

Instituto de Física USP

Física Moderna I Aula 07

Professora: Mazé Bechara

Material para leitura – na Xerox do IF

1. Produção e Transformação de Luz - Albert Einstein (1905) – Artigo 5 do Livro “O ano Miraculoso de Einstein” (tradução dos 05 artigos de Einstein publicados em 1905). Introdução de leitura indispensável
2. A Natureza do Fóton – de Serge Reynaud – publicado no Scientific American Brasil – tradução da revista em francês. (Xerox colorida).
3. Contando Fótons de Luz por Jean-Michel Courty e Nicolas Treps - publicado no Scientific American Brasil – tradução da revista em francês. (Xerox colorida).

Aula 07 – Corpo negro – o insucesso do cálculo clássico, e a quantização de Planck.

1. **Determinação teórica da radiança espectral do corpo negro ou da intensidade espectral por efeito de temperatura:**
 - A **determinação de Rayleigh e Jeans** da radiação de uma cavidade, no contexto da Física Clássica. Comparação com os resultados experimentais e a chamada “**catástrofe do ultravioleta**”.
 - A **proposta de Planck de quantização das energias dos osciladores da matéria** e as implicações: na energia média da radiação eletromagnética da cavidade e na **radiança espectral emitida**. Comparação com os resultados experimentais. **A Lei de deslocamento de Wien e a Lei de Stephan-Boltzmann:** consequências da radiança determinada por Planck.

Cálculo da radiança espectral

- **Idéias básica de Rayleigh e Jeans:**
- (1) A energia eletromagnética na cavidade é de ondas estacionárias, pois no equilíbrio termodinâmica não há energia eletromagnética transitando na interface entre a cavidade e o material isolado na temperatura T.
- Justificativa: Se não há energia transitando, então os campos elétrico e magnético nesta superfície fronteira é nula em qualquer instante, e portanto a onda no interior da cavidade é onda tridimensional estacionária, como manda o eletromagnetismo de Maxwell.
- (2) As ondas na cavidade estão associadas às oscilações de cargas no interior da matéria. Portanto, a energia de cada onda estacionária pode ser considerada a média da energia das oscilações das cargas na matéria na temperatura T. Tal energia pode ser calculada na mecânica estatística clássica de Boltzmann.
- *Consequências:* (i) a **densidade volumétrica espectral de energia $\rho_T(\lambda)$ é igual à** densidade de ondas eletromagnéticas estacionárias **$dN_{EB}(\lambda)/dVd\lambda$ vezes a** **energia $\varepsilon(\lambda)$** das ondas estacionárias com comprimento de onda entre λ e $\lambda+d\lambda$.
- (ii) Sabendo calcular a densidade de ondas eletromagnéticas estacionárias com o eletromagnetismo de Maxwell, e a média das energias de oscilação na mecânica estatística de Boltzmann, chega-se à radiança espectral experimental!

A radiança espectral nas teorias da Física Clássica

- **Observação importante** – a radiação no interior da cavidade = a radiação no interior do corpo material na temperatura T .
- **Relação** entre a **intensidade espectral emitida** $R_T(\lambda)$ com a **densidade volumétrica espectral da radiação que no interior da cavidade**
- **Mostra-se que:** $R_T(\lambda) = c\rho_T(\lambda)/4$
- $\rho_T(\lambda)$ é a **densidade volumétrica espectral de energia eletromagnética no interior da cavidade**, ou seja, a **energia** eletromagnética por unidade de volume e por unidade de comprimento de onda no interior da cavidade.
- Sugestão: faça análise dimensional para conferir a relação entre radiança espectral e densidade volumétrica de energia

Uma dedução da relação da radiança espectral (feita em aula)

Rayleigh e Jeans usando eletromagnetismo de Maxwell

$$\rho_T(\lambda) \equiv \left\langle \frac{dU_{EB}(\lambda)}{dVd\lambda} \right\rangle = \frac{dN(\lambda)}{dVd\lambda} \langle \varepsilon_{EB} \rangle = \frac{dN(\lambda)}{dVd\lambda} \langle \varepsilon_T \rangle = \frac{8\pi}{\lambda^4} \langle \varepsilon_T \rangle$$

$$\rho_T(\nu) \equiv \left\langle \frac{dU_{EB}(\nu)}{dVd\nu} \right\rangle = \frac{dN(\nu)}{dVd\nu} \langle \varepsilon_{EB} \rangle = \frac{dN(\lambda)}{dVd\lambda} \left| \frac{d\lambda}{d\nu} \right| \langle \varepsilon_T \rangle = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle \varepsilon_T \rangle$$

$$\frac{dN(\lambda)}{dVd\lambda} = \text{número de ondas estacionárias/volume intervalo de comprimento de onda}$$

$\langle \varepsilon_T \rangle$ = media da energia das oscilações unidimensionais na matéria

Resultado de Rayleigh e Jeans e a catástrofe do ultra-violeta

(demonstração em aula)

Oscilador unidimensional (variáveis contínuas) na mecânica estatística de Boltzmann:

$$\langle \varepsilon_T \rangle = kT$$

$$R_T(\lambda) = \frac{c}{4} \rho_T(\lambda) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT$$

$$R_T(\nu) = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} kT$$

$$\Rightarrow R_T = \int_0^{\infty} R_T(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu \rightarrow \infty$$

Energia total infinita = catástrofe na Física!!!

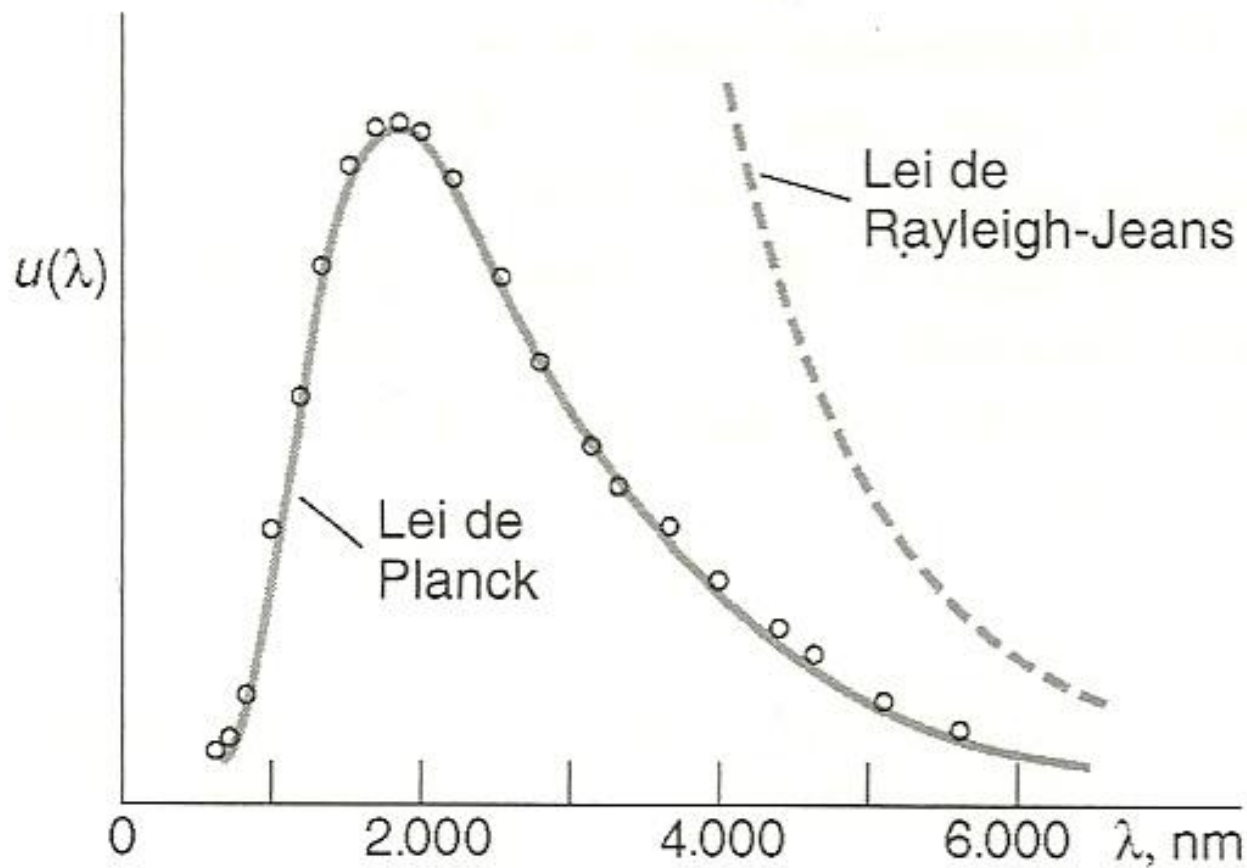
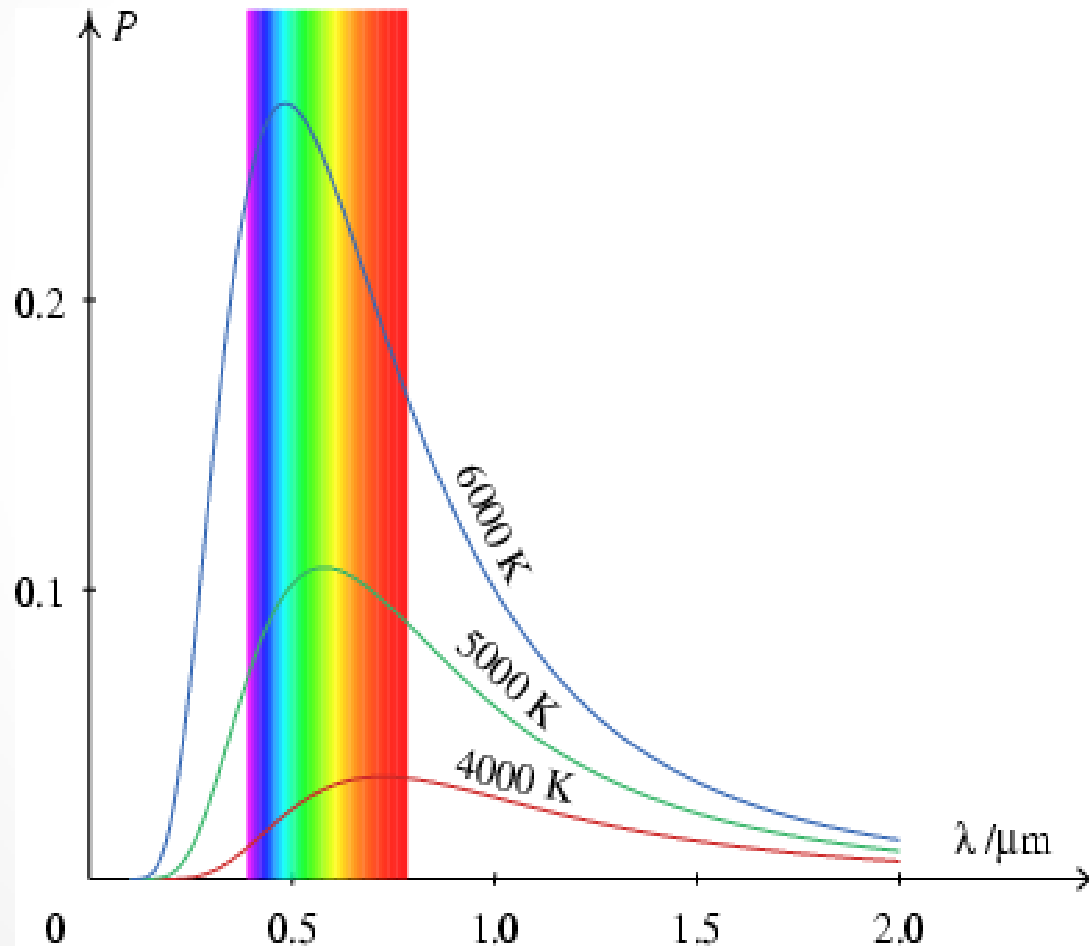


Fig. 3-9 Comparação da lei de Planck e da lei de Rayleigh-Jeans com os resultados experimentais obtidos por W. W. Coblentz, por volta de 1915, para um buraco negro a $T = 1.600$ K. A escala do eixo vertical é linear. [Adaptado de F. K. Richtmyer, E. H. Kennard e J. N. Cooper, *Introduction to Modern Physics*, 6th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1969, com permissão.]

A catástrofe do ultravioleta



Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 — 1947) físico alemão, Nobel de Física em 1918.

1900 – Supondo as oscilações no interior da matéria tem energias quantizadas: $\epsilon = nh\nu$, o que resulta em energia média dependente da frequência e da temperatura se descreve o corpo negro!

PS (Mas não é pra levar tão a sério assim!!!)



Resultados de Planck (demonstração em aula)

$$\langle \varepsilon_T \rangle = \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{h \frac{c}{\lambda}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

$$R_T(\lambda) = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5} \frac{h}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

$$R_T(\nu) = \frac{2\pi \nu^3}{c^2} \frac{h}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Mostre matematicamente que $\langle \varepsilon_T \rangle$ tende a kT quando ν tende a zero, ou λ a infinito, o que significa: $h\nu \ll kT$ ou $hc/\lambda \ll kT$

Valores das energias kT , comprimentos de ondas e as energias correspondentes $h\nu$

$T(K)$	$kT(eV)$	$\lambda(\text{angstroms})$	$h\nu (eV)$
• 300	0,0256	• 200	62,05
• 1500	0,130	• 1000	12,41
• 3000	0,259	• 4000	3,10
• 6000	0,518	• 7000	1,77

Cuidado: kT é a energia média de oscilação unidimensional na estatística clássica. Cada oscilador da matéria tem energia $nh\nu$, segundo Planck
(Einstein vai dar um novo e importante significado ao $h\nu$! Aguarde.)

Radiação cósmica de fundo

- Este tema deu dois prêmios Nobel de Física: 1978 e 2006

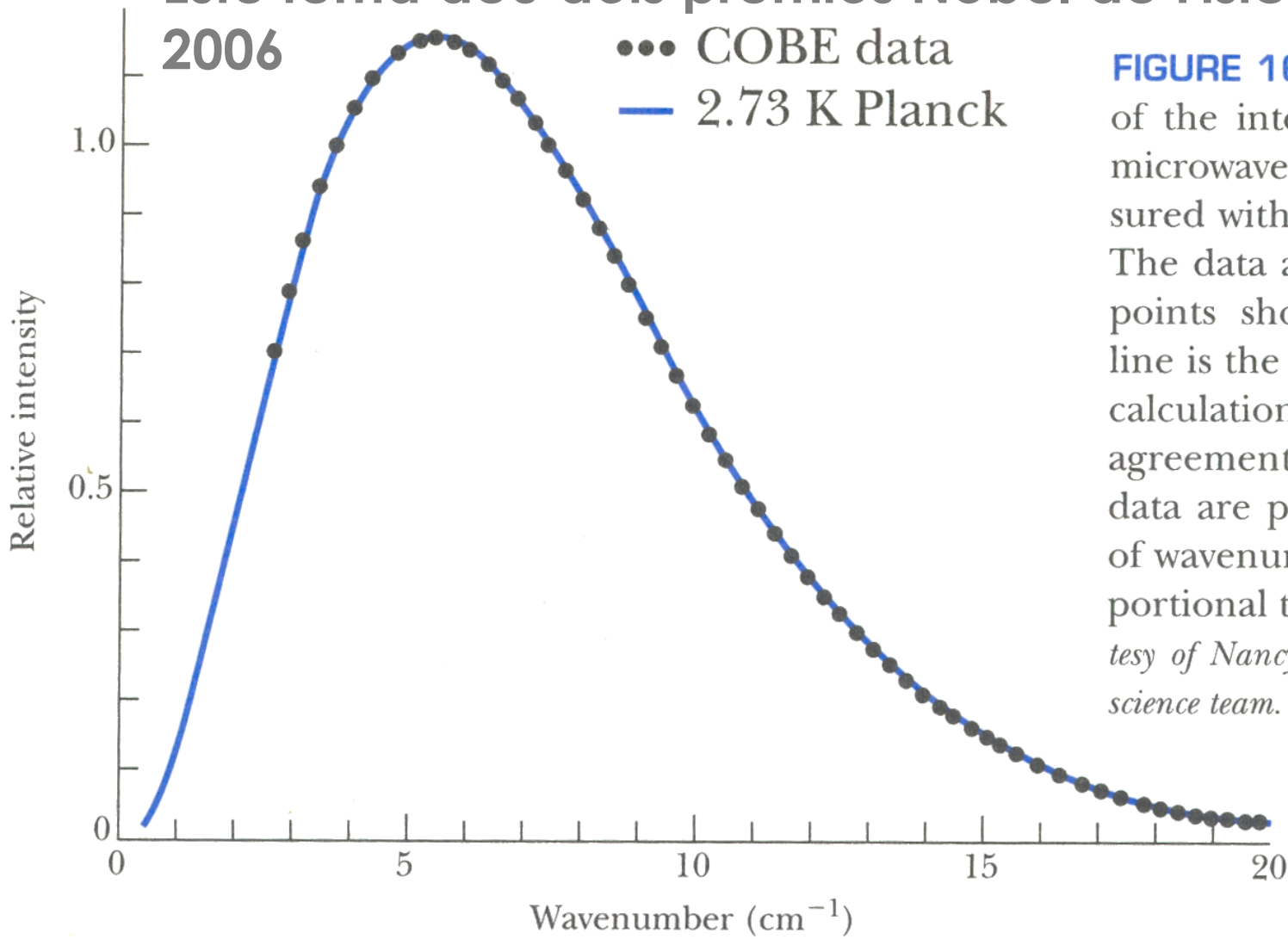
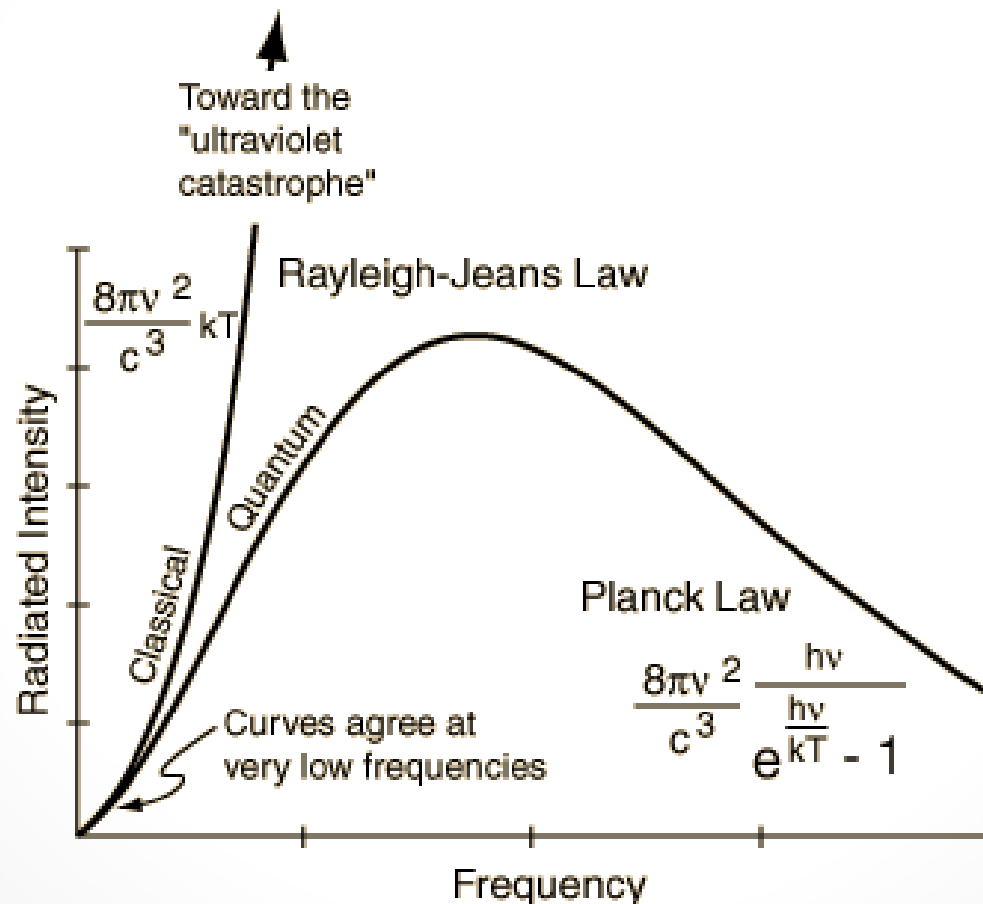


FIGURE 16.15 The spectrum of the intensity of the cosmic microwave background as measured with the COBE satellite. The data are smaller than the points shown, and the solid line is the blackbody radiation calculation for 2.73 K. The agreement is spectacular. The data are plotted as a function of wavenumber (inversely proportional to wavelength). *Courtesy of Nancy Burgess, NASA COBE science team.*

Constantes relevantes

- $k = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8,617 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$
- $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js} = 4,136 \times 10^{-15} \text{ eVs}$
- $hc = 12408 \times 10^{-10} \text{ eVm} = 1,9878 \times 10^{-15} \text{ Jm}$

Radiança espectral versus frequência e a catástrofe do ultravioleta



A lei de deslocamento de Wien a partir da radiança espectral de Planck.

Discutido em aula. Mostre!

- Determine o comprimento de onda mais provável, ou seja, no máximo da radiança espectral.

$$\frac{\partial R_T(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

- Cuidado: se chega em equação transcendental (não tenha medo de nome feio!), que só tem solução numérica.

$$5 \frac{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}{\frac{hc}{\lambda kT}} = 1 \Rightarrow \frac{hc}{\lambda kT} = 4,922 \Rightarrow \lambda_{+p} T = \frac{hc}{4,922k} = 2,8998 \times 10^{-3} mK$$

A lei de Stefan a partir da radiança de Planck.

Discutido em aula. Mostre!

- Integre a radiança espectral e obtenha a área sob a curva em termos da temperatura, e outras constantes universais da Física: k e h !

$$\int_0^{\infty} R_T(\nu) d\nu = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = 5,6705 \times 10^{-8} T^4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

- Observação: Foi usado o resultado da integral (tabela):

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

Constantes relevantes

- $k = 1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8,617 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$
- $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js} = 4,136 \times 10^{-15} \text{ eVs}$
- $hc = 12408 \times 10^{-10} \text{ eVm} = 1,9878 \times 10^{-15} \text{ Jm}$