

Métodos Empíricos de Pesquisa I

- ▶ Esperança Matemática
- ▶ Exercícios

Aula de hoje

▶ Tópicos

- ▶ Definição de Esperança Matemática
- ▶ Propriedades da Esperança
- ▶ Exercícios

▶ Referências

- ▶ Barrow, M. Estatística para economia, contabilidade e administração. São Paulo: Ática, 2007, Cap. 3
- ▶ Morettin, P. e W. Bussab. Estatística básica. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005. Cap. 6-7

Esperança Matemática

- ▶ Definição 1: Dada a variável aleatória X discreta, com função de probabilidade $P(X=x)$, a esperança matemática de X é dada por:

$$E(X) = \sum_{\text{todos } x} xP(X = x)$$

Esperança Matemática

- ▶ Definição II: Dada a variável aleatória X discreta, com função de probabilidade $P(X=x)$, a variância de X é dada por:

$$Var(X) = \sum_{\text{todos } x} (x - E(X))^2 P(X = x)$$

Esperança Matemática

- ▶ Definição III: Dada a variável aleatória X discreta, com função de probabilidade $P(X=x)$, a esperança matemática da função $h(X)$ é dada por:

$$E(h(X)) = \sum_{\text{todos } x} h(x)P(X = x)$$

Esperança Matemática

► Algumas propriedades da Esperança:

1. Se $h(X) = aX$, onde a é uma constante qualquer então: $E(X) = aE(X)$

$$\text{Dem : } E(aX) = \sum_{\text{todos } x} axP(X = x)$$

$$= a \sum_{\text{todos } x} xP(X = x)$$

$$= aE(X)$$

Esperança Matemática

► Algumas propriedades da Esperança:

2. Se $h(X) = X + b$, onde b é uma constante qualquer
então: $E(h(X)) = E(X) + b$

$$\text{Dem : } E(X + b) = \sum_{\text{todos } x} (x + b)P(X = x)$$

$$= \sum_{\text{todos } x} xP(X = x) + b \sum_{\text{todos } x} P(X = x)$$

$$= E(X) + b$$

Esperança Matemática

- ▶ Algumas propriedades da Esperança:
- 3. Se $h(X) = aX$, onde a é uma constante qualquer
então: $\text{Var}(h(X)) = a^2 \text{Var}(X)$
- 4. Se $h(X) = X + b$, onde b é uma constante qualquer
então: $\text{Var}(h(X)) = \text{Var}(X)$

Exercício 1

- ▶ Suponha que o tempo necessário para atendimento de clientes em uma central de atendimento telefônico siga uma distribuição normal de média de 8 minutos e desvio padrão de 2 minutos.

- a) Qual é a probabilidade de que um atendimento dure menos de 5 minutos?
- b) E mais do que 9,5 minutos?
- c) E entre 7 e 10 minutos?
- d) 75% das chamadas telefônicas requerem pelo menos quanto tempo de atendimento?

Exercício 1

- ▶ Sendo
- ▶ X : tempo necessário para atendimento de clientes em uma central de atendimento telefônico
- ▶ $X \sim N(8, 2^2)$
- ▶ *a) Qual é a probabilidade de que um atendimento dure menos de 5 minutos?*
- ▶ $Z = (X - 8) / 2$

$$P(X < 5) = P\left(Z < \frac{5 - 8}{2}\right) = P(Z < -1,5) = P(Z > 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) =$$
$$= 1 - 0,9332 = 0,0668$$

Portanto, a probabilidade de que um atendimento dure menos de 5 minutos é 6,68%.

NORMAL DISTRIBUTION TABLE

Entries represent the area under the standardized normal distribution from $-\infty$ to z , $\Pr(Z < z)$

The value of z to the first decimal is given in the left column. The second decimal place is given in the top row.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Values of z for selected values of $\Pr(Z < z)$							
z	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
$\Pr(Z < z)$	0.800	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995

Exercício 1

- ▶ *b) E mais do que 9,5 minutos?*

$$P(X > 9,5) = P\left(Z > \frac{9,5 - 8}{2}\right) = P(Z > 0,75) = 1 - P(Z \leq 0,75) = 1 - 0,7734 = 0,2266$$

Portanto, a probabilidade de que um atendimento dure mais do que 9,5 minutos é 22,66%.

- ▶ *c) E entre 7 e 10 minutos?*

$$\begin{aligned} P(7 < X < 10) &= P\left(\frac{7 - 8}{2} < Z < \frac{10 - 8}{2}\right) = P(-0,5 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -0,5) = \\ &= P(Z < 1) - P(Z > 0,5) = P(Z < 1) - [1 - P(Z \leq 0,5)] = 0,8413 - (1 - 0,6915) = 0,5328 \end{aligned}$$

- ▶ Portanto, a probabilidade de que um atendimento dure entre 7 e 10 minutos é 53,28%.

Exercício 1

- ▶ d) 75% das chamadas telefônicas requerem pelo menos quanto tempo de atendimento?

- ▶
$$P(X > x) = 0,75 \Rightarrow P\left(Z > \frac{x-8}{2}\right) = 0,75$$

- ▶ x é tal que
$$\Phi\left(-\frac{(x-8)}{2}\right) = 0,75$$

- ▶ Então,

$$-\frac{x-8}{2} = 0,67 \Rightarrow x = 8 - 0,67 * 2 \cong 6,7$$

- ▶ Portanto, 75% das chamadas telefônicas requerem pelo menos 6,7 minutos de atendimento.

Exercício 2

- ▶ Uma empresa produz televisores de 2 tipos, tipo A (comum) e tipo B (luxo), e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar defeito grave no prazo de seis meses. O tempo para ocorrência de algum defeito grave nos televisores tem distribuição normal sendo que, no tipo A, com média de 10 meses e desvio padrão de 2 meses e no tipo B, com média de 11 meses e desvio padrão de 3 meses. Os televisores de tipo A e B são produzidos com lucro de 1200 u.m. e 2100 u.m. respectivamente e, caso haja restituição, com prejuízo de 2500 u.m. e 7000 u.m. Respectivamente.
- a) Calcule as probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo A e do tipo B.
- b) Calcule o lucro médio para os televisores do tipo A e para os televisores do tipo B.
- c) Baseando-se nos lucros médios, a empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo A ou do tipo B?

Exercício 2

- ▶ ***b) Calcule o lucro médio para os televisores do tipo A e para os televisores do tipo B***
- ▶ $P(\text{não restituição de A}) = 1 - P(\text{restituição de A}) = 1 - 0,0228 = 0,9772$
- ▶ $P(\text{não restituição de B}) = 1 - P(\text{restituição de B}) = 1 - 0,0475 = 0,9525$
- ▶ $\text{Lucro médio de A} = 1200 \times 0,9772 - 2500 \times 0,0228 = 1115,64 \text{ u.m.}$
- ▶ $\text{Lucro médio de B} = 2100 \times 0,9525 - 7000 \times 0,0475 = 1667,75 \text{ u.m.}$

Exercício 2

- ▶ **c)** *Baseando-se nos lucros médios, a empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo A ou do tipo B?*
- ▶
- ▶ A empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo B, pois o lucro médio de B é maior que o lucro médio de A.