ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II / Profs.: C.A. Martins e R. Ramos Jr.

3ª Prova - 29/11/2016 / Duração da Prova: 100 minutos

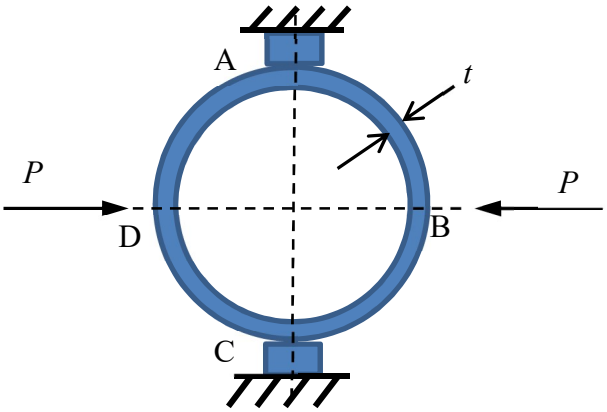
Não é permitido o uso de calculadoras ou qualquer outro dispositivo eletrônico durante a prova!

1ª Questão (5,0 pontos):

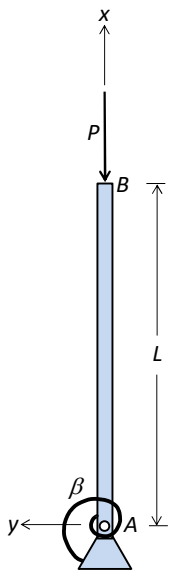
A figura abaixo mostra um anel de largura *b* (dimensão não indicada na figura), raio médio *R* e espessura t (sendo t/R <<1), fabricado com um material com módulo de elasticidade *E*. Considere que na configuração inicial (não deformada) o anel seja colocado entre dois batentes rígidos, fixos, e de dimensões desprezíveis (pontos A e C da figura), de tal forma que não existam folgas nem esforços de reação entre anel e batentes. Considerando que na configuração final (deformada) duas forças concentradas, de magnitude *P*, sejam aplicadas nos pontos diametralmente opostos B e D do anel, pede-se:

a) Determinar as reações verticais dos batentes sobre o anel;
b) Determinar a aproximação entre os pontos B e D após a aplicação do carregamento;
c) Determinar a energia total acumulada pelo anel após a aplicação do carregamento.

Obs: Despreze as parcelas da energia complementar associadas às forças normais e cortantes.



2ª Questão (5,0 pontos):



A coluna da figura é prismática, possui rigidez flexional *EI* e está submetida a uma força de compressão *P*. A sua extremidade *B* é livre e a sua extremidade *A* está vinculada a um pino e a uma mola linear cuja constante de rigidez rotacional é β. Pede-se:

a) obter a equação característica que permite calcular o valor crítico de *P*;

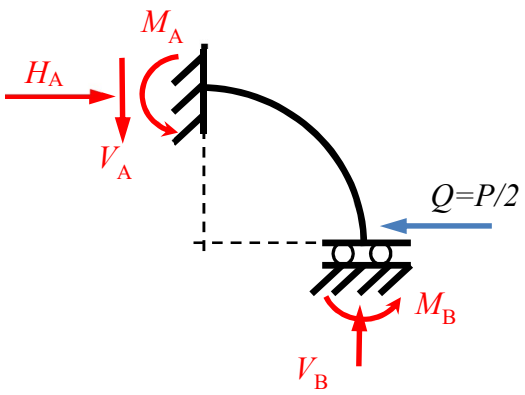
b) calcular o valor crítico de *P* para o caso em que a mola é muito rígida ($\beta \to \infty$);

c) calcular o valor crítico de *P* para o caso em que a barra é muito rígida ($EI \to \infty$).

Gabarito

1ª Questão:

a) Trata-se de uma estrutura simétrica submetida a carregamento simétrico, havendo dois planos de simetria que podem ser utilizados. A figura abaixo mostra um modelo simplificado que pode ser utilizado para a análise estrutural do anel nestas condições, bem como as reações devidas aos vínculos criados (que representam as reações das partes do anel que foram "removidas" sobre a parte do anel que foi "mantida", bem como parte da reação do batente sobre o anel):



Pelas equações de equilíbrio da estática, temos[1]:

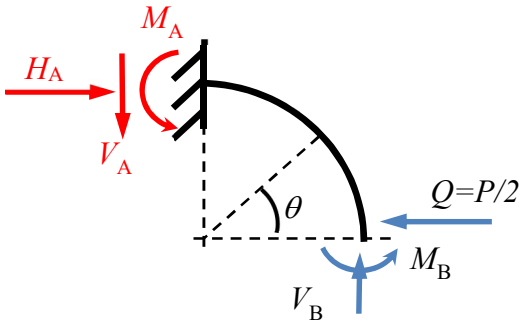
$$\sum F_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_A = Q$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_A = V_B$$

$$\sum M_{pólo\ A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_A + M_B + V_B R = QR$$

Temos 5 incógnitas a serem determinadas e apenas 3 equações de equilíbrio estático. Logo temos um grau de hiperestaticidade estrutural g = 2. Vemos, também, que a reação horizontal H_A já está totalmente determinada pelo equilíbrio, não sendo uma incógnita hiperestática. Dentre as várias soluções possíveis, optamos por adotar V_B e M_B como as incógnitas hipestáticas a serem determinadas, o que nos leva à seguinte Estrutura Isostática Fundamental:

[1] Note que, por conveniência, consideraremos o esforço: $Q = P/2$.



Veja que, desta forma, todas as reações no vínculo A podem ser determinadas automaticamente pelas três equações de equilíbrio indicadas anteriormente.

A aplicação do Princípio da Energia Complementar Mínima à Estrutura Isostática Fundamental assim obtida fornece as equações necessárias para a determinação de V_B e M_B:

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial V_B} ds = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial V_B} d\theta = 0$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial M_B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_B} ds = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_B} d\theta = 0$$

A expressão do momento fletor no trecho do arco BA fica (veja a indicação do ângulo θ na figura anterior):

$$M = M_B + V_B R(1 - c \quad) - QRsen\theta$$

Logo, teremos:

$$\int_0^{\pi/2} [M_B + V_B R(1 - co \quad) - QRse \quad](1 - cos\theta)d\theta = 0$$

$$\int_0^{\pi/2} [M_B + V_B R(1 - cos\theta) - QRsen\theta]d\theta = 0$$

Levando a:

$$M_B \int_0^{\pi/2} (1 - cos\theta)d\theta + V_B R \int_0^{\pi/2} (1 - cos\theta)^2 d\theta = QR \int_0^{\pi/2} sen\theta(1 - cos\theta)d\theta$$

$$M_B \int_0^{\pi/2} d \quad + V_B R \int_0^{\pi/2} (1 - cos\theta)d\theta = QR \int_0^{\pi/2} sen\theta d\theta$$

E, finalmente, ao sistema:

$$M_B\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+V_BR\left(\frac{3\pi}{4}-2\right)=\frac{QR}{2}$$

$$M_B\left(\frac{\pi}{2}\right)+V_BR\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=QR$$

Cuja solução fornece:

$$M_B=4QR\left(\frac{\pi-3}{\pi^2-8}\right) \qquad e \qquad V_B=2Q\left(\frac{4-\pi}{\pi^2-8}\right)$$

Obs: Os sinais positivos encontrados para V_B e M_B indicam que os sentidos inicialmente arbitrados para estes esforços no D.C.L. estão corretos.

A força de reação de cada um dos batentes sobre o anel é dada, então, por:

$$R=2V_B=4Q\left(\frac{4-\pi}{\pi^2-8}\right)=2P\left(\frac{4-\pi}{\pi^2-8}\right)$$

b) Utilizando novamente a Estrutura Isostática Fundamental escolhida e aplicando o Teorema de Crotti-Engesser, temos que o deslocamento horizontal da seção B (em relação à seção A, que permanece fixa) é dado por:

$$\delta=\frac{\partial U^*}{\partial Q} \quad \Leftrightarrow \quad \delta=\int\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Q}ds \quad \Leftrightarrow \quad \delta=\int_0^{\pi/2}\frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Q}Rd\theta$$

Logo:

$$\delta=\int_0^{\pi/2}\frac{[M_B+V_BR(1-cos\theta)-QRsen\theta]}{EI}.(-Rsen\theta)Rd\theta$$

Levando a:

$$\delta=-\frac{M_BR^2}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sen\theta d\theta-\frac{V_BR^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(sen\theta-\frac{sen2\theta}{2}\right)d\theta+\frac{QR^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sen^2\theta)d\theta$$

Resolvendo as integrais indicadas e substituindo os valores encontrados no item anterior para os esforços V_B e M_B, e lembrando ainda que $Q=P/2$, encontramos finalmente[2]:

$$\delta=\frac{PR^3}{8EI}\left(\frac{32+\pi^3-20\pi}{\pi^2-8}\right)$$

Assim, a aproximação entre os pontos diametralmente opostos B e D, após a aplicação do carregamento, será:

[2] Note que a correção irá se pautar pela forma de solução (*desde que correta, clara e organizada*) e não pela apresentação do resultado final após as simplificações feitas.

$$\Delta = 2\delta = \frac{PR^3}{4EI}\left(\frac{32 + \pi^3 - 20\pi}{\pi^2 - 8}\right)$$

Onde o momento de inércia a ser considerado é:

$$I = \frac{bt^3}{12}$$

Resultando:

$$\Delta = \frac{3P}{Eb}\left(\frac{R}{t}\right)^3\left(\frac{32 + \pi^3 - 20\pi}{\pi^2 - 8}\right)$$

c) Aplicando o Princípio do Trabalho e da Energia, teremos:

$$U^* = U = W^* = W = 2\left(\frac{P\delta}{2}\right) = P\delta = \frac{P^2R^3}{8EI}\left(\frac{32 + \pi^3 - 20\pi}{\pi^2 - 8}\right)$$

2ª Questão:

a) A linha elástica é descrita por:

$$v(x) = A\cos kx + B\text{sen}kx + Cx + D \text{ com } k^2 = P/EI$$ (0,5)

sujeita às condições de contorno:

i) $v(0) = 0 \Rightarrow A + D = 0$ (0,5)

ii) $M(0) = \beta\theta(0) \Rightarrow EIv''(0) = \beta v'(0) \Rightarrow -EIk^2A = \beta(kB + C)$ (0,5)

iii) $M(L) = 0 \Rightarrow v''(L) = 0 \Rightarrow -k^2A\cos kL - k^2B\text{sen}kL = 0$ (0,5)

iv) $V(L) = 0 \Rightarrow v'''(L) + k^2v'(L) = 0$

$$\Rightarrow k^3A\text{sen}kL - k^3B\cos kL - k^3A\text{sen}kL + k^3B\cos kL + C = 0 \Rightarrow C = 0$$ (0,5)

Substituindo iv e ii em em iii, obtemos a equação característica:

$$\beta\cos kL - kEI\text{sen}kL = 0$$ (0,5)

b) Para $\beta \to \infty$, o problema é equivalente ao de uma coluna engastada/livre e a equação característica fica:

$$\cos kL = 0$$

Então:

$$kL = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_{cr} = EI\frac{\pi^2}{4L^2}$$ (1,0)

d) Para $EI \to \infty$, o problema equivale ao de um modelo de coluna rígida ligada a uma mola de rigidez finita:

$$PL\text{sen}\theta = \beta\theta \Rightarrow PL\theta \cong \beta\theta \Rightarrow (PL - \beta)\theta = 0 \Rightarrow P_{cr} = \frac{\beta}{L}$$ (1,0)