Instituto de Física
USP

Física V - Aula 20

Professora: Mazé Bechara

AVISOS

1. **Já se encontra na página da disciplina o TEC 3 para ser entregue até 15/10/2013.**

2. **Também na página da disciplina a preleção de Niels Bohr sobre a física do átomo, ao receber o prêmio Nobel de Física em dezembro de 1922.**

Aula 20 – O experimento de Rutherford e a proposta de átomo nucleado

1. **O conceito e uma expressão da *seção de choque diferencial*** *para qualquer interação.*
2. **Determinação da seção de choque diferencial para o espalhamento elástico por interação repulsiva coulombiana ou a seção de choque de Rutherford.**
3. **A comparação com os resultados experimentais.**
4. **Aplicação**

Uma partícula alfa, incidindo com parâmetro de impacto b e sendo espalhada elasticamente no ângulo de espalhamento θ por um "alvo" em O

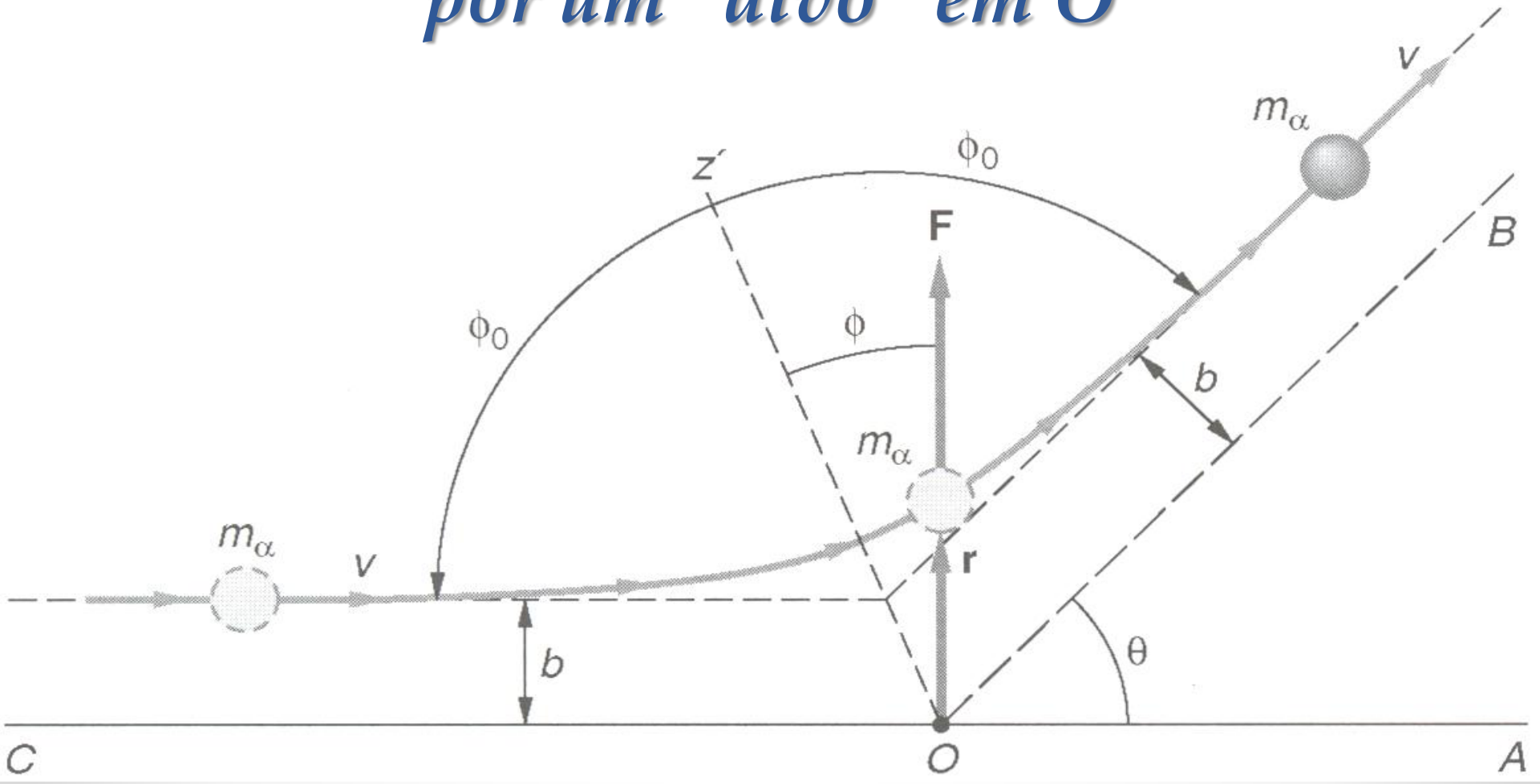


Figura do Tipler & Llewellyn

O número de partículas espalhadas no ângulo de espalhamento θ (dentro de dθ) por 1 alvo

5. As partículas que entram entre b e b+db, estão na área 2πbdb. Assim, o número de espalhadas no ângulo entre θ e θ+dθ é dado pela relação:

$$\frac{dN_{inc}(b)}{dt} = \frac{dN^{1Alvo}(\theta)}{dt} = I_o 2\pi b db$$

6. Por N alvos:

$$\frac{dN^{NAlvos}(\theta)}{dt} = N\frac{dN^{1Alvo}(\theta)}{dt}$$

se a folha for fina e homogênea .

Questão: Como saber o efeito da interação entre as partículas do feixe e os constituintes da folha que causou o espalhamento - independente das condições específicas do feixe, da folha de "alvos" e do detector?!

Resposta: Definindo a seção de choque diferencial para o espalhamento elástico.

Seção de choque diferencial

- **Definição:** número de partículas de energia E espalhadas elasticamente no ângulo de espalhamento θ (entre θ e θ + dθ) por um único núcleo espalhador ($dn^{1Alvo} = dN^{1N}$), por fluxo de partículas incidentes I_o, na unidade de tempo dt e por ângulo sólido dΩ:

$$\frac{d\sigma(\theta,\text{int},\ E)}{d\Omega} \equiv \sigma(\theta,\text{int},\ E) = \frac{dN^{1N}(\theta,\text{int},\ E)}{dtI_o d\Omega}$$

$$\frac{dN^{1N}(\theta)}{dt} = I_o 2\pi b db$$

- dΩ é o ângulo sólido total no ângulo de espalhamento θ:

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = 2\pi sen\,\theta d\theta$$

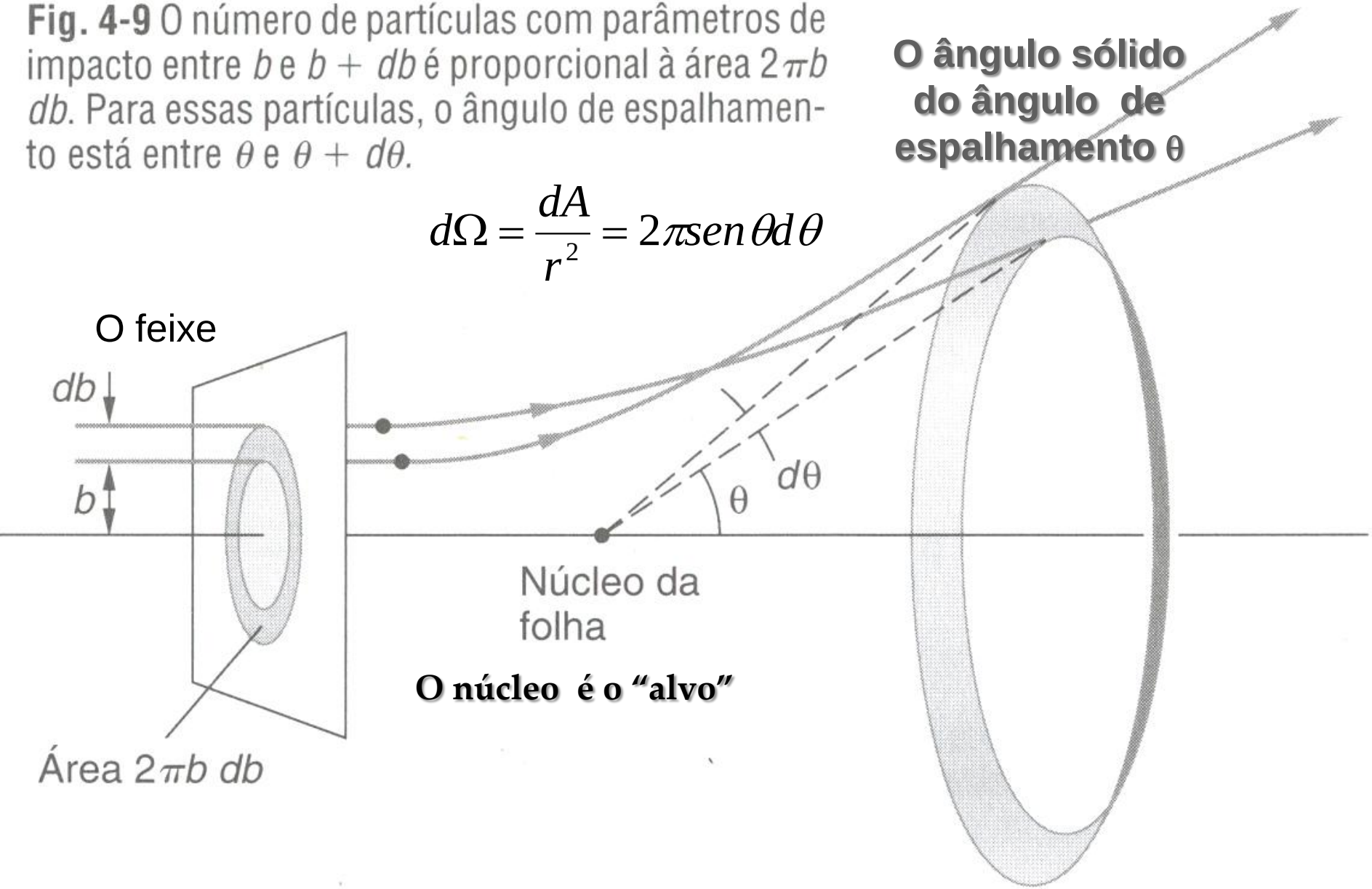
Análise dimensinal e o nome de "seçãop de choque diferencial:

$$\left[\frac{d\sigma(\theta,\text{int},\ E)}{d\Omega}\right] = \left[\frac{dN^{1N}(\theta,\text{int},\ E)}{dtI_o d\Omega}\right] = [\frac{1}{T\frac{1}{L^2T}}] = [L^2]$$

Fig. 4-9 O número de partículas com parâmetros de impacto entre b e $b + db$ é proporcional à área $2\pi b\, db$. Para essas partículas, o ângulo de espalhamento está entre θ e $\theta + d\theta$.

O ângulo sólido do ângulo de espalhamento θ

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = 2\pi sen\,\theta d\theta$$



O núcleo é o "alvo"

A seção de choque diferencial para espalhamento elástico com qualquer interação

$$\frac{d\sigma(\theta,\text{int},E)}{d\Omega}=\frac{dN^{1N}(\theta,\text{int},E)}{dtI_o d\Omega}=\frac{I_0 2\pi b db}{I_0 2\pi sen\theta d\theta}=$$

$$=\frac{bdb}{sen\theta d\theta}=\frac{b}{sen\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

- O módulo de db/dθ indica o fato da secção de choque ser grandeza positiva (número de partículas por unidade de tempol por fluxo incidente e por ângulo sólido), e db pode ter sinal oposto ao dθ (quando db cresce enquanto dθ decresce).

- Observe que a dinâmica da interação vai definir a relação entre o parâmetro de impacto (que não se consegue observar) e o ângulo de espalhamento que se observa ao ser
- colocaado um detector.

A seção de choque diferencial para espalhamento elástico com qualquer interação

$$\frac{d\sigma(\theta, \text{int}, E)}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{sen\theta}\left|\frac{db(\theta)}{d\theta}\right|$$

- **No cálculo da dinâmica é preciso supor uma interação, e se resolver as equações de movimento no contexto da mecânica clássica.**
- **No cálculo se chega no parâmetro de impacto em função do ângulo de espalhamento.**

Resultados da mecânica clássica para a interação coulombiana repulsiva: a seção de choque de Rutherford (Ref. Classical Dynamics – Marion)

A **energia potencial de interação coulombiana repulsiva** é dada por:

$$U(r) = +\frac{Z_1 e Z_2 e}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

É possível mostrar na teoria newtoniana (veja Marion, Classical Mechanics) que:

a) **Para b=0 é uma linha reta. Corresponde ao momento angular nulo.**

b) **A trajetória do movimento relativo é uma hipérbole para b≠0 com foco no núcleo espalhador. Trajetórias e b que correspondem a momentos angulares diferentes de zero.**

c) A relação entre o parâmetro de impacto b e o ângulo de espalhamento θ para esta interação é dada por:

$$b(\theta) = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2E_{inc}}\right)\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{sen\frac{\theta}{2}}$$

Resultados da mecânica clássica para a interação coulombiana repulsiva: a seção de choque de Rutherford

Assim:

$$\frac{db}{d\theta}=\frac{1}{2}\frac{db}{d(\frac{\theta}{2})}=\frac{1}{2}(\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2E_{inc}})\frac{(-sen^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2})}{sen^2\frac{\theta}{2}}$$

E então a seção de choque diferencial para o espalhamento elástico por interação coulombiana repulsiva, chamado de espalhamento de Rutherford tem a seguinte expressão:

$$\frac{d\sigma_{Ruth}(\theta,E)}{d\Omega}=\frac{1}{sen\theta}\left(\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_o 2E_{inc}}\right)^2\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{sen^3\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{16}\left(\frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\varepsilon_0 E_{inc}}\right)^2\frac{1}{sen^4\frac{\theta}{2}}$$

Foi usada a relação trigonométrica:

$$sen\theta=2sen\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

A seção de choque de Rutherford

A **seção de choque de Rutherford** é o resultado para **o espalhamento elástico por interação coulombiana repulsiva.**

$$\frac{d\sigma_{Ruth}(\theta,E)}{d\Omega} = \frac{1}{16}\left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 E_{inc}}\right)^2 \frac{1}{sen^4\frac{\theta}{2}}$$

O resultado do cálculo da Mecânica Quântica coincide com o resultado da Mecânica Clássica.

O feixe incidindo na fina folha é espalhado por N_N núcleos

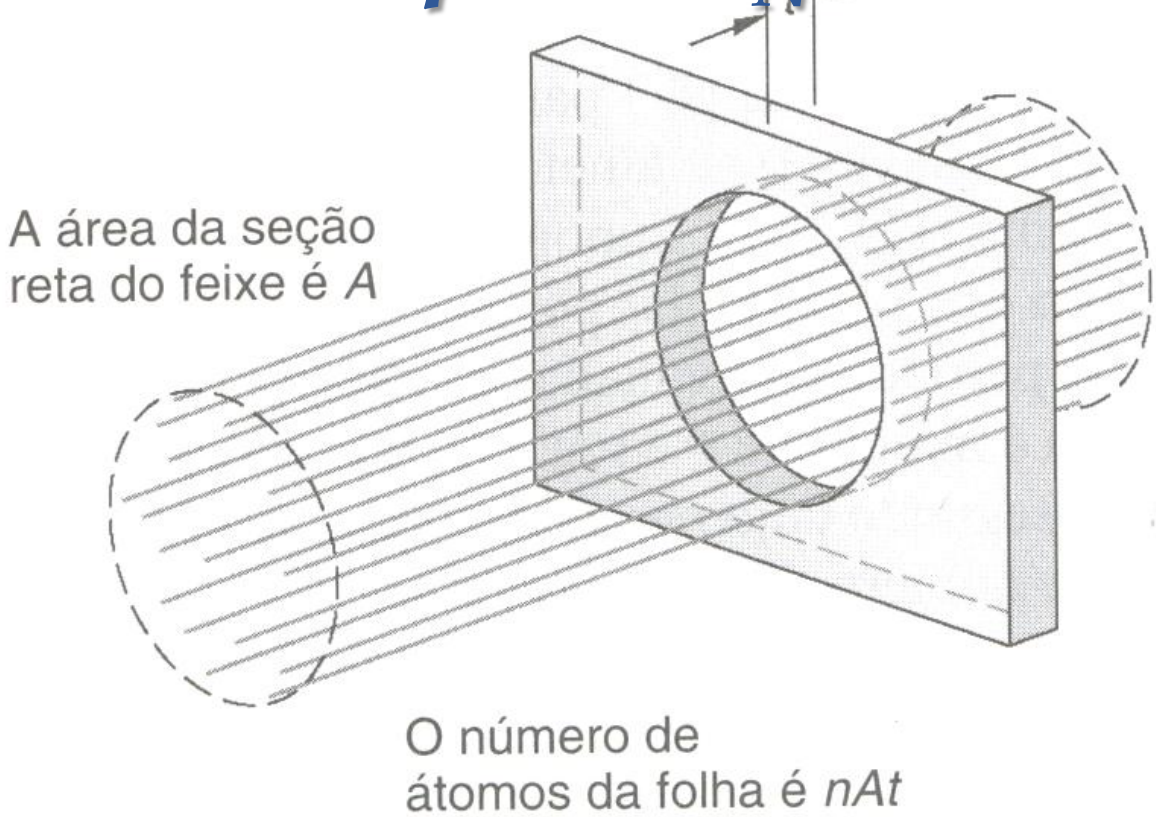


Fig. 4-8 O número total de núcleos de átomos da folha metálica na área coberta pelo feixe é *nAt*, onde *n* é o número de átomos da folha por unidade de volume, *A* é a área da seção reta do feixe e *t* é a espessura da folha.

Figura do Tipler & Llewellyn

A Secção de choque diferencial e o número de partículas do detector

- **Nas condições explicitadas, o número de partículas espalhadas por N_N núcleos :**

$$\frac{dN^N(\theta,\text{int})}{dtI_o d\Omega} = N_N \frac{d\sigma(\theta,\text{int})}{d\Omega}$$

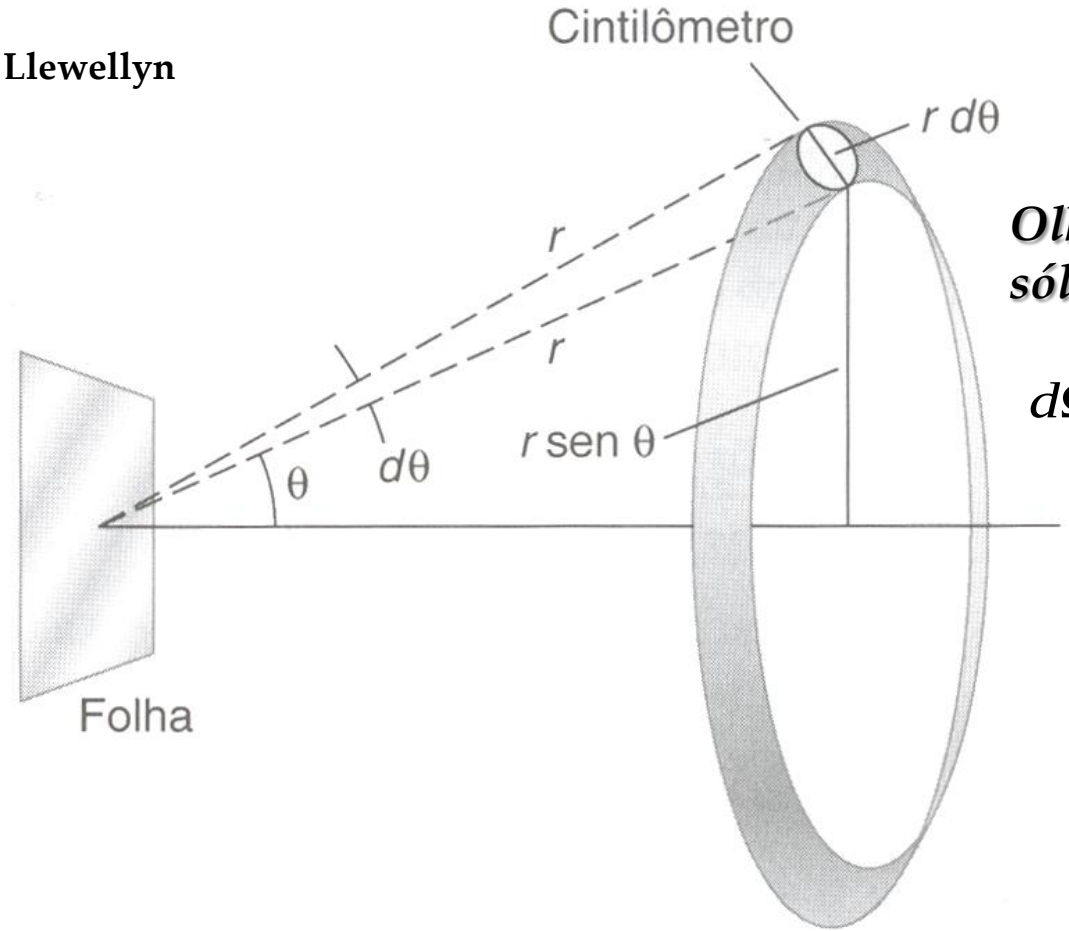
- **I_o é o fluxo de partículas de um feixe:**

$$I_0 = \frac{dN_{inc}}{dA_{feixe}dt} = \frac{i}{Z_{feixe}edA_{feixe}}$$

- **$d\Omega$ é o ângulo sólido** no qual entraram as partículas detetadas. Para o **detetor que dista $d_{alvo\text{-}det}$** do alvo e tem área dA_{det}:

$$d\Omega_{\text{det}} = \frac{dA_{\text{det}}}{d^2_{alvo-\text{det}}}$$

Figura do Tipler & Llewellyn



Olhe aí o ângulo sólido da medida

$$d\Omega_{\det} = \frac{dA_{\det}}{d^2_{alvo-\det.}}$$

Fig. 4-10 As partículas cujos ângulos de espalhamento estão entre θ e $\theta + d\theta$ passam por uma zona esférica de raio r com centro no átomo responsável pelo espalhamento. A área desta zona é $A_z = (2\pi r \text{ sen } \theta)(r\, d\theta)$. O cintilômetro está situado a uma distância r da folha e ocupa uma fração f_{ci} desta área igual à relação (área do cintilômetro)/(área da superfície) $= A_{ci}/A_{sup} = f_{ci}$ e portanto detecta um número de partículas $\Delta N_1 = (N/A_{sup})(A_{ci}) = N_{ci} f_{ci}$ devido ao espalhamento de um único núcleo.

Juntando os valores para cálculo de partículas espalhadas em dada condição experimental

- *O número de núcleos da folha que interagem com o feixe, a partir da densidade do material e da espessura da folha:*

$$N_N = \rho_{alvo} \frac{dA_{feixe} \Delta x_{alvo} N_o}{M_{alvo}}$$

- **número de partículas que entra no detector segundo a previsão do espalhamento de Rutherford em uma dada situação experimental:**

$$\frac{dN_{esp}^{Ruth}(\theta)}{dt} = \{\frac{d\sigma_{Ruth}}{d\Omega}\}[N_N I_o](\frac{dA_{\det}}{d^2}) =$$

$$\{\frac{1}{16}[\frac{Z_{feixe} e Z_N e}{4\pi\varepsilon_o E_{inc}}]^2 \frac{1}{sen^4 \frac{\theta}{2}}\}[\rho_{alvo} \frac{\Delta x_{alvo} N_o}{M_{alvo}} \frac{dN_{inc}}{dt}](\frac{dA_{\det}}{d^2})$$

Juntando os valores para cálculo de partículas espalhadas em dada condição experimental

O número de partículas que entra no detector segundo a previsão do espalhamento de Rutherford em uma dada situação experimental:

$$\frac{dN_{esp}^{Ruth}(\theta)}{dt} = \{\frac{d\sigma_{Ruth}}{d\Omega}\}[N_N I_o](\frac{dA_{\det}}{d^2}) =$$

$$\{\frac{1}{16}\left[\frac{Z_{feixe}eZ_N e}{4\pi\varepsilon_o E_{inc}}\right]^2 \frac{1}{sen^4\frac{\theta}{2}}\}[\rho_{alvo}\frac{\Delta x_{alvo}N_o}{M_{alvo}}\frac{dN_{inc}}{dt}](\frac{dA_{\det}}{d^2}) =$$

$$= \{\frac{1}{16}\left[\frac{Z_{feixe}eZ_N e}{4\pi\varepsilon_o E_{inc}}\right]^2 \frac{1}{sen^4\frac{\theta}{2}}\}[\rho_{alvo}\frac{\Delta x_{alvo}N_o}{M_{alvo}}\frac{i}{Z_{feixe}e}](\frac{dA_{\det}}{d^2})$$

Compare com os resultados experimentais!

A secção de choque experimental

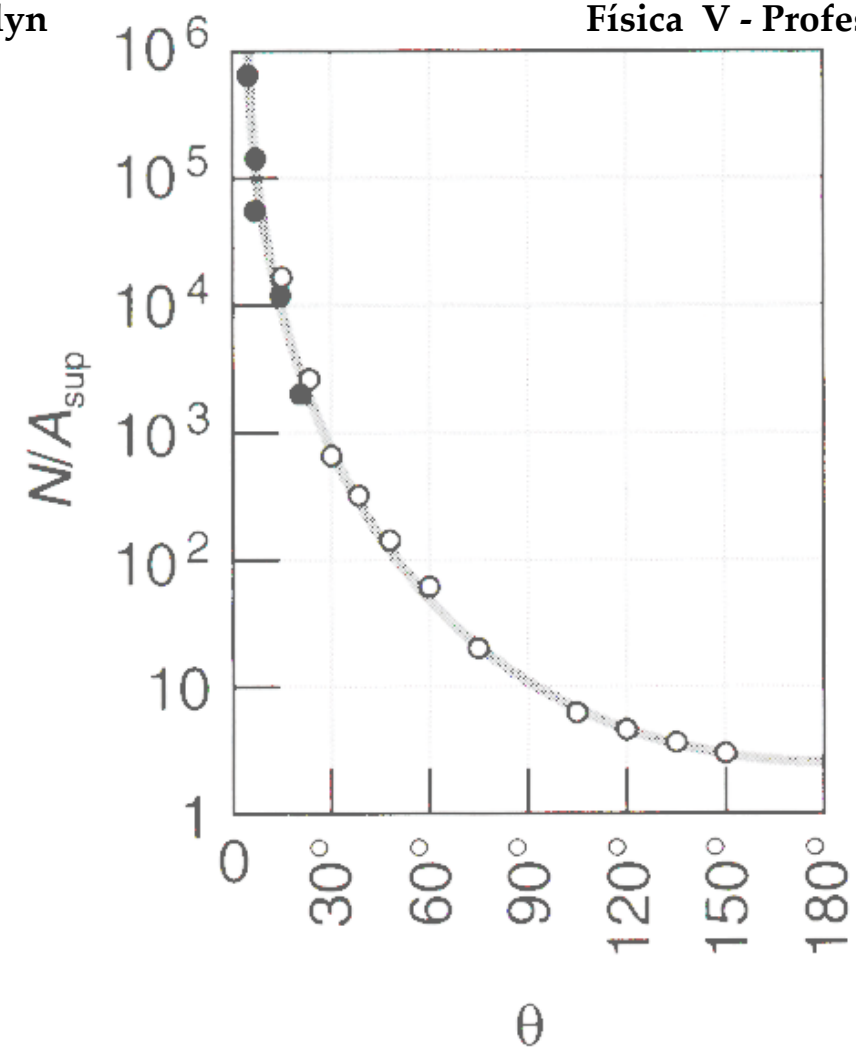
Outra alternativa equivalente é determinar a seção de choque experimental, a partir do número ede partículas espalhadas e das condições experimentais para feixe e detetor:

$$\frac{d\sigma_{\exp}}{d\Omega} = \frac{\frac{dN_{\exp}(\theta)}{dt}}{[N_N I_o]d\Omega_{\exp}} = \frac{\frac{dN_{\exp}(\theta)}{dt}}{[\frac{\rho_{alvo} dA_{feixe} \Delta x_{alvo} N_o}{M_{alvo}} \times \frac{i}{Z_{feixe} e dA_{feixe}}](\frac{dA_{\det}}{d^2})} =$$

$$= \frac{\frac{dN_{\exp}(\theta)}{dt} M_{alvo} Z_{feixe} e d^2}{\rho_{alvo} dA_{feixe} \Delta x_{alvo} N_o i dA_{\det}}$$

Foram usadas as expressões anteriormente discutidas:

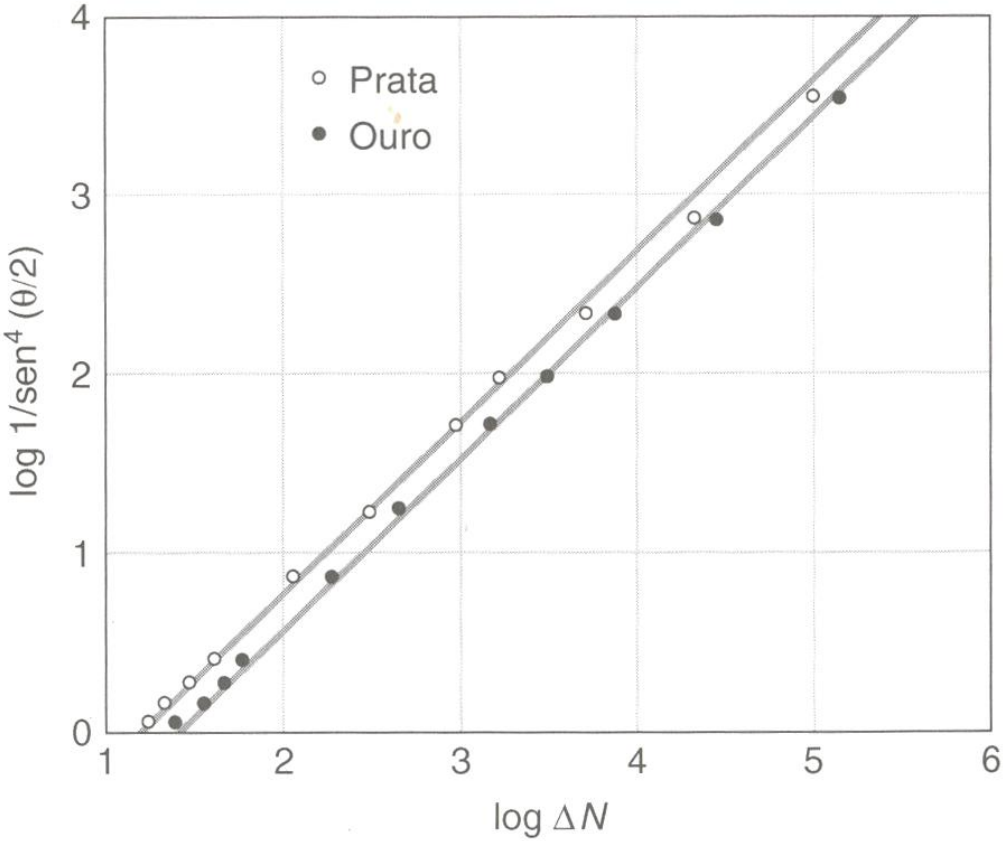
$$d\Omega_{\exp} = \frac{dA_{\det}}{d^2} \qquad N_N = \frac{\rho_{alvo} dA_{feixe} \Delta x_{alvo} N_o}{M_{alvo}} \qquad I_o = \frac{i}{Z_{feixe} e dA_{feixe}}$$



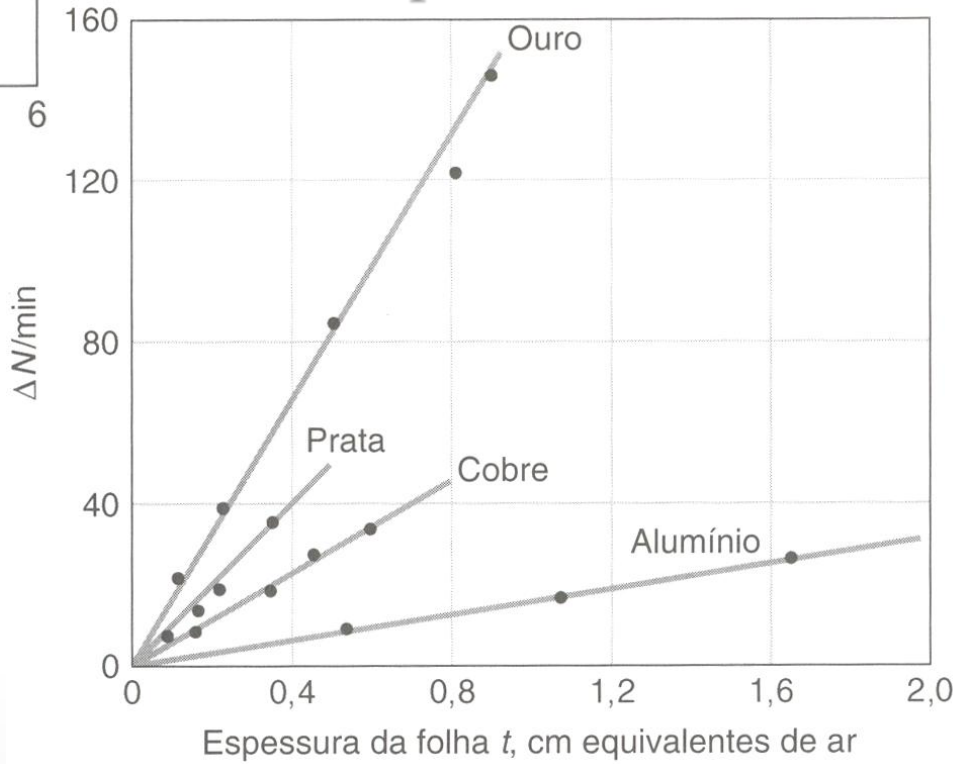
RESULTADOS DOS EXPERIMENTOS PIONEIROS.

Os pontos, cheios e vazios, são resultados experimentais para folhas finas de dois elementos diferentes.

Fig. 4-11 Número de partículas α espalhadas por unidade de área em função do ângulo de espalhamento θ. A curva é proporcional à função $\text{sen}^{-4}(\theta/2)$; os pontos experimentais foram obtidos por Geiger e Marsden usando partículas α de 7,7 MeV. [*Fonte: R. D. Evans*, The Atomic Nucleus, *McGraw-Hill, New York, 1955.*]



Abaixo: contagem por minuto versus a espessura da folha



Acima: Em escala log: contagem (em algum intervalo de tempo) versus o inverso de sen^4(θ/2) - equivalente ao gráfico anterior

Os pontos são experimentais e as retas as previsões do espalhamento de Rutherford.

Figura do Tipler & Llewellyn

Aplicação de Rutherford

Um feixe de partículas alfa com 1 nA e energia cinética de 6,0 MeV incide perpendicularmente sobre uma fina folha de prata (M=108, Z=47, ρ_{Ag}=10,5g/cm^3) de 1 μm de espessura. Um detetor de partículas alfa com 5mm^2 de área é colocado a 2cm de distância do centro da folha.

(a) Determine a seção de choque diferencial de Rutherford deste espalhamento a 180°. E a **partir do resultado de 180° determine a seção de choque a 90°.**

(b) Supondo que este espalhamento segue o resultado teórico de Rutherford, determine o número de partículas que entra no detector por segundo quando o detetor está colocado a 180° e a 90^0 da direção incidente.

Aplicação de Rutherford

respostas

Um feixe de partículas alfa com 1nA e energia cinética de 6,0 MeV incide perpendicularmente sobre uma fina folha de prata (M=108, Z=47, ρ_{Ag}=10,5g/cm^3) de 1μm de espessura. Um detector de partículas alfa com 5mm^2 de área é colocado a 2 cm de distância do centro da folha.

(a) Determine a seção de choque diferencial de Rutherford deste espalhamento a 180º . E a partir do resultado de 180º determine a seção de choque a 90º . **Respostas: 0,32×10^{-28} m^2=0,32 barn e 1,27×10^{-28} m^2 = 1,27 b.**

(b) Supondo que este espalhamento segue o resultado teórico de Rutherford, determine o número de partículas que devem entrar no detector por segundo quando o detector está colocado a 180º e a 90^0 da direção incidente. **Respostas: 72,3 e 289part./segundo**