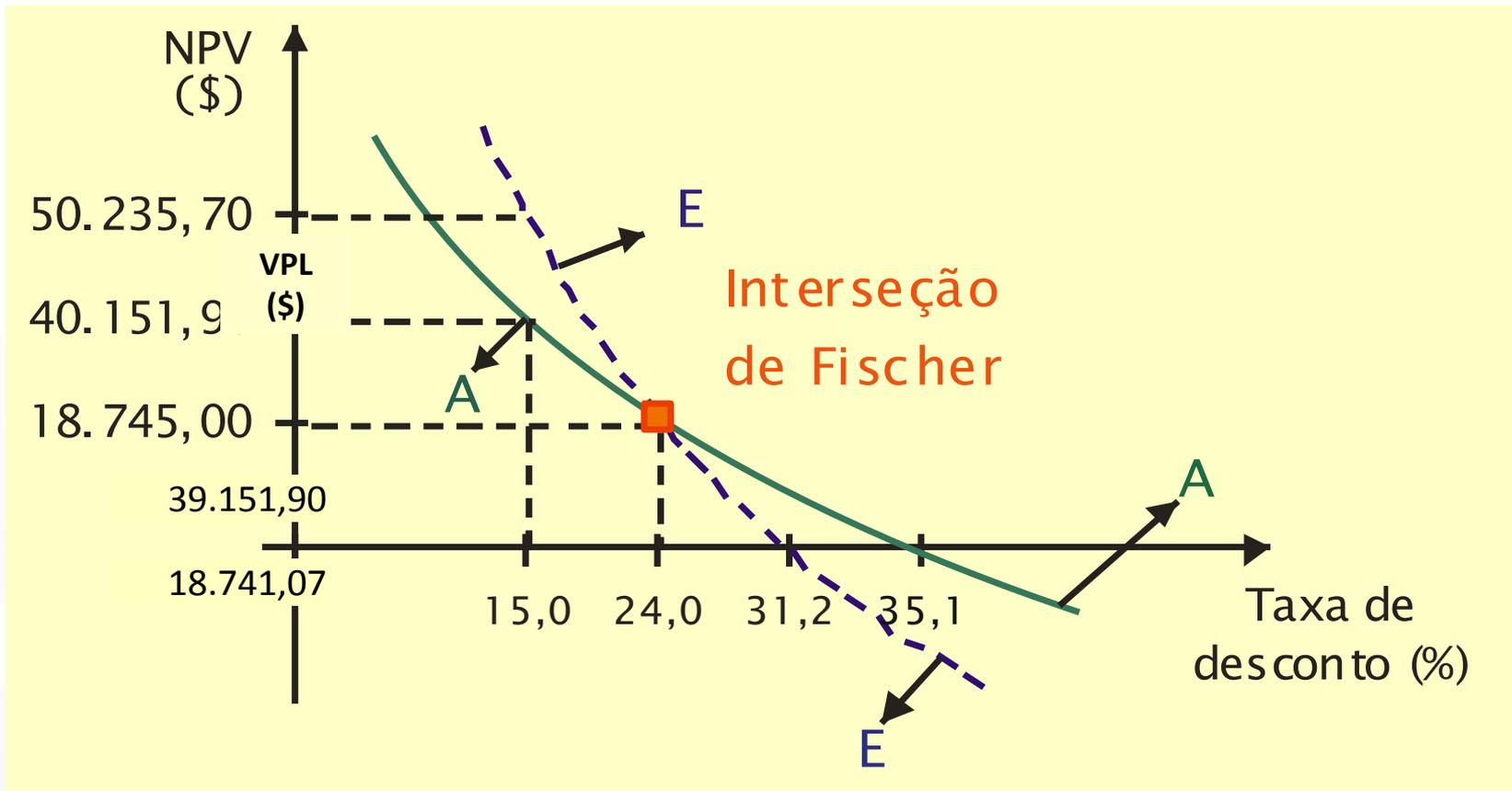
Seleção de investimentos com mesmo desembolso inicial e diferentes fluxos de caixa no decorrer do tempo

ALTERNATIVAS	INVESTIMENTO	BENEFÍCIOS ESPERADOS DE CAIXA			
		ANO 1 (\$)	ANO 2 (\$)	ANO 3 (\$)	ANO 4 (\$)
A	-\$ 100.000,00	\$ 60.000,00	\$ 50.000,00	\$ 40.000,00	\$ 40.000,00
E	-\$ 100.000,00	\$ 15.000,00	\$ 20.000,00	\$ 90.000,00	\$ 110.000,00

Definindo em 15% ao período o retorno exigido do investimento, temos:

ALTERNATIVAS	TAXA INTERNA DE RETORNO	VPL
A		
E		

# Decisões Conflitantes



O método que apresentar fluxos de caixa decrescentes (investimento A) é levado a determinar a maior TIR e menor VPL <sup>74</sup>

# Decisões Conflitantes

## Se os projetos forem mutuamente excludentes...

- Para uma taxa inferior a 24,0% a.a., torna-se mais interessante o projeto E, com maior VPL
- Para uma taxa entre 24,0% e 35,1%, a situação inverte-se, devendo-se optar pela alternativa A (maior VPL)
- A partir de 35,1%, os retornos oferecidos não alcançam a taxa mínima requerida.

# Algumas Conclusões

## **Críticas ao método da TIR**

- É expressa em valores percentuais, o que distorce a avaliação de projetos com diferentes níveis de investimento
- Dificilmente representa as oportunidades de reaplicação dos fluxos intermediários de caixa
- Não considera o custo de oportunidade definido pela empresa

# Algumas Conclusões

Considerando os seguintes investimentos com taxa mínima de atratividade de 20% ao período, temos:

INVESTI- MENTO	FLUXOS DE CAIXA				
	ANO 0	ANO 1	ANO 2	ANO 3	ANO 4
C	(\$ 300.000)	\$ 140.000	\$ 160.000	\$ 200.000	\$ 43.518
D	(\$ 600.000)	\$ 220.000	\$ 150.000	\$ 615.200	\$ 43.518

INVESTI- MENTO	VPL	TIR
C		
D		

# Algumas Conclusões

## Análise dos resultados

- Pelo método do VPL, os dois investimentos são atraentes, pois produzem o mesmo montante de riqueza
- Porém, o investimento D exige um desembolso de capital duas vezes maior que C para produzir o mesmo VPL

# Decisões de Investimento sob Restrição de Capital

**Em condições onde o capital é limitado por restrições orçamentárias, deve-se:**

- Evitar o uso parcial de recursos para que não haja ociosidade dos fundos programados para investimentos
- Selecionar um conjunto de alternativas de investimentos que maximize os benefícios econômicos para a empresa

# *Aplicações*

# Vida Útil e Vida Econômica

- Equipamentos de eficiência decrescente e vida útil previsível

Problemas de substituição

- Equipamentos de eficiência constante e vida útil imprevisível

Problemas de reposição

# Equipamento de Eficiência Decrescente

- Alternativas:
  - Baixa pura e simples, sem substituição
  - Baixa com substituição por equipamento semelhante, de mesma eficiência
  - Baixa com substituição por equipamento mais eficiente

# Equipamento de Eficiência Decrescente

- **Baixa pura e simples, sem substituição**

Uma linha de fabricação de carroças vem experimentando uma redução de vendas e custos crescentes de manutenção, prevendo-se para os próximos três anos:

Ano	Receita Líquida	Valor Residual
1	20.000	25.000
2	15.000	20.000
3	9.000	12.000

Sabendo-se que hoje o valor residual é R\$ 30.000 e que a taxa de juros de mercado é 12% a.a., quando deverá ser encerrada a produção?

# Equipamento de Eficiência Decrescente

Valor Presente Líquido Anualizado (VPLA)

(também denominado Valor Uniforme Líquido ou Valor Anual Uniforme Equivalente ou, simplesmente, Valor Equivalente Anual).

Transforma o valor presente líquido de um fluxo financeiro em série anual uniforme.

# Equipamento de Eficiência Decrescente

- Baixa com substituição

Um automóvel da marca Z novo custa R\$ 40.000. estima-se que os valores de mercado e custos de manutenção são:

	Anos de uso			
	1	2	3	4
Valor de mercado	34.000	30.000	26.000	20.000
Custo de manutenção	1.600	2.400	3.400	4.600

Supondo que a taxa de juros de mercado é 12% a.a., com que intervalo é economicamente vantajoso substituir o carro por outro novo, do mesmo modelo?

# Equipamento de Eficiência Constante

- Nesse caso temos um número grande de unidades idênticas que falham aleatoriamente e devem ser repostas.

Tratando-se de falhas aleatórias, a primeira providência é determinar a distribuição estatística das falhas, curva de sobrevivência, a vida media das unidades e o número esperado de reposições por período para estimar os custos de cada política.

# Equipamento de Eficiência Constante

Uma companhia de transportes tem registros dos estouros de pneus em função dos quilômetros rodados:

Mil Km	Estouros	Sobre- vivente	Probab. Estouro	Probab. Sobrev.	Ponto Médio	PMédio X Prob.
0	0	1.000	0,000	1,000		
0 - 10	50	950	0,050	0,950	5	0,25
10 - 20	100	850	0,100	0,850	15	1,50
20 - 30	250	600	0,250	0,600	25	6,25
30 - 40	400	200	0,400	0,200	35	14,00
40 - 50	200	0	0,200	0,000	45	9,00
					Média	31,00

# Equipamento de Eficiência Constante

- Uma troca programada de pneus custa R\$ 350,00 (custo do pneu + serviços).
- Um estouro, ou seja, uma troca não prevista, custa R\$ 950 (custo do pneu + serviços + atraso na viagem + socorro + ...).

Qual a política de custo mínimo para a troca de pneus?

# Equipamento de Eficiência Constante

Mil Km	Estouros	Sobre- vidente	Probab. Estouro	Probab. Sobrev.	Ponto Médio	PMédio X Prob.
0	0	1.000	0,000	1,000		
0 - 10	50	950	0,050	0,950	5	0,25
10 - 20	100	850	0,100	0,850	15	1,50
20 - 30	250	600	0,250	0,600	25	6,25
30 - 40	400	200	0,400	0,200	35	14,00
40 - 50	200	0	0,200	0,000	45	9,00
					Média	31,00

Se apenas trocarmos os pneus estourados, teremos, em média, um estouro a cada 31.000 km, o que dá um custo médio de  $950/31 = \text{R\$ } 30,65$  / mil km / pneu.

# Equipamento de Eficiência Constante

Política: trocar com	10	20	30	40	50
Faixa (mil km)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
Ponto médio	5	15	25	35	45
Probabilid. Estouro	0,050	0,100	0,250	0,400	0,200
Estouro - originais	50	100	250	400	200
Est-Trocados em 10	0	2,5	5,125	13,006	21,788
Est-Trocados em 20	0	0	5	10,250	26,013
Est-Trocados em 30	0	0	0	12,5	25,625
Est-Trocados em 40	0	0	0	0	20
Est-Trocados em 50	0	0	0	0	0
Total est. na faixa	50	102,5	260,125	435,756	293,425
Total trocas ñ progr.	50	152,5	412,625	848,381	1.141,81
Trocas programadas	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Custo p/ 1.000 km	R\$ 79,50	R\$ 32,99	R\$ 29,68	R\$ 33,03	R\$ 31,88