

CAPÍTULO 2 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A CINEMÁTICA E A DINÂMICA DOS FLUIDOS

2.1. Teoria do Movimento Elementar da Partícula Fluida.

2.1.1. Movimento de uma Partícula Fluida

O movimento elementar de uma partícula, do ponto de vista da Mecânica dos Corpos Rígidos, resulta da composição de dois movimentos: translação e rotação. Do ponto de vista da Mecânica dos Corpos Deformáveis há necessidade de se agregar o movimento de deformação da partícula. Pressupõe-se que as partículas que compõem o sistema preservam a sua identidade física durante o movimento elementar, de acordo com o conceito de *sistema*, o que caracteriza o método lagrangeano de observação do movimento.

A taxa com que um elemento fluido é deformado depende do movimento relativo de dois pontos do meio fluido no intervalo de tempo de observação. A figura abaixo procura esquematizar o movimento elementar associado a partículas fluidas vizinhas P_0 e P_0' , num intervalo elementar de tempo dt :

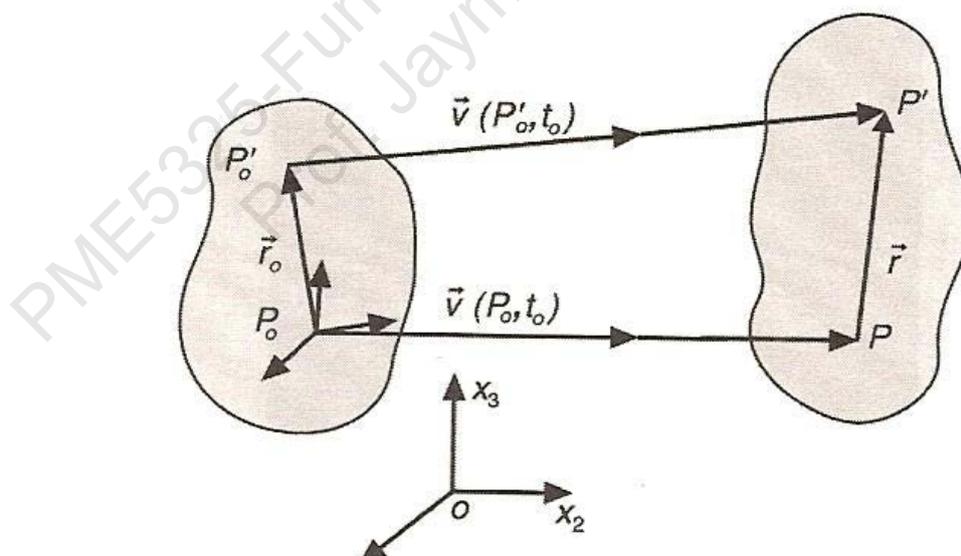


Figura 2.1. Representação esquemática do movimento elementar de partículas Fluidas

A posição \mathbf{P}_0' da partícula λ' da vizinhança de λ , situada em \mathbf{P}_0 , pode ser obtida pelo deslocamento elementar $d\vec{r}$. A dedução matemática pode ser encontrada em Assy (2004) resultando na equação geral da Mecânica dos Corpos Deformáveis, abaixo apresentada:

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_0 + \frac{1}{2} \text{grad}\phi \quad (2.1)$$

onde: $\vec{V}' - \vec{V} \rightarrow$ representa a variação da translação cinemática de uma partícula com relação a outro;

$\vec{\Omega} \wedge \vec{r}_0 \rightarrow$ representa a rotação pura de uma partícula com relação a outro;

$\frac{1}{2} \text{grad}\Phi \rightarrow$ representa a deformação de uma partícula com relação a outra.

No estudo da Mecânica dos Fluidos a deformação da partícula fluida é contínua e sempre é uma componente importante do movimento elementar, o que torna o estudo mais complexo quando comparado com o estudo dos corpos rígidos, onde não ocorre deformação.

Portanto o sistema de fluido real em movimento está sujeito simultaneamente a translação, rotação e deformação, e, em conseqüência, está sujeito a um estado de tensões que levam às deformações resultantes, conforme esquematizado na *figura 2.2*:

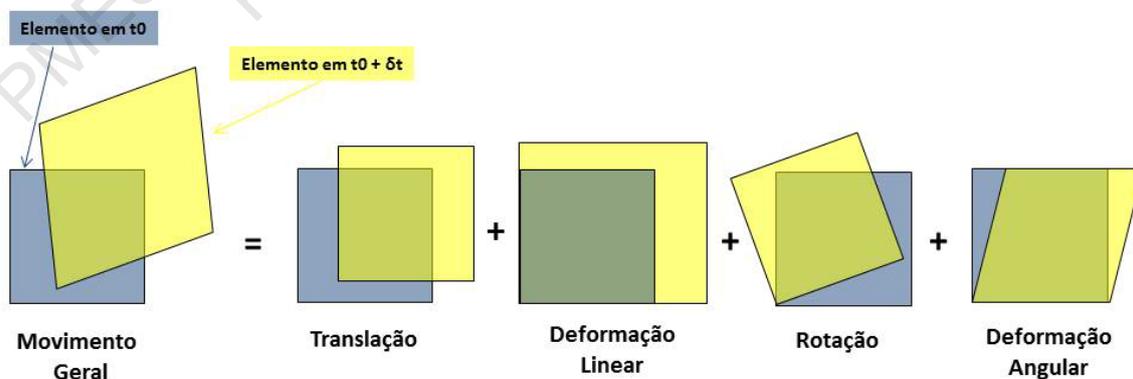


Figura 2.2. Tipos de deformações de um elemento fluido

2.1.2. Tensão Total em um Ponto de um Sistema Fluido

Um sistema ou corpo fluido em movimento com relação a um sistema de referência inercial está sujeito a forças de campo (ou à distância) e a forças de contacto (ou de superfície). A força de campo mais relevante é a força gravitacional e as forças de contato podem ser decompostas em forças normais e tangenciais, que estão associadas a forças de pressão e de cisalhamento sobre o elemento fluido.

A integração das forças elementares de campo e de contato resulta nas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\vec{F}_g &= \int_m \vec{g} dm = \int_V \vec{g} \rho dV \\ \vec{F}_{\text{sup}} &= \int_A \vec{T}_n dA\end{aligned}\tag{2.2}$$

O vetor \vec{T}_n representa a tensão total em um ponto **P** centrado na área elementar **dA**:

$$\vec{T}_n = \lim_{\Delta V \rightarrow dV} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{dA}\tag{2.3}$$

A aplicação do teorema do tetraedro (ver ASSY, 2004) permite determinar a tensão total em um ponto a partir do campo de tensões em três planos tri-ortogonais com centro no ponto P. Em notação tensorial a tensão total em um ponto P pode ser representada por um tensor simétrico de segunda ordem:

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}\tag{2.4}$$

onde, os termos de mesmo índice correspondem aos termos de esforços normais (pressão) e os termos de índices diferentes correspondem aos esforços cisalhantes (viscosos).

2.1.3. Dilatação Linear, Tensor Simétrico de Deformação e Tensor Antissimétrico de Rotação

2.1.3.1. Dilatação Linear e Dilatação Cúbica

A figura abaixo representa a dilatação de um elemento em uma única direção:

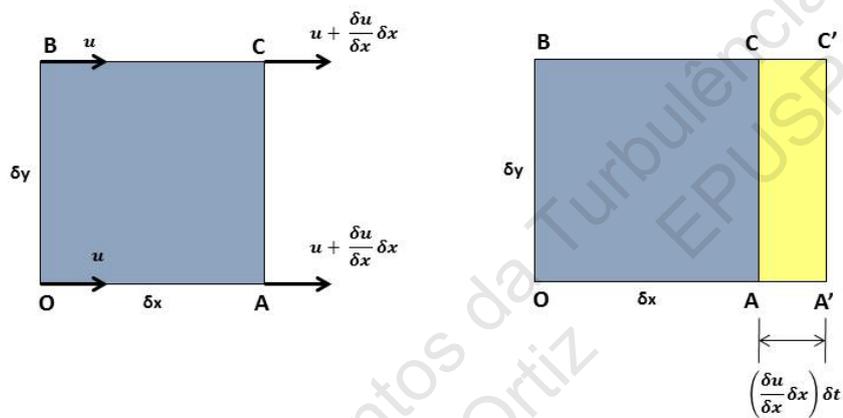


Figura 2.3. Representação esquemática da dilatação linear em um elemento fluido

Para um campo de velocidades quando todos os termos são nulos, exceto $\partial U_1 / \partial x_1$, a velocidade relativa de P_0 em relação a P_0 é de:

$$dU_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1$$

onde:

$$d_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}$$

representa a taxa de alongamento (ou taxa de deformação linear) na direção x-x, sofrida pelo elemento.

Analogamente, nas outras direções:

$$d_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial x_2}$$

$$d_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial x_3}$$

Generalizando em notação tensorial:

$$d_{ii} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad (2.5)$$

Quando o elemento se dilata nas três direções simultaneamente (dilatação cúbica), a variação de volume em termos de taxa relativa é dada por:

$$\Delta = \frac{d\nabla - d\nabla_0}{d\nabla_0} \quad (2.6)$$

$$d\nabla_0 = dx_1 dx_2 dx_3$$

A substituição da equação (2.5) na equação (2.6), aplicando-se expansão em série de Taylor ao elemento que se dilata nas três direções, resulta no conceito de compressibilidade do elemento de fluido, onde:

$$\frac{\Delta}{dt} = \frac{d\nabla - d\nabla_0}{d\nabla_0 dt} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \text{div} \vec{U} = \nabla \cdot \vec{U} \quad (2.7)$$

A relação acima mostra que não há divergência ($\text{div} \vec{U} = 0$) entre $d\nabla$ e $d\nabla_0$ no instante t_0 quando o fluido escoar, comportando-se como incompressível, que é o caso de interesse dessa publicação.

2.1.3.2. Tensor Simétrico

O termo \mathbf{d}_{ii} caracteriza um tensor com deformações em direções normais ao elemento fluido. Quando os elementos fora da diagonal principal não se anulam ($i \neq j$), o campo de escoamento passa a ser de deformação por cisalhamento puro, o que é caracterizado por um tensor simétrico de deformação (\mathbf{d}_{ij}), sendo:

$$d\theta_2 = \tan d\theta_2 = \frac{\frac{\partial U_1}{\partial x_2} dx_2 dt}{dx_2} = \frac{\partial U_1}{\partial x_2} dt$$

$$d\theta_1 = \tan d\theta_1 = \frac{\frac{\partial U_2}{\partial x_1} dx_1 dt}{dx_1} = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} dt \quad (2.8)$$

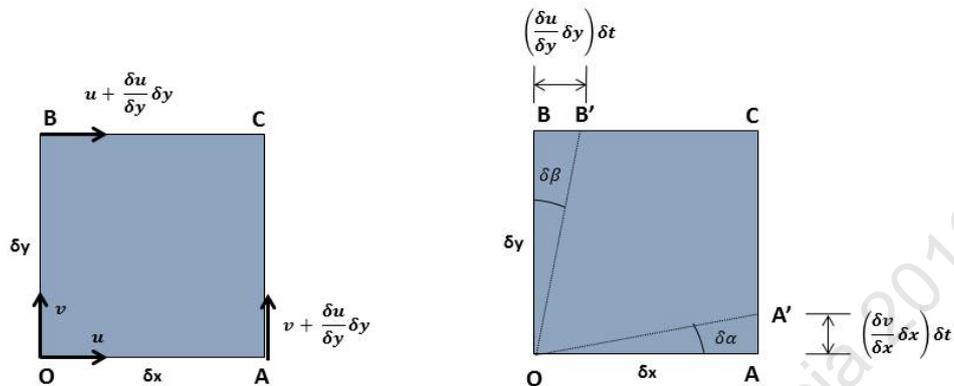


Figura 2.4. Representação esquemática da deformação angular de um elemento fluido.

No caso da deformação acima, o ângulo reto em P_0 se distorce como resultado de dois movimentos; portanto:

$$\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \quad (2.9)$$

Equações análogas poderiam se obtidas no caso de deformações angulares nas três direções, caracterizando-se assim, o tensor simétrico de deformação, que normalmente é representado na literatura em notação tensorial, acrescentando-se o coeficiente $\frac{1}{2}$:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.10)$$

com $\vec{i} \neq \vec{j}$.

2.1.3.3. Tensor Antissimétrico

A deformação do elemento fluido poderia ser por rotação pura sem distorção (com $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$), representada na figura 2.2, o que é caracterizado por um tensor anti-simétrico de deformação.

Neste caso a rotação ocorre como corpo rígido com:

$$\begin{aligned}
d\theta_1 &\cong \tan d\theta_1 = \frac{\frac{\partial U_2}{\partial x_1} dx_1 dt}{dx_1 - \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1 dt} \cong \frac{\partial U_2}{\partial x_1} dt \\
d\theta_2 &\cong \tan d\theta_2 = \frac{-\frac{\partial U_1}{\partial x_2} dx_2 dt}{dx_2 - \frac{\partial U_2}{\partial x_2} dx_2 dt} \cong \frac{-\partial U_1}{\partial x_2} dt \\
d\theta_z &= \frac{d\theta_1 + d\theta_2}{2} \cong \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) dt
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

Equações análogas poderiam se obtidas quando da rotação nas três direções, caracterizando-se assim, o tensor anti-simétrico de deformação, que normalmente é representado na literatura em notação tensorial, acrescentando-se o coeficiente $\frac{1}{2}$:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)
\tag{2.12}$$

Portanto, de acordo com a equação 2.1, o movimento elementar de uma partícula de uma massa fluida é composto pela translação pura descrita pelas componentes de velocidade U_i (ou \vec{V}), pela deformação angular descrita pelo tensor simétrico de deformação (equação 2.10) e pela rotação pura descrita pelo tensor anti-simétrico de deformação (equação 2.12). Na hipótese de escoamentos incompressíveis, a dilatação volumétrica representada pela equação (2.7) é nula.

A teoria elementar do movimento da partícula, exposta acima de maneira simplificada, dá uma idéia da complexidade da descrição do movimento de um elemento fluido sujeito a deformações. Se considerarmos o escoamento turbulento com flutuações de velocidade nas três direções, o grau de complexidade aumenta significativamente.

No capítulo 5 a turbulência é descrita a partir de uma aproximação estatística e, nesse caso, ela pode ser representada pela superposição de dois movimentos: um movimento médio e um movimento flutuante em torno da média. Considerando-se valores de velocidade e pressão medidos instantaneamente em um escoamento turbulento qualquer, tem-se que:

$$\vec{V} = \vec{u}i + \vec{v}j + \vec{w}k
\tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{u} &= U + u \\
 \tilde{v} &= V + v \\
 \tilde{w} &= W + w \\
 \tilde{p} &= P + p
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Em notação tensorial, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_i &= U_i + u_i \\
 \tilde{p} &= P + p
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Além do fato do escoamento turbulento de um elemento fluido poder ser caracterizado pela superposição de translação, rotação e deformação angular, pode-se associar ao tensor anti-simétrico e principalmente ao tensor simétrico, que é responsável pela deformação do escoamento, o campo de velocidades instantâneas e de flutuações de velocidade nas três direções.

Usando a notação acima de Tennekes e Lumley (1987) para escoamento turbulento, pode-se definir a taxa de deformação do escoamento médio e das flutuações, a partir do conceito de tensor simétrico de deformação apresentado anteriormente:

$$\begin{aligned}
 s_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\
 S_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

As equações 2.16 traduzem a taxa de deformação do escoamento médio (associada a geração da turbulência) e a taxa de deformação das flutuações (processo de cascata de turbilhões), cuja quantificação é primordial para o entendimento de um determinado escoamento turbulento. Esse tema será discutido no capítulo 5.

2.2. Fluidos Newtonianos e Não Newtonianos. Considerações Sobre Escalas Moleculares e Escalas de Turbulência

Pela própria definição, sabe-se que fluido não resiste à tensão de cisalhamento e de acordo com a Lei de Newton da viscosidade a tensão aplicada é direta e linearmente

proporcional a deformação. Usando notação tensorial essa lei pode ser representada pela seguinte equação:

$$\tau_{ij} = \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (2.17)$$

Os fluidos que obedecem a esta lei são ditos fluidos newtonianos, que correspondem a grande parte das aplicações de escoamentos na Engenharia.

Usando os postulados de Stokes de 1845 (ver KLEINSTREUER, 1997) fluidos newtonianos são caracterizados pelas seguintes condições:

- a) A tensão de cisalhamento (τ_{ij}) é função linear da deformação angular ($\delta U_i / \delta x_j$);
- b) O fluido é isotrópico;
- c) O tensor simétrico de deformação que caracteriza a tensão total em um ponto da massa fluida, é um tensor simétrico de segunda ordem, dado pela matriz abaixo:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} (-p + \tau_{xx}) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (-p + \tau_{yy}) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (-p + \tau_{zz}) \end{pmatrix}$$

Portanto com nove termos, sendo apenas três diferentes, com \mathbf{p} representando a pressão termodinâmica ou hidrostática.

Para deformações nas três direções, considerando-se fluido incompressível, a equação 2.17 pode ser generalizada abaixo:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.18)$$

Todavia existem importantes situações de escoamento em que a Lei de Newton não é válida e nesses casos os fluidos são ditos não-newtonianos.

Dois casos típicos de escoamentos que podem ter comportamento ora como newtoniano, ora como não newtoniano, são: o escoamento de soluções poliméricas e o escoamento de sangue através do sistema vascular. Nesses casos, além do efeito da viscosidade, a resposta elástica dos fluidos poliméricos ou do sangue pode se tornar importante, em alguns casos, na definição das tensões cisalhantes, e esses fluidos são também chamados de viscoelásticos.

Sob o ponto de vista da estrutura molecular de fluidos com comportamento não newtoniano, teríamos que introduzir uma descrição precisa do comportamento reológico desses fluidos, o que não é o escopo dos exemplos apresentados nesse livro. As soluções poliméricas, por exemplo, são caracterizadas por macromoléculas e poderíamos, sob o ponto de vista do escoamento global, dependendo de sua concentração e de seu peso molecular, tratá-las como newtonianas, podendo-se utilizar a equação de Navier-Stokes na sua forma clássica. O que acontece a estrutura dessas macromoléculas quando sujeitas às tensões de deformação? Algumas ligações são eliminadas ou não? Poderíamos falar em efeito de memória associado à resposta elástica da estrutura molecular? Poderíamos associar, em analogia, escalas de turbulência a essa estrutura molecular de escoamento? São perguntas interessantes que conduzem a uma discussão ainda mais interessante, na tentativa de generalização dos conceitos de turbulência.

Sabemos que alguns líquidos não-newtonianos se comportam como pseudo-plásticos em que ocorre uma diminuição da viscosidade com o aumento da taxa de deformação. É o caso das soluções poliméricas que apresentam longas cadeias entrelaçadas e enoveladas, e que quando em repouso, mantém uma ordem interna irregular sendo caracterizadas por uma considerável resistência interna ao fluxo, devido a alta viscosidade inicial. É o caso também das hemácias (células vermelhas do sangue) suspensas no plasma que podem ter sua forma alterada, reduzindo o diâmetro e alongando-se, o que significa uma passagem mais fácil através dos micro-vasos sanguíneos para uma maior taxa de deformação.

A figura 2.5 apresenta os diagramas reológicos e as curvas de variação de viscosidade de fluidos Newtonianos e Não Newtonianos

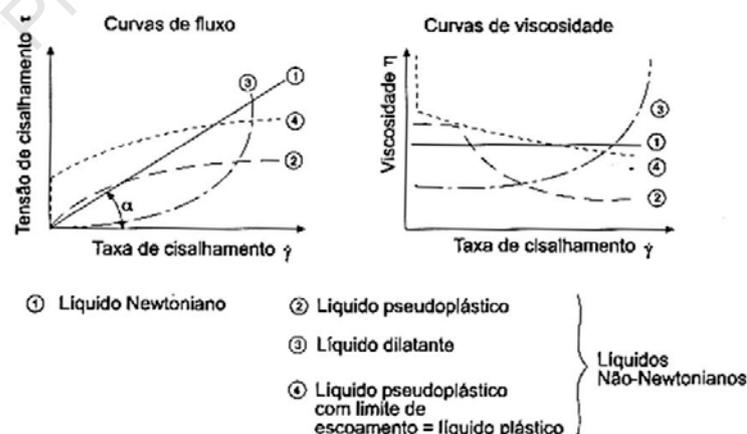


Figura 2.5 Representação esquemática de diagramas reológicos e de curvas de variação de viscosidade para fluidos Newtonianos e Não Newtonianos.

A figura 2.6 dá uma idéia do processo de realinhamento e estiramento molecular para os exemplos apresentados acima.



Figura 2.6 – Ilustração de partículas líquidas em repouso e escoando.

2.3. Equação de Navier Stokes

Considere-se um volume elementar de fluido em movimento com relação a um sistema inercial sujeito a esforços viscosos tangenciais e esforços normais de pressão. Os esforços viscosos podem influenciar a trajetória do sistema fluido, pois qualquer desequilíbrio desses esforços conduz a uma força viscosa líquida atuando no sistema. Na figura 2.7 representa-se um sistema fluido elementar na forma cúbica sujeito à tensões de cisalhamento em suas faces.

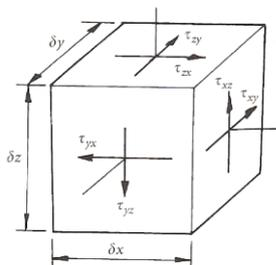


Figura 2.7. Representação esquemática de um elemento de fluido sujeito a esforços de cisalhamento viscoso em suas faces.

A diferença τ_{zx} entre o topo e a base do elemento, por exemplo, produz uma força líquida na direção x de magnitude:

$$f_x = \partial \tau_{zx} dA = \left[\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dz \right] dx dy \quad (2.19)$$

Considerando todas as faces com deformação na direção x, resulta:

$$f_x = \left[\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) d\mathcal{V} \right] \quad (2.20)$$

Expressões similares podem ser obtidas para f_y e f_z e, em notação tensorial, a força viscosa líquida resultante atuando no elemento fluido é dada por:

$$f_i = \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} d\mathcal{V} \quad (2.21)$$

Lembrando da segunda lei de Newton do movimento:

$$\bar{a} d\mathcal{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p d\mathcal{V} + \bar{f}_{viscosa} d\mathcal{V} \quad (2.22)$$

resulta, pela substituição de 2.21 em 2.22 (escrita em notação tensorial):

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad (2.23)$$

A substituição da equação 2.18 na equação 2.23 resulta na equação de Navier-Stokes (em notação vetorial):

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (1.1)$$

Ou em notação tensorial, incluindo o termo de força de campo:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (2.24)$$

A questão crucial nessa equação tão importante para a Mecânica dos Fluidos é que ela contém um termo não-linear (quadrático) em termos da velocidade, o que torna complexo o seu uso particularmente na análise de escoamentos turbulentos.

2.4. Equação da Continuidade

O princípio da conservação da massa aplicado a um sistema fluido elementar em movimento pode ser escrito como:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (2.25)$$

Em coordenadas de Euler a equação 2.25 pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (2.26)$$

A equação acima pode ser simplificada, resultando na equação da continuidade para escoamentos incompressíveis:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.27)$$

ou em notação tensorial:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.28)$$

2.5. Equação da Energia Cinética

A multiplicação da equação de Navier-Stokes pelo vetor velocidade, resulta na equação da energia cinética por unidade de massa:

$$\vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V} \cdot \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\nabla \cdot \frac{p}{\rho} \vec{V} + \nu \vec{V} \cdot (\nabla^2 \vec{V}) \quad (2.29)$$

cuja manipulação matemática (ver Davidson, 2006) conduz à seguinte equação:

$$\frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} \right)}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{u^2}{2} \right) \vec{V} \right] - \nabla \cdot \left[\left(\frac{p}{\rho} \right) \vec{V} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{u_i \tau_{ij}}{\rho} \right] - 2\nu S_{ij} S_{ij} \quad (2.30)$$

2.6. A Dinâmica da Vorticidade

No item 2.1.3.3 enfatizou-se que a rotação de um elemento fluido pode ser traduzida por um tensor antisimétrico (equação 2.12). Em outras palavras, a rotação de

uma partícula fluida pode ser traduzida, em termos vetoriais, como o rotacional do campo de velocidades:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} = \frac{1}{2} \nabla \wedge \vec{V} \quad (2.31)$$

Costuma-se definir a vorticidade, como:

$$\vec{\xi} = 2\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{V} \quad (2.32)$$

traduzindo-se a vorticidade como a rotação de um elemento fluido em torno de si mesmo em um escoamento.

O conceito de vorticidade merece atenção nos escoamentos, em particular nos escoamentos turbulentos, porque, diferentemente do campo de velocidade, que pode ser modificado instantânea e espacialmente, às custas do campo de pressões, o campo de vorticidade não pode ser criado ou destruído no interior da massa fluida, mas apenas transportado através de processos de advecção e difusão. Nesse sentido, a vorticidade é governada por uma equação mais simples que a equação de Navier-Stokes.

O gradiente de velocidades em um elemento fluido implica em sua deformação e rotação, sendo que a combinação das tensões de cisalhamento e da vorticidade, conduzem à seguinte expressão:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.33)$$

Onde o primeiro termo do segundo membro representa a taxa de deformação do elemento fluido (S_{ij}) e o segundo termo representa a taxa de rotação (ω_{ij}). Davidson, 2006 oferece uma discussão sobre o peso de cada termo no processo de geração da turbulência.

A equação da vorticidade pode ser obtida aplicando-se o rotacional à equação de Navier-Stokes (ver Davidson, 2006), obtendo-se assim, a partir de algumas manipulações matemáticas, a forma mais freqüente encontrada na literatura:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.34)$$

cujos termos, tem o seguinte significado físico:

$(\omega \cdot \nabla) \vec{V} \rightarrow$ corresponde à mudança do momento de inércia do elemento fluido devido ao esticamento (*stretching*) ou compressão desse elemento;

$\nu \nabla^2 \vec{\omega} \rightarrow$ corresponde ao momento de resistência viscoso (torque) do elemento.

Em notação tensorial, essa equação pode ser reescrita na forma:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2} \quad (2.35)$$

Por essa equação percebe-se que a vorticidade de um elemento fluido pode ser modificada seja pelo *stretching* do elemento, seja pelas tensões viscosas.

Considerando-se, por exemplo, uma “bolha” de vorticidade (*blob of vorticity*) de acordo com a definição de Davidson (2007) embebida em um escoamento potencial com linhas de corrente convergentes, conforme mostrado na *figura 2.8*, o momento de inércia do elemento (*blob of vorticity*) na direção paralela a $\vec{\omega}$ decrescerá, de acordo com a equação:

$$\vec{H} = \frac{1}{2} I \vec{\omega} \quad (2.35)$$

sendo: $\vec{H} \rightarrow$ quantidade de movimento angular;

$I \rightarrow$ momento de inércia;

de modo a preservar a quantidade de movimento, resultando no fenômeno de esticamento da “bolha” de vorticidade (*vortex stretching*), associado ao termo $(\omega \cdot \nabla) \vec{V}$ da equação acima.

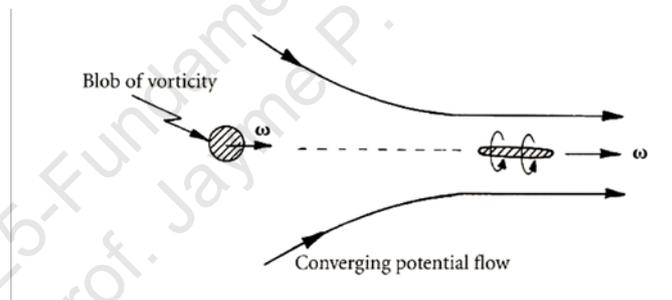


Figura 2.8 Fenômeno de vortex stretching em um tubo convergente a partir de um escoamento potencial. (extraído de DAVIDSON, 2007)

Considere-se agora o caso de um escoamento bidimensional viscoso, onde o fenômeno de *vortex stretching* não tem sentido físico sendo que o termo $(\omega \cdot \nabla) \vec{V}$ desaparece da equação da vorticidade. Sendo assim a equação 2.34 é simplificada:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.36)$$

com a vorticidade modificando-se apenas em função do momento resistente viscoso.

Essa equação é análoga a equação da difusão-advecção de temperatura, ou seja, a vorticidade em um escoamento bidimensional se espalha por difusão e se move de um lugar para um outro lugar por advecção, conservando todavia o total da vorticidade. As “bolhas” de vorticidade, por outro lado, são oriundas das separações de camadas limites em fronteiras. Ou seja, as fronteiras são fontes de vorticidade (*blob of vorticity*).

Portanto o processo de evolução espaço-temporal de “bolhas” de vorticidade, formando tubos de vórtices, está associado a um processo de difusão e de deformação desses vórtices levando ao quadro da *figura 2.9*, e quanto maior for o número de Reynolds, mais esse quadro se assemelha ao que entendemos por turbulência, conforme já mostrado na figura de Da Vinci (*figura 1.3*).

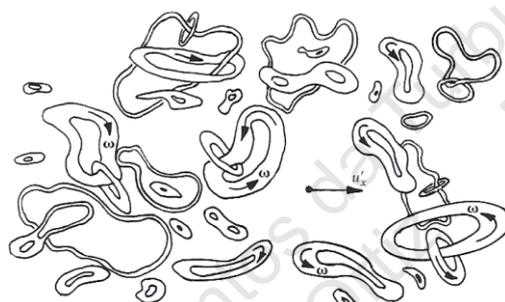


Figura 2.9 Uma visão da turbulência a partir do entrelaçamento dos turbilhões (eddies).

Pode-se assim fazer uma primeira definição de turbulência de acordo com Corrsin (apud DAVIDSON, 2007): “A turbulência em um escoamento incompressível corresponde a uma distribuição espacialmente complexa de vorticidade que é adveccionada aleatoriamente, de acordo com a equação 2.34 ou 2.35. O campo de vorticidade é aleatório no espaço e no tempo, e exibe uma ampla faixa de distribuição contínua de escalas de comprimento e tempo”. Essas escalas de turbulência estão associadas ao que se denomina na literatura por turbilhões ou *eddies*.