Métodos Empíricos de Pesquisa I

- Distribuição e Densidade de Probabilidade

Aula de hoje

- Tópicos
  - Distribuição de probabilidades
  - Variáveis aleatórias
    - Variáveis discretas
    - Variáveis contínuas
  - Distribuição binomial
  - Distribuição normal
- Referências

  - Barrow, M. Estatística para economia, contabilidade e administração. São Paulo: Ática, 2007, Cap. 3
  - Morettin, P. e W. Bussab. Estatística básica. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005. Cap. 6-7

Introdução

- A teoria da probabilidade é a base da inferência estatística.
- Isso porque se pode buscar conclusões a partir de uma amostra de dados obtidos ao acaso.
- Por exemplo, já vimos como se calcula as frequências relativas de certos eventos de interesse em uma amostra
- As frequências relativas são as estimativas de probabilidade de ocorrência de certos eventos de interesse.

Introdução

- Modelos probabilísticos são modelos teóricos que nos descrevem a distribuição de frequências de um fenômeno
- Exemplo de um modelo probabilístico para lançamento de um dado:

Face	1	2	3	4	5	6
Frequência Teórica	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

- Modelos Probabilísticos são descritos através de:
  - Um Espaço Amostral
  - Uma probalidade para cada ponto amostral

Distribuição de probabilidades

- Algumas propriedades:
- A probabilidade de qualquer evento é maior ou igual a zero e menor ou igual a um.
- A probabilidade de todo o espaço amostral é igual a um.
- A probabilidade do conjunto vazio é igual a zero.

Distribuição conjunta das frequências

- Usando exemplo apresentado em Bussab-Morettin, p.71
- Variáveis grau de instrução (Y) e região de procedência (V)

V \ Y	Ensino Fundamental	Ensino Médio	Superior	Total
Capital	4	5	2	11
Interior	3	7	2	12
Outro	5	6	2	13
Total	12	18	6	36

Distribuição de probabilidades

- Por definição, a intersecção de dois eventos A e B ocorre quando os dois eventos ocorrem simultaneamente.
  - Em nosso exemplo, qual é a probabilidade de um funcionário da empresa ter completado apenas ensino fundamental e ser da capital?

- Já na reunião de dois eventos A e B, temos que pelo menos um dos eventos deve ocorrer
  - Em nosso exemplo, qual é a probabilidade de um funcionário da empresa ter completado apenas ensino fundamental ou ser da capital?

Distribuição de probabilidades

- Um evento B é complementar ao evento A se ele compreender todos os pontos amostrais do espaço amostral que não pertençam ao evento A.

Variáveis aleatórias

- É uma variável cujo resultado ou valor decorre de um experimento ou fenômeno que envolva um elemento casual.
- São, por exemplo: soma de dois dados, cotação do dólar, precipitação diária de chuva em uma cidade, limite de resistência de uma peça
- Podem ser
  - discretas
  - contínuas
- Notação
  - variáveis aleatórias: X, Y, ... (letras maiúsculas)
  - valores possíveis das variáveis aleatórias: x, y, ... (minúsculas)

Variáveis aleatórias discretas

- A função que atribui a probabilidade a cada valor possível de uma variável aleatória discreta é denominada função de probabilidade

  $f(x) = P(X = x)$

- Exemplo
  - Dado honesto: $f(x) = 1/6$, para $x=1, 2, 3, 4, 5$ ou 6

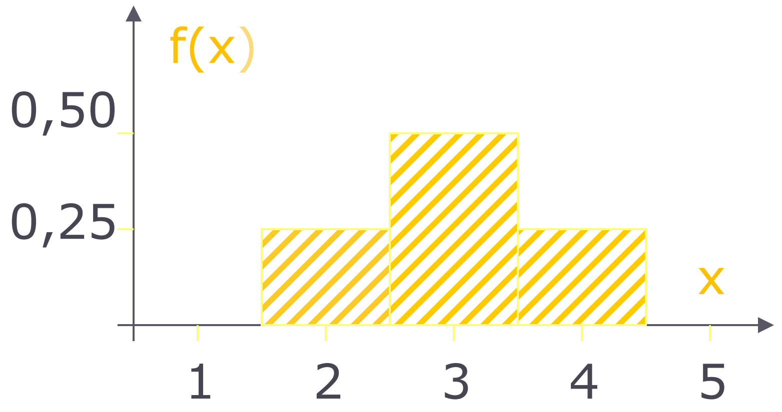
- Propriedades

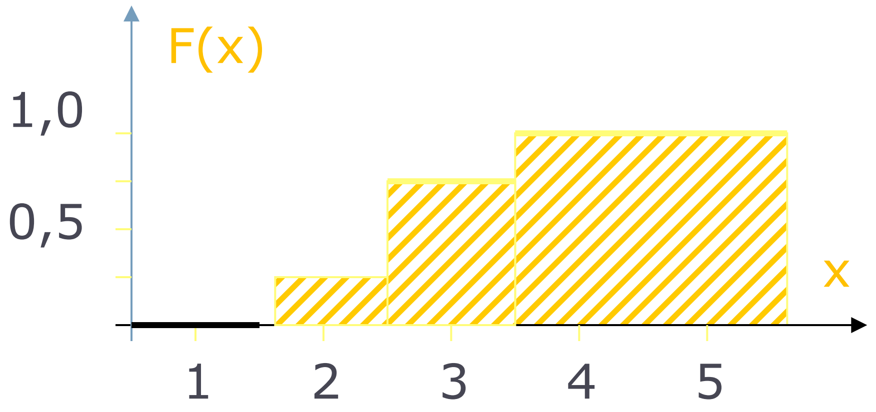
$$f(x) \geq 0 \qquad\qquad \sum_{todos\ X} f(x) = 1$$

Função distribuição (acumulada)

- A função distribuição acumulada de uma variável aleatória X associa a cada valor possível de X a probabilidade de ocorrência de um valor menor ou igual a x. Denota-se F(x)

$$F(x) = P(X \leq x)$$





Média e variância de uma distribuição calculada pela distribuição de probabilidades

Média

$$\mu = \sum_{todos\ x} x.f(x) = E(x)$$

Variância

$$\sigma^2 = \sum_{todos\ x} (x-\mu)^2.f(x)$$

Variáveis aleatórias contínuas

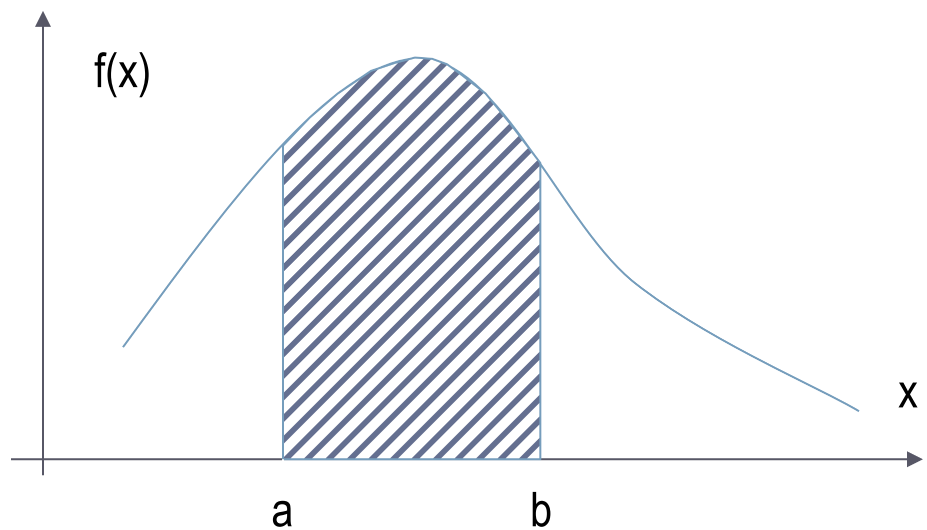
- Assume valores em intervalo de números reais
- Não é possível listar todos os possíveis valores de uma VA contínua
- Associa-se probabilidades a intervalos de valores da VA contínua
- Uma VA X contínua é caracterizada por sua função densidade de probabilidade f(x) com as propriedades

(i) A área sob a curva de densidade é 1

(ii) $P(a \leq X \leq b)$ = área sob a curva da densidade f(x) e acima do eixo x, entre os pontos a e b

Variáveis aleatórias contínuas

- f(x) = função densidade de probabilidade



$$P(X = x) = 0$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Função de densidade de probabilidade

- Relembrando: Em uma variável aleatória contínua o conjunto dos possíveis valores pode ser um intervalo ou um conjunto de intervalos.
- Seja X uma variável aleatória continua. A função de densidade de probabilidade f(x) é uma função que satisfaz as seguintes condições:
  1. $f(x) > 0$ para todo $x \in R_x$

$$\int_{R_x} f(x) = 1$$

  - Para qualquer $a < b$ em R_x

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Observações

1. A probabilidade de qualquer ponto é zero

2. $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$
$= P(a < X < b)$.

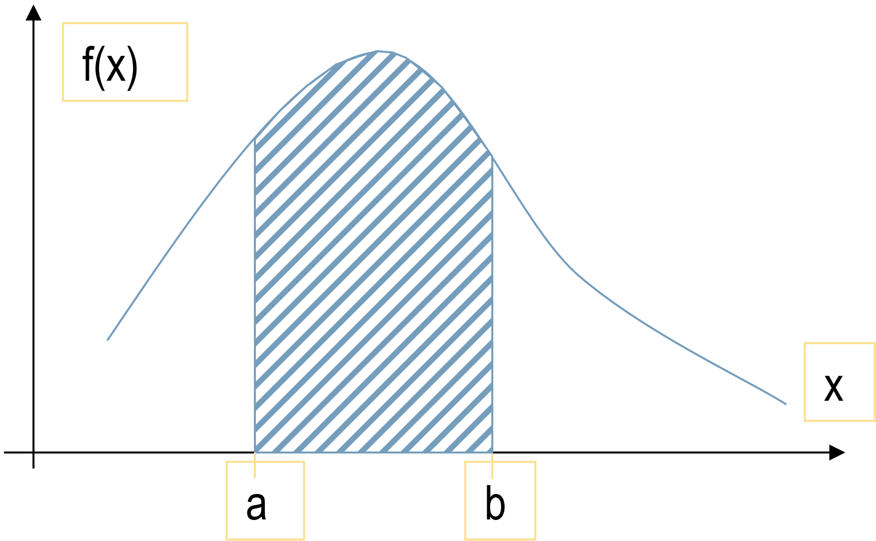
3. A função integrada entre dois limites a e b
(a < b) é a probabilidade, ou seja, a área sob a curva.

4. A função de distribuição é definida como

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Variáveis aleatórias contínuas

- Propriedades



$$f(x) \geq 0, \ \forall x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

Média e variância de uma VA contínua

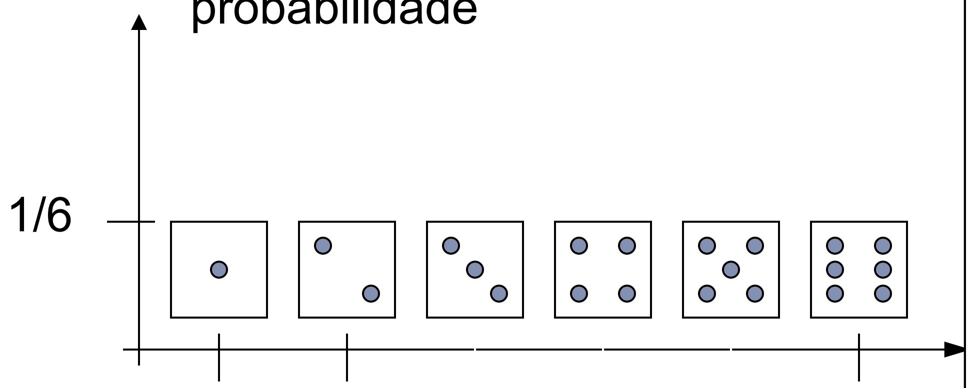
Média (ou valor esperado)

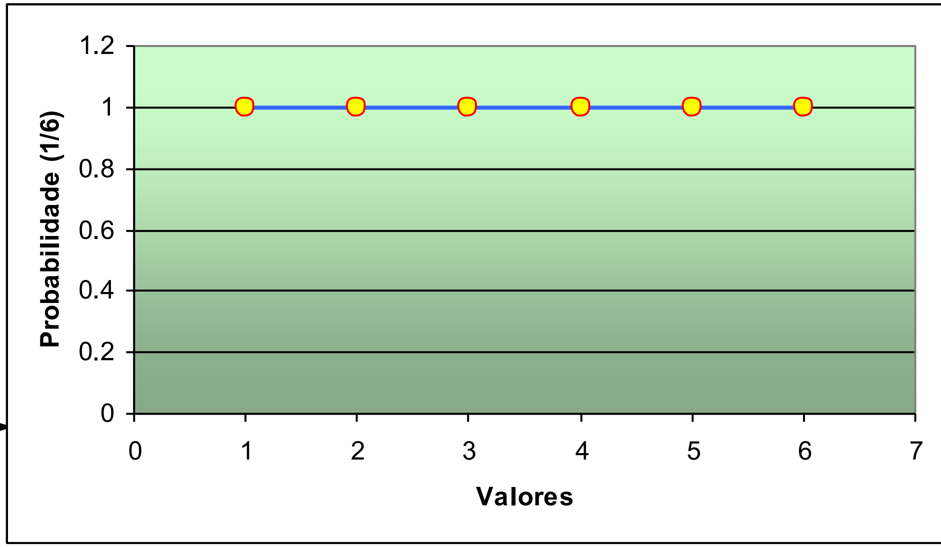
$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \ f(x)dx = E(x)$$

Variância

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2$$

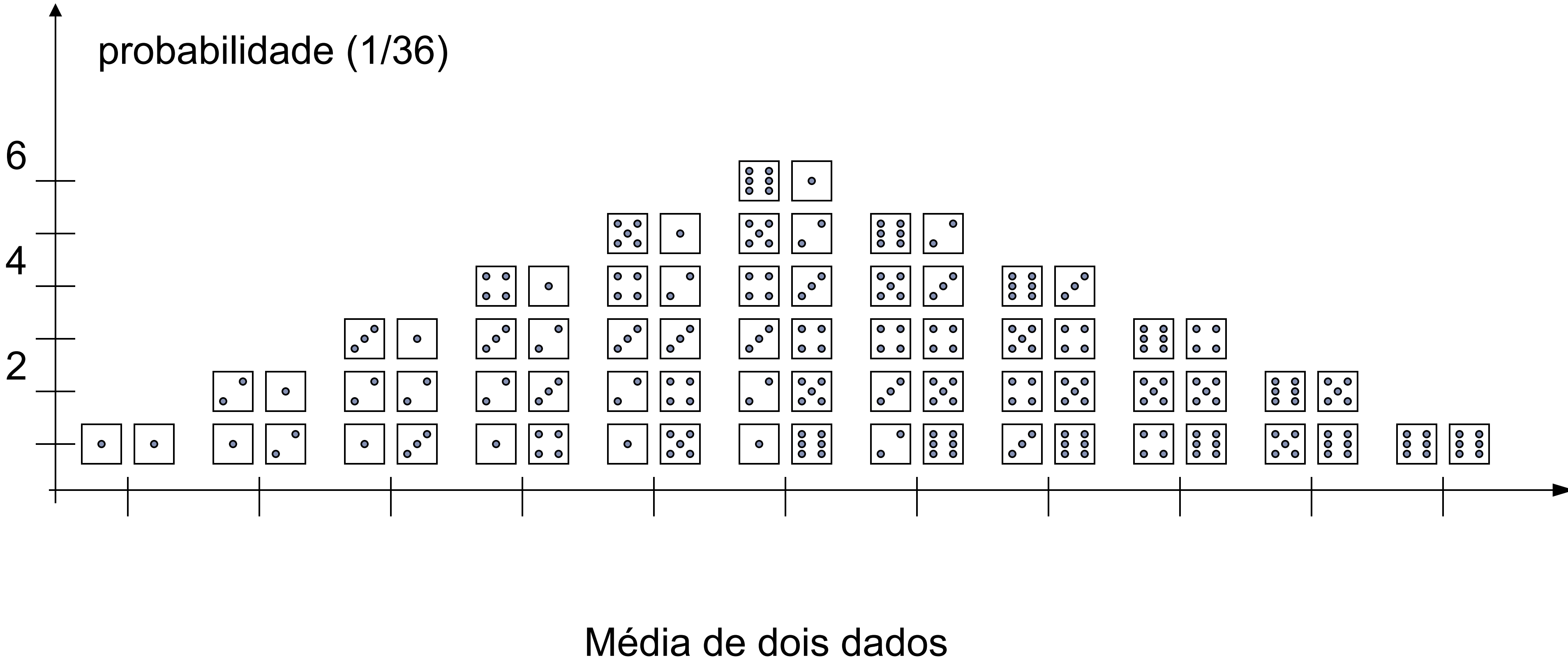
Distribuição de probabilidade uniforme ou retangular



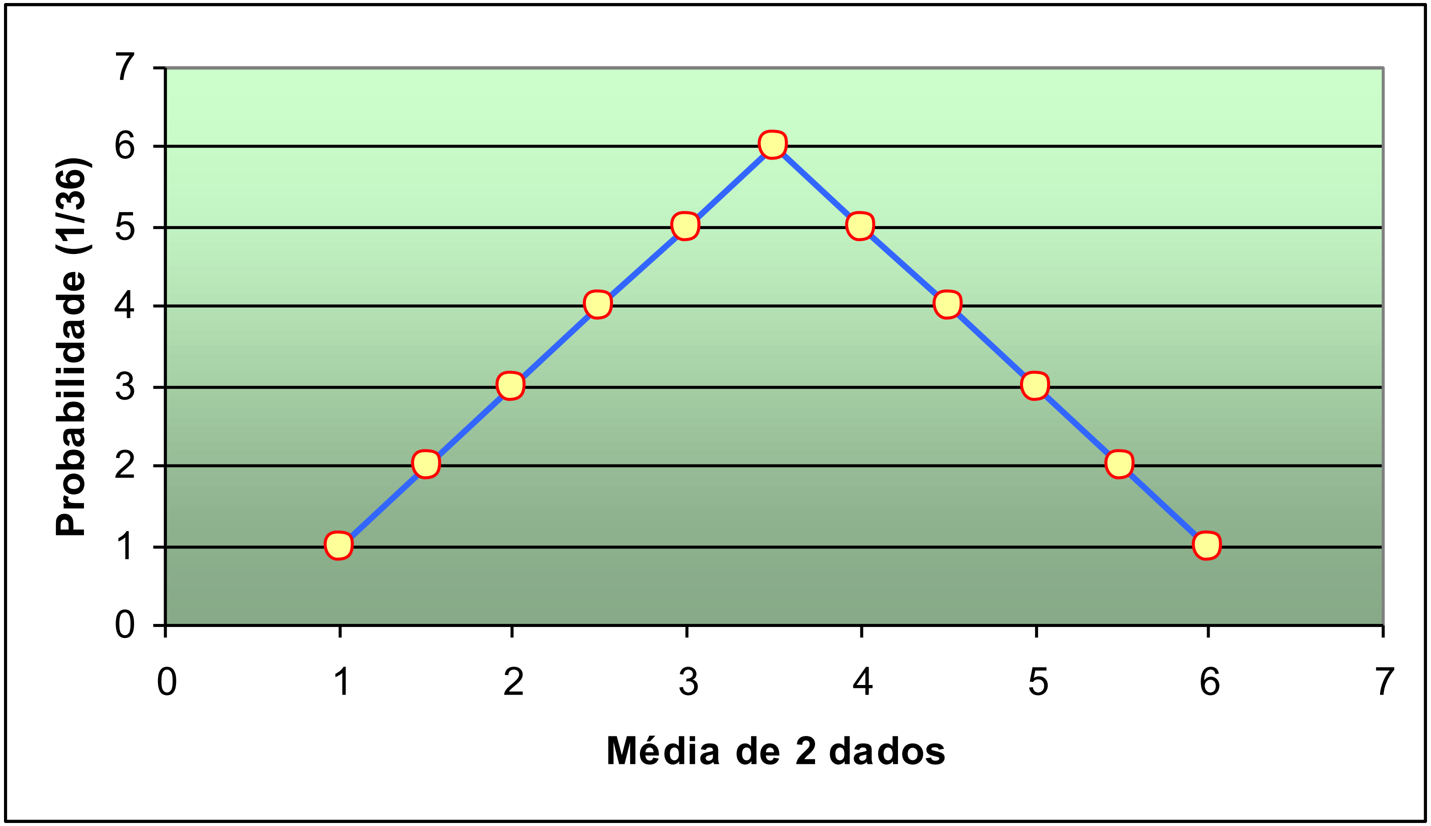


Lançamento de um dado

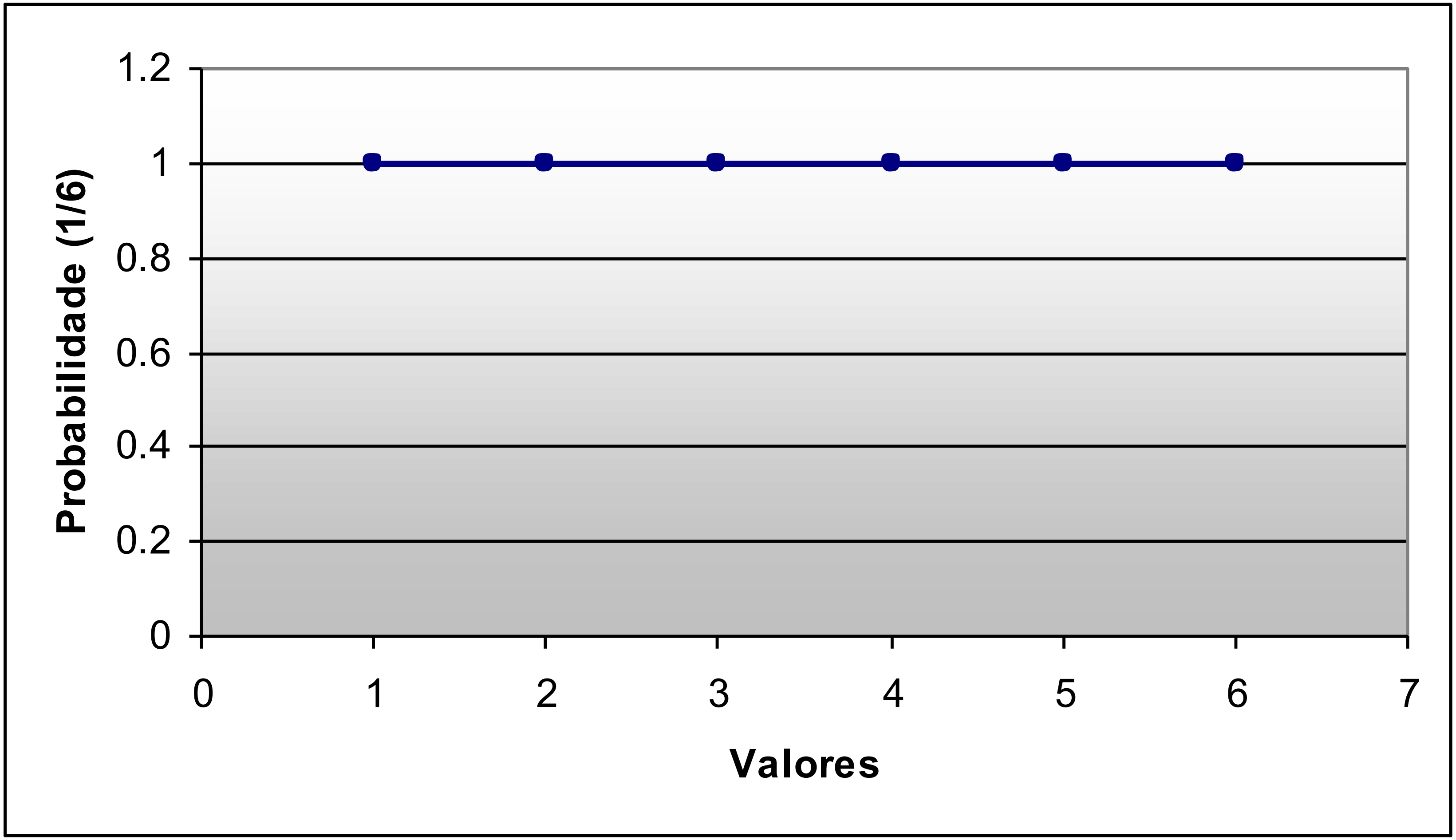
Distribuição de probabilidade triangular



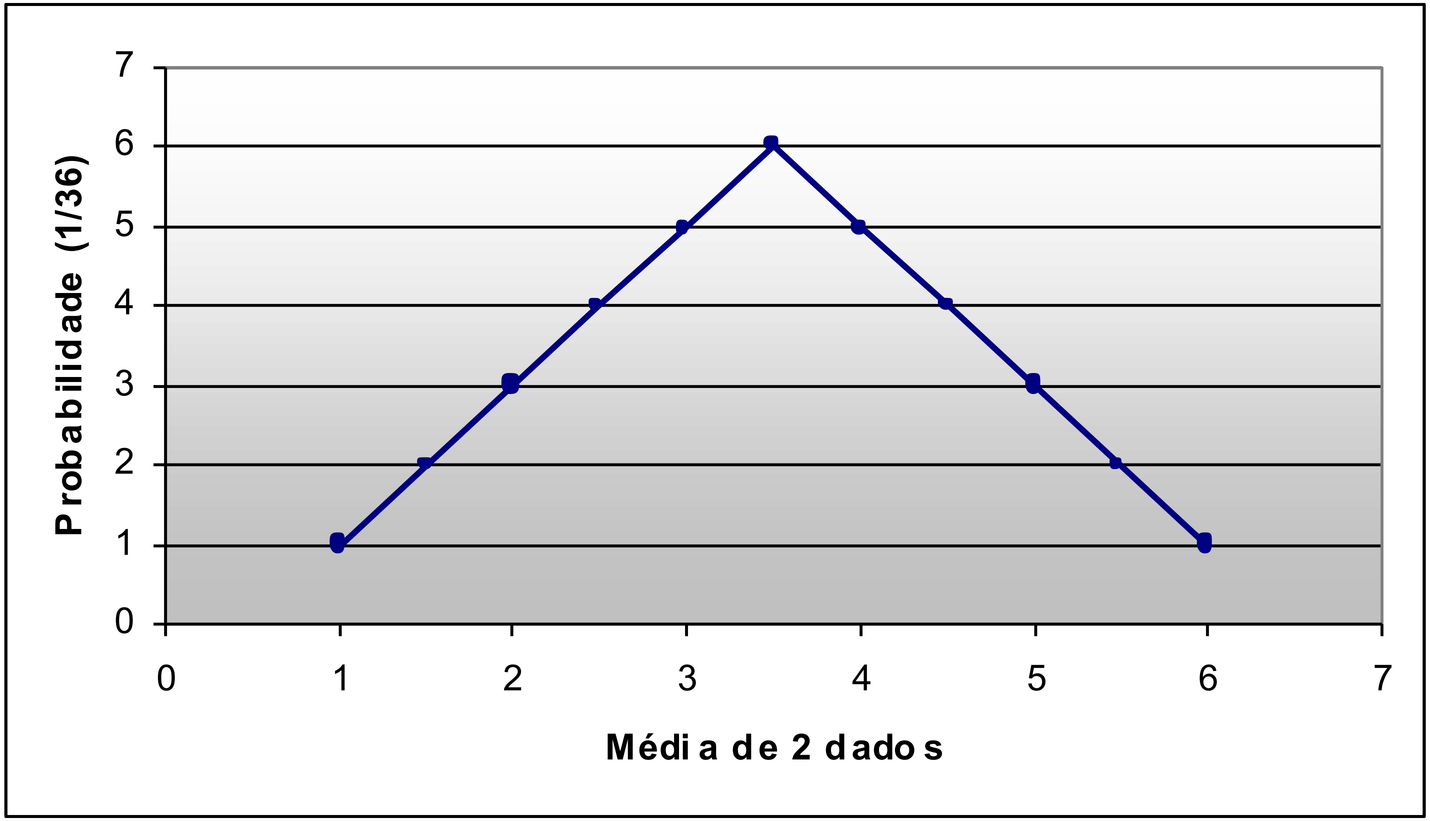
Distribuição de probabilidade triangular



Lançamento de um dado

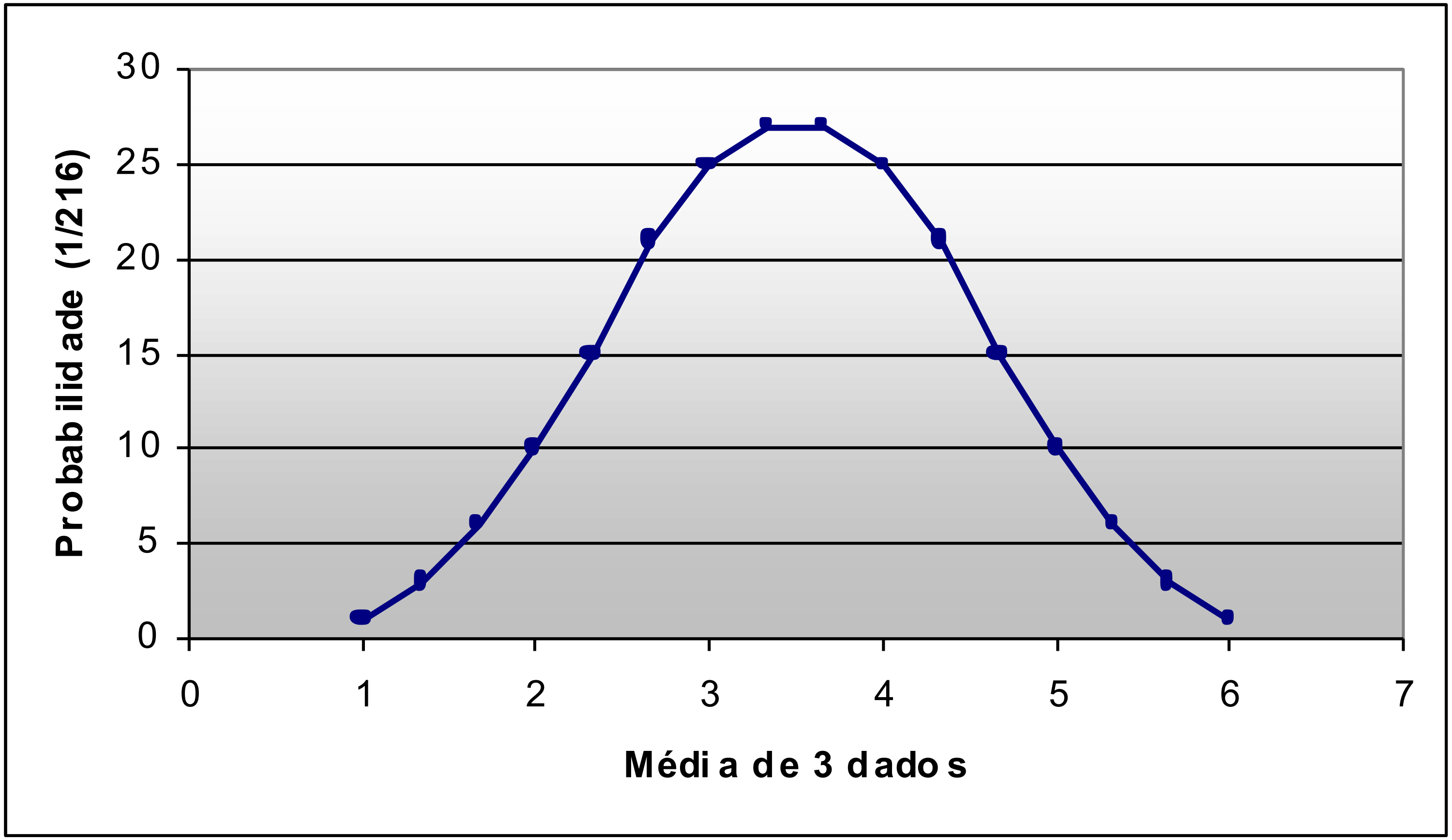


Média de dois dados



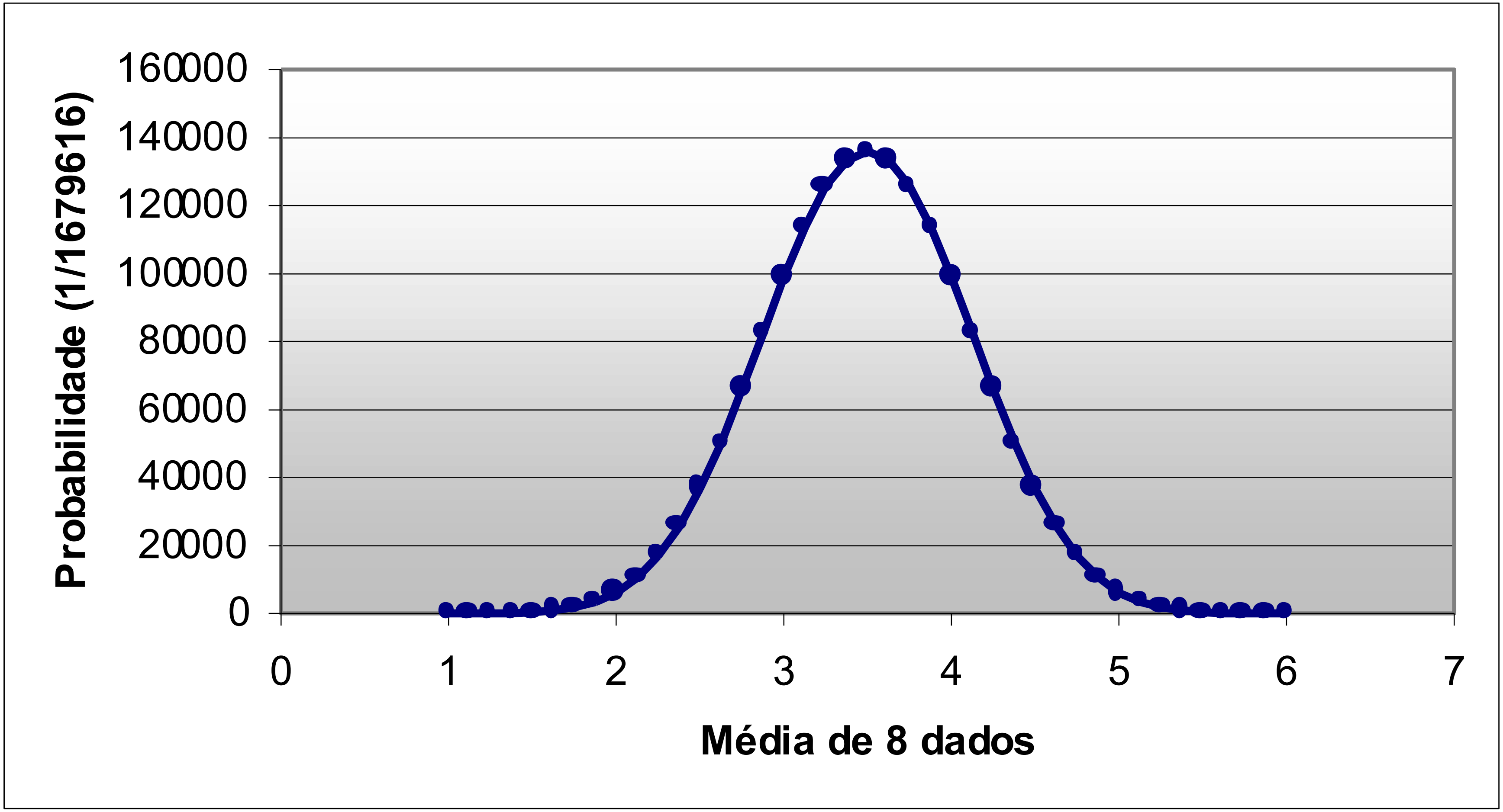
$$p = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Média de três dados



$$p = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

Média de oito dados



Distribuição binomial de probabilidade

Distribuição binomial

- É distribuição discreta de probabilidade. Ela está associada a um experimento de múltiplas etapas

Propriedades do experimento binomial

- O experimento consiste de uma sequência de n ensaios idênticos
- Dois resultados são possíveis em cada ensaio: sucesso e fracasso
- P(sucesso)=p   P(fracasso)= 1-p = q

  $p+q=1$
- Os ensaios são independentes

Exemplo: jogar 8 vezes um dado

- O experimento consiste em 8 jogadas do dado (ensaios idênticos)
- Cada ensaio resulta em sucesso (sair 6) ou fracasso(não sair 6)
  - P(sucesso)= P(sair 6)=1/6
  - P(fracasso)= P(não sair 6)=5/6
- Os ensaios são independentes

Exemplo: determinar a probabilidade de saírem 3 faces 6, em 8 jogadas de um dado

Ensaios	1	2	3	4	5	6	7	8
Resultados	s	s	s	f	f	f	f	f
Probabilidade	1/6	1/6	1/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^3 . \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0,17^3 . 0,83^5$$

$$= 0,0049 . 0,3939 = 0,0019$$

Exemplo lançamento moedas

Solução:

- Número de tentativas $n=10$
- Número de sucessos desejado $k=3$
- Probabilidade de sucesso em 1 tentativa $p=1/2$
- Probabilidade de insucesso em 1 tentativa $q=1/2$
- Usando estes parâmetros na fórmula da distribuição binomial, temos

$$f(X) = P(X=k) = C_{n,k}\, p^{k}\, q^{n-k}$$

Função do Excel

DISTRBINOM (núm_s; tentativas; prob_s; cumulativo)

- A função estatística DISTRBINOM retorna a probabilidade simples ou acumulada do número de tentativas bem-sucedidas núm_s, conforme o valor do argumento cumulativo.
  - Se o argumento cumulativo for **FALSO**, a função retornará a probabilidade do número **exato** de sucessos **núm_s**
  - Se o argumento cumulativo for **VERDADEIRO**, a função retornará a probabilidade **acumulada** desde o valor **0** até o valor **núm_s** informado.

Exemplo lançamento moedas (resolução com Excel)

Solução:

Se X é a variável aleatória que representa "o número de caras" então

Se quisermos calcular a probabilidade de sair três caras em dez lançamentos

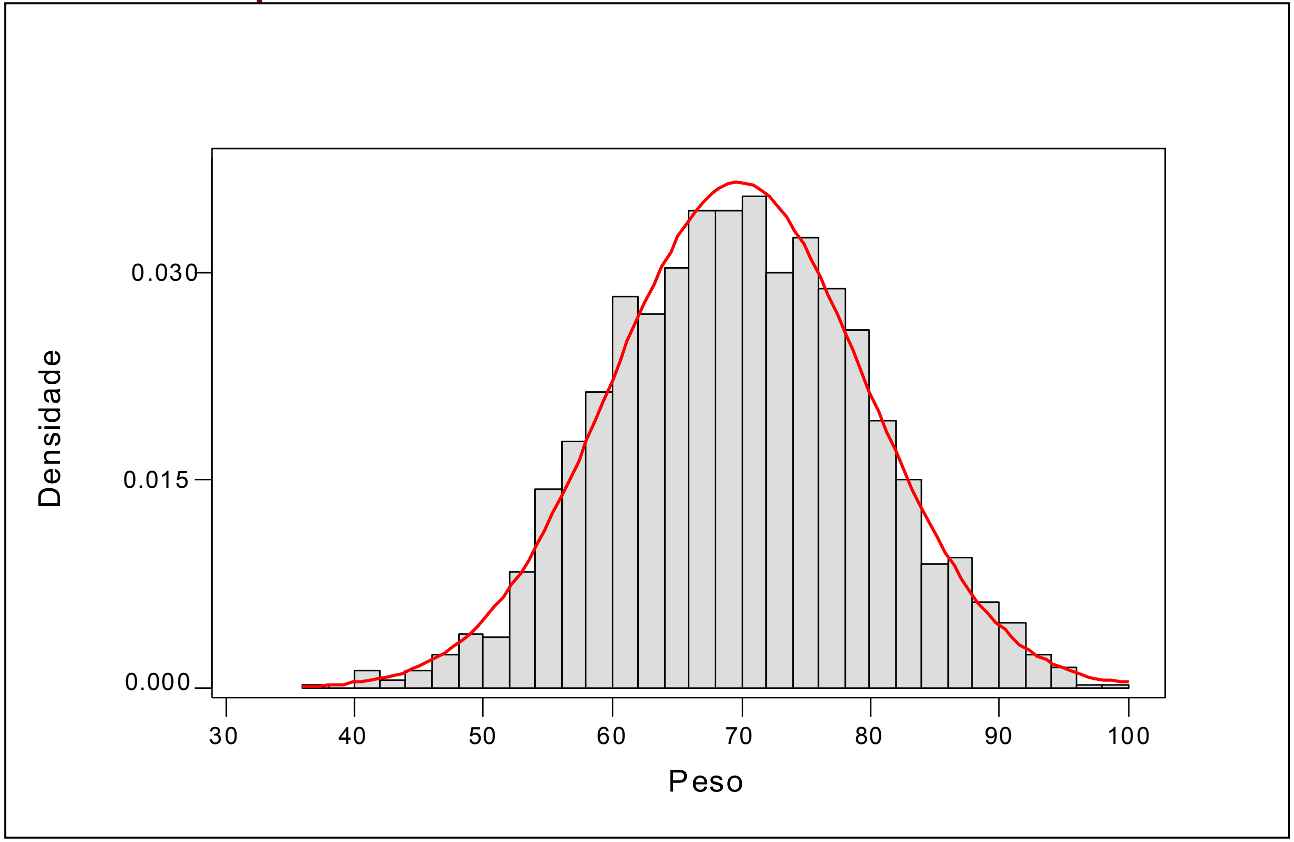
P(X=3)= distrbinom(3 ; 10 ; 0,5 ; 0)= 0,1172

Distribuição normal

Vamos definir a variável aleatória

X: peso, em kg, de uma pessoa adulta escolhida ao acaso da população.

Como se distribuem os valores da variável aleatória X, isto é, qual a distribuição de probabilidades de X ?



A curva contínua da figura denomina-se curva normal.

A distribuição normal é uma das mais importantes distribuições contínuas de probabilidade pois:

Muitos fenômenos aleatórios comportam-se de forma próxima a essa distribuição. Exemplos:

1. altura
2. pressão sangüínea
3. peso

Pode ser utilizada para calcular, de forma aproximada, probabilidades para outras distribuições, como por exemplo, para a distribuição binomial.

A distribuição normal

A VA X tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

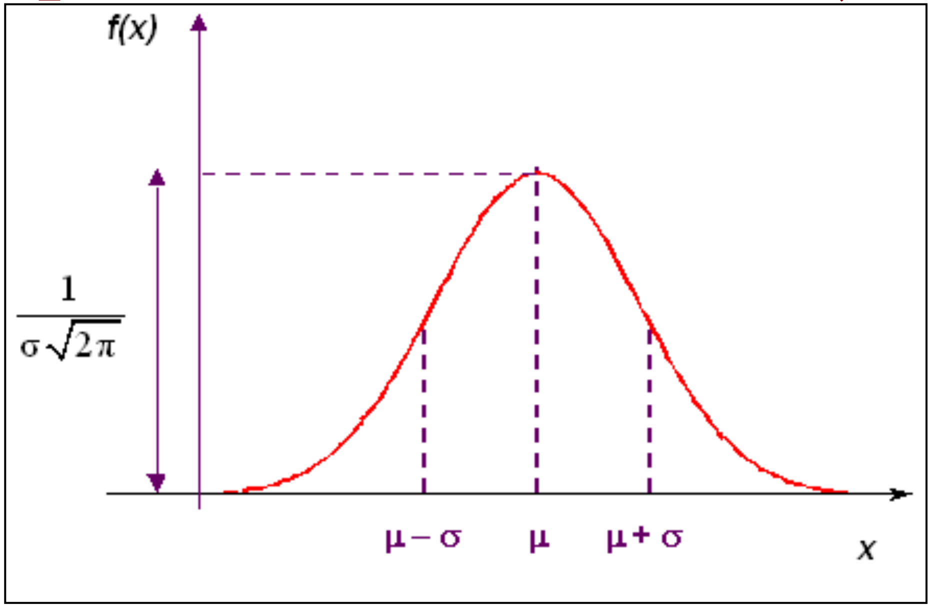
Pode ser mostrado que

1. μ é o valor esperado (média) de X ($-\infty < \mu < \infty$)
2. σ^2 é a variância de X ($\sigma^2 > 0$)

Notação : $X \sim N(\mu \,;\, \sigma^2)$

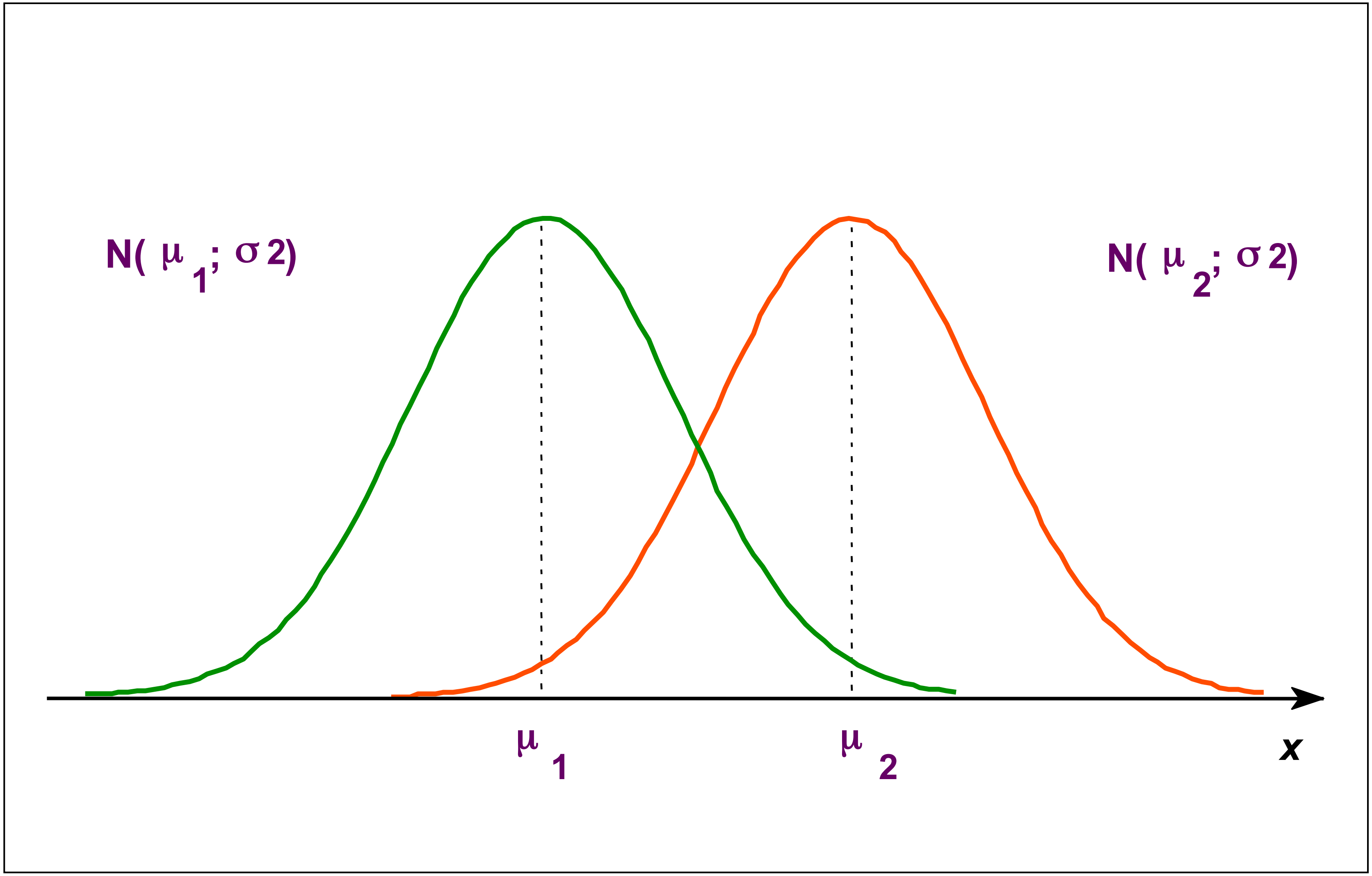
Para cada par de parâmetros μ e σ
há uma curva diferente de f(x)
Há uma "família" de distribuições normais

Propriedades de $X \sim N(\mu;\sigma^2)$



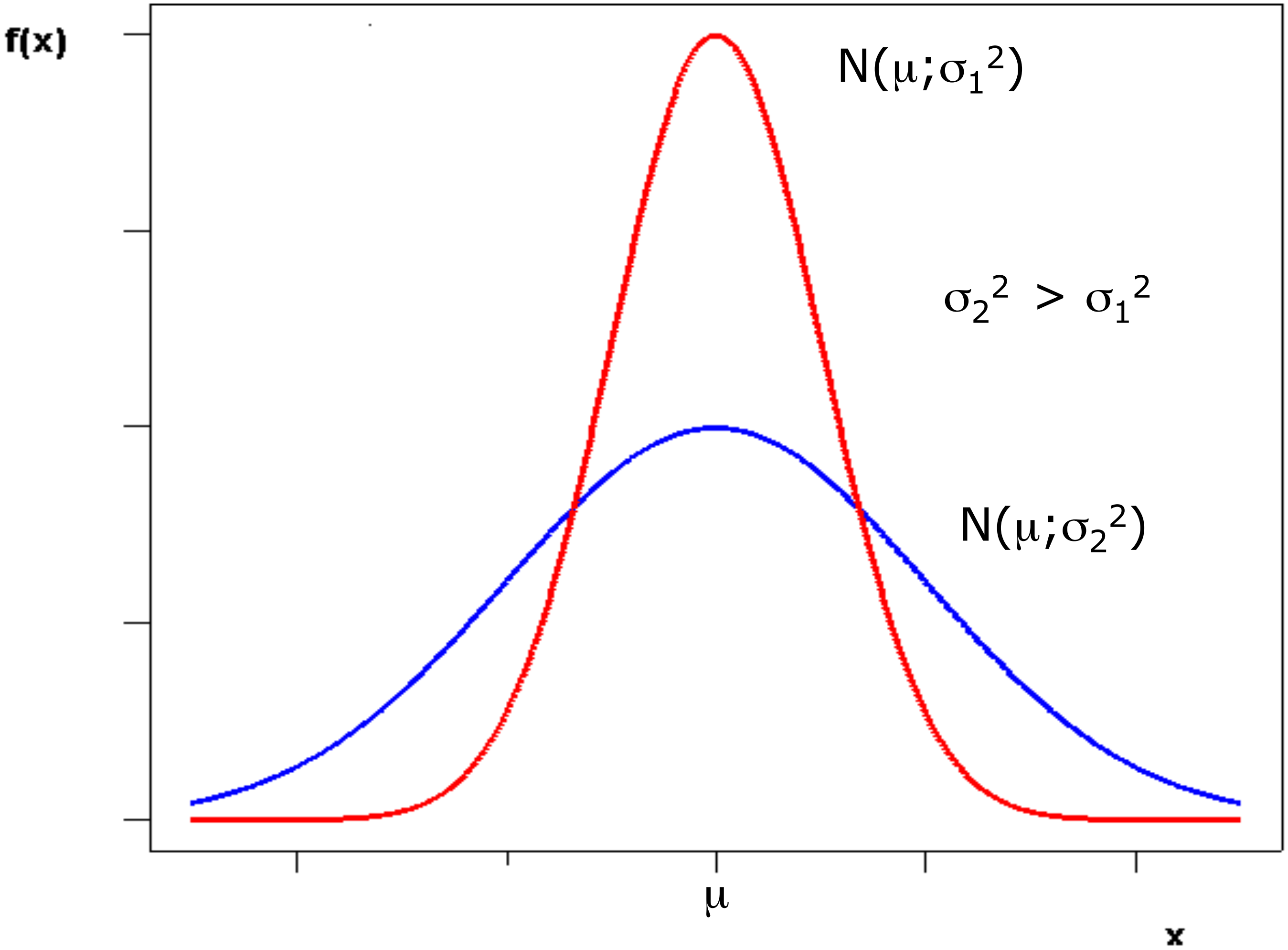
- **$E(X) = \mu$ (média ou valor esperado)**
- **$Var(X) = \sigma^2$ (e portanto, $DP(X) = \sigma$)**
- **$f(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$**
- **$x = \mu$ é ponto de máximo de $f(x)$**
- **$\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são pontos de inflexão de $f(x)$**
- **a curva Normal é simétrica em torno da média μ**

A distribuição normal depende dos parâmetros μ e σ^2



Curvas Normais com mesma variância σ^2
mas médias diferentes ($\mu_2 > \mu_1$).

Influência de σ^2 na curva Normal

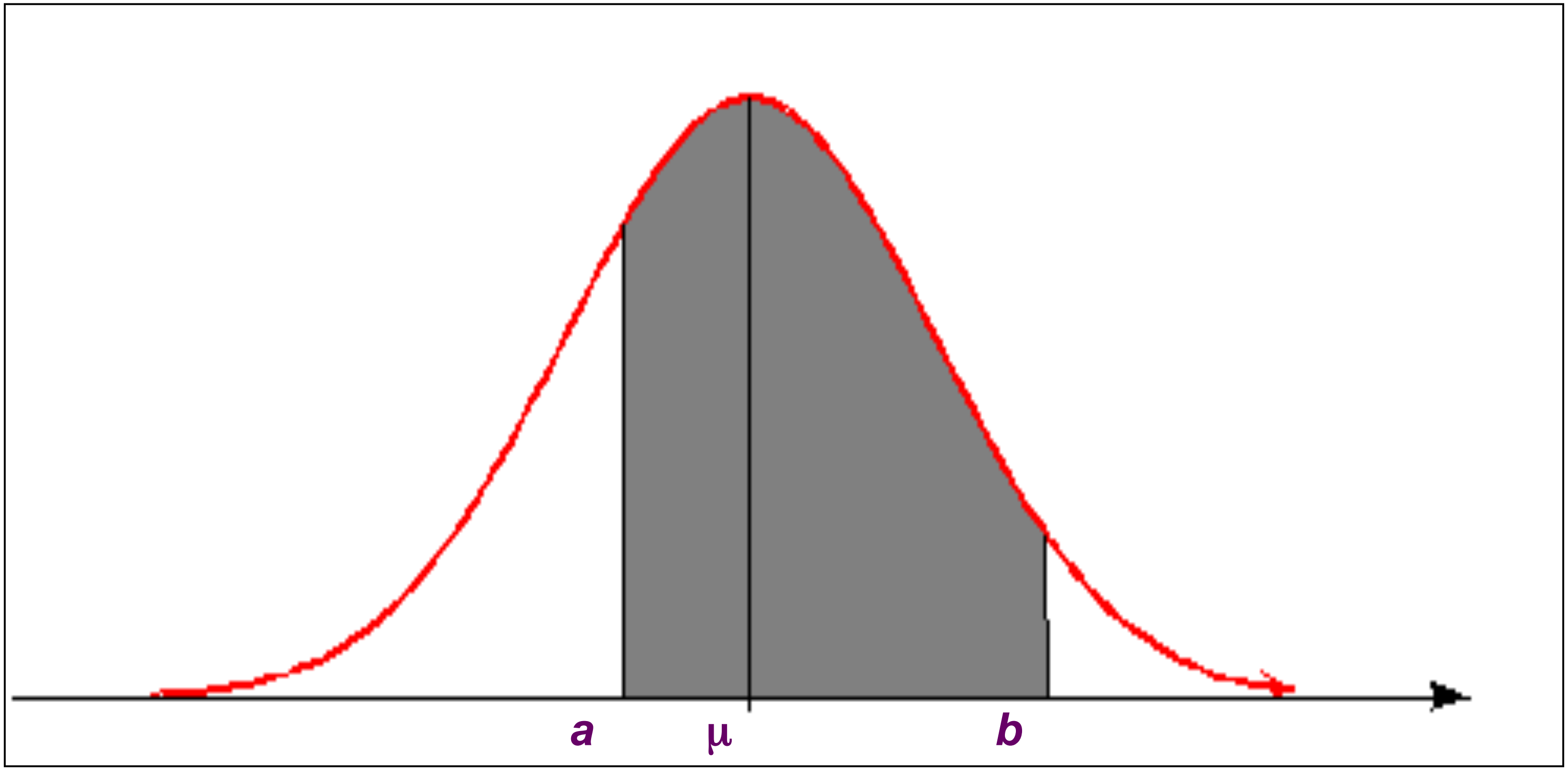


Curvas Normais com mesma média μ,
mas com variâncias diferentes **($\sigma_2^2 > \sigma_1^2$).**

Cálculo de probabilidades

$$P(a < X < b)$$

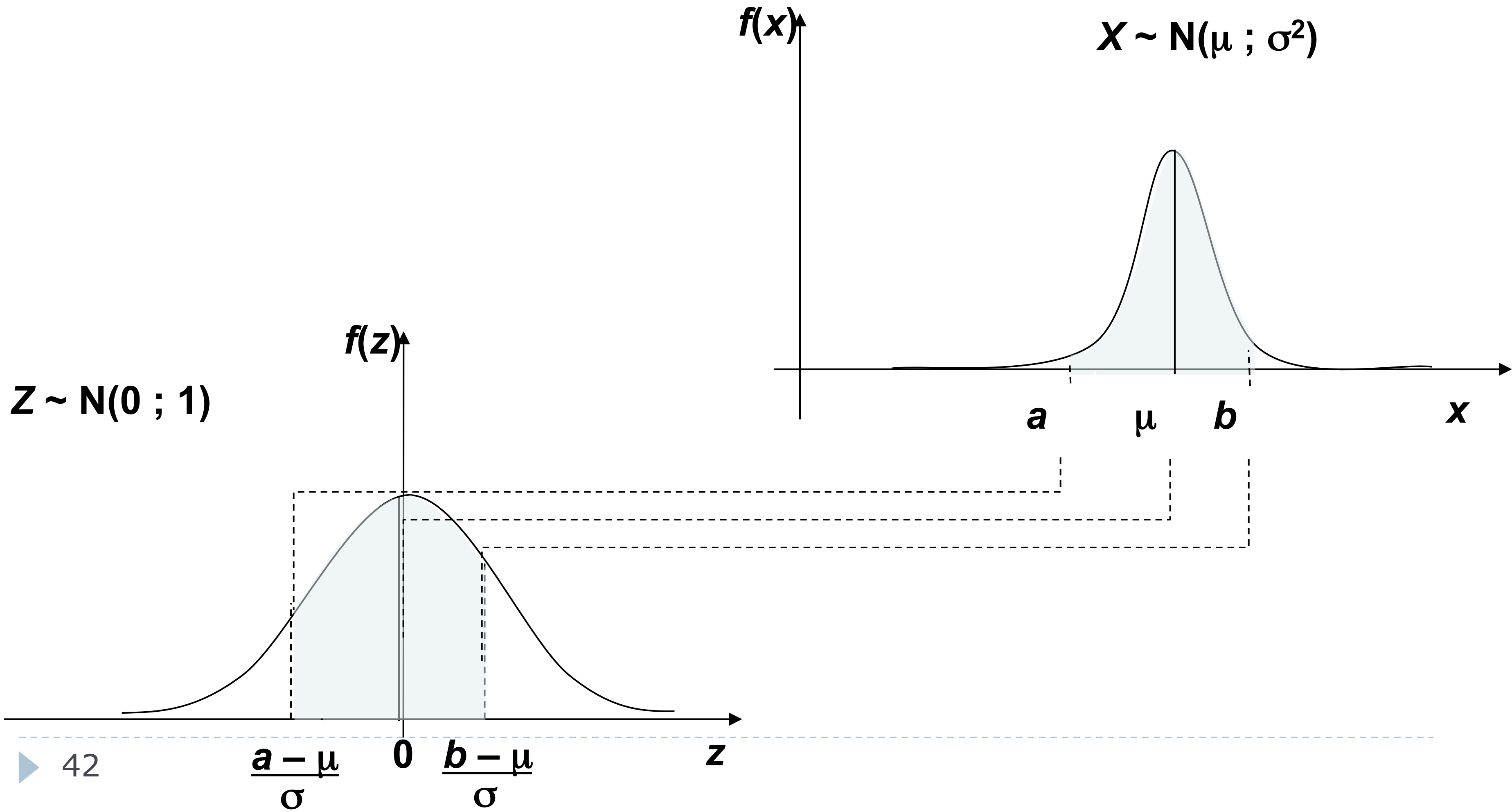
Área sob a curva e acima do eixo horizontal (*x*) entre *a* e *b*.



Se $X \sim N(\mu\,;\sigma^2)$, definimos $\boxed{Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}}$

$\Rightarrow$ $E(Z) = 0$

$Var(Z) = 1$



A v.a. *Z* ~ N(0;1) denomina-se *normal padrão* ou *reduzida.*

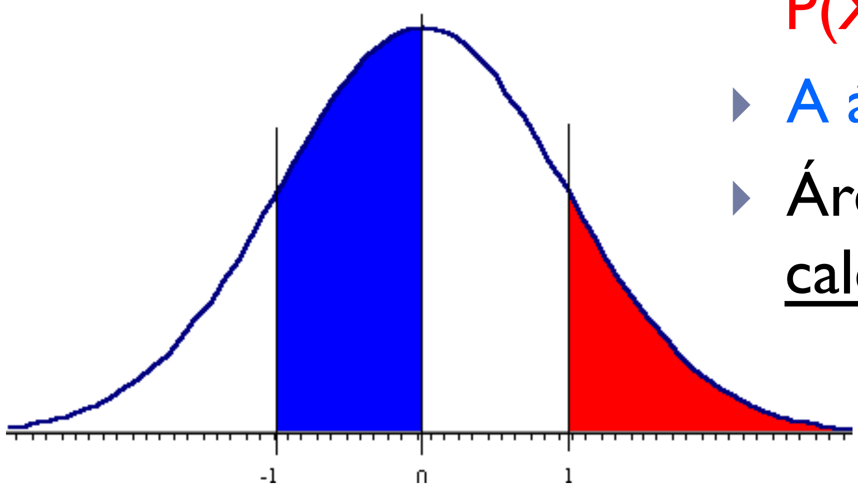
Portanto,

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Dada a v.a. Z ~N(0;1) podemos obter a v.a. $X \sim N(\mu;\sigma^2)$ através da transformação inversa

$$X = \mu + Z\,\sigma.$$

Para variáveis aleatórias contínuas, **as probabilidades são representadas pelas áreas sob a curva**



- Área total sob a curva é 1
- A área em vermelho é igual a P(X>1)
- A área em azul é igual a P(-1<X<0)
- Áreas <u>são obtidas em tabelas ou calculadas em computador</u>

Distribuição normal

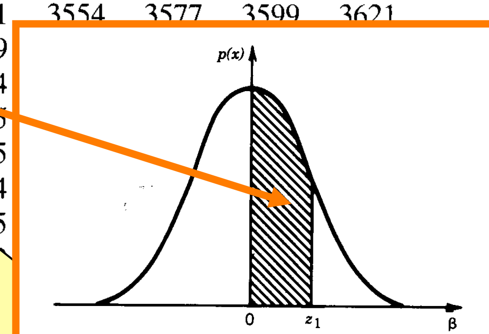
TABLE 4.3 Probability Values for Normal Error Function

One-Sided Integral Solutions for $p(z_1) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{z_1} e^{-\beta^2/2}\, d\beta$

$P(z_1=1{,}02)=?$

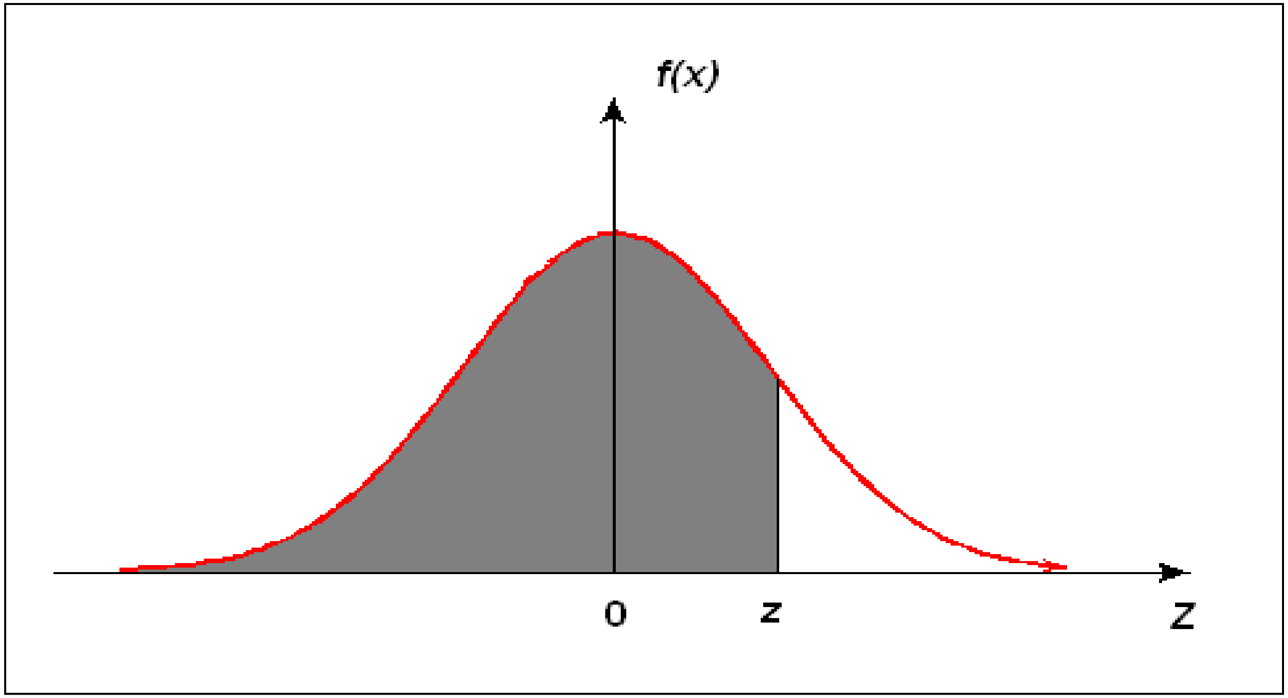
$z_1 = \frac{x_1 - x'}{\sigma}$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	[illegible]	[illegible]	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	[illegible]	[illegible]	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	[illegible]	[illegible]	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	[illegible]	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3233
0.9	.3159	.3186	[illegible]	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	[illegible]	[illegible]	.3729	.3749	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.2	.3849	.3869	.3888	[illegible]	[illegible]	.3944	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.3	.4032	.4049	.4066	[illegible]	.4099	.4115	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	[illegible]	.4265	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	[illegible]	.4394	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.49865	.4987	.4987	.4988	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990

$Z_1=1{,}02$



$P(z_1=1{,}02)=34{,}61\%$

Uso da tabela normal padrão



Denotamos : $A(z) = P(Z \leq z)$**, para** $z \geq 0$**.**

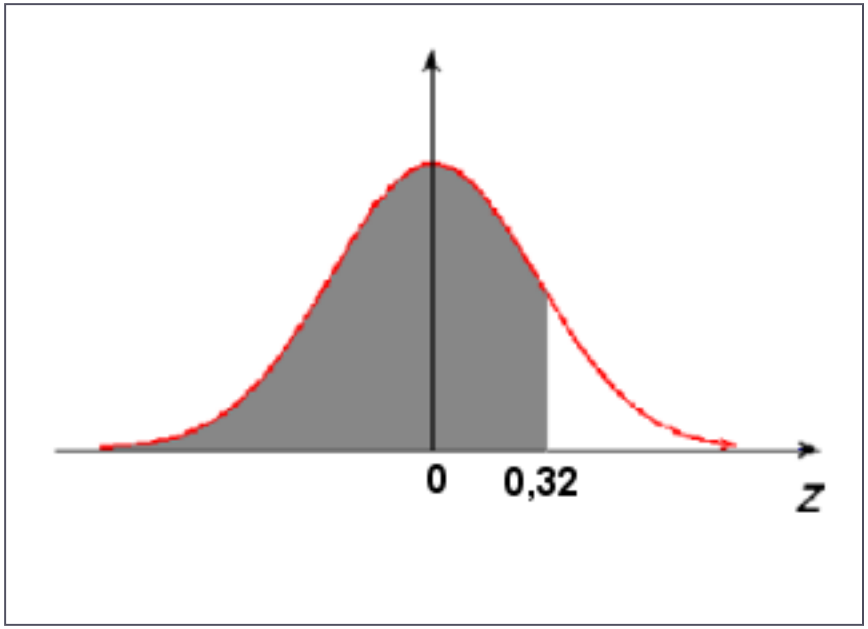
Distribuição Normal : Valores de $P(Z \leq z) = A(z)$

Parte inteira e primeira decimal de z

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Segunda decimal de z									
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Exemplo: Seja $Z \sim N(0; 1)$, calcular

a) $P(Z \leq 0{,}32)$

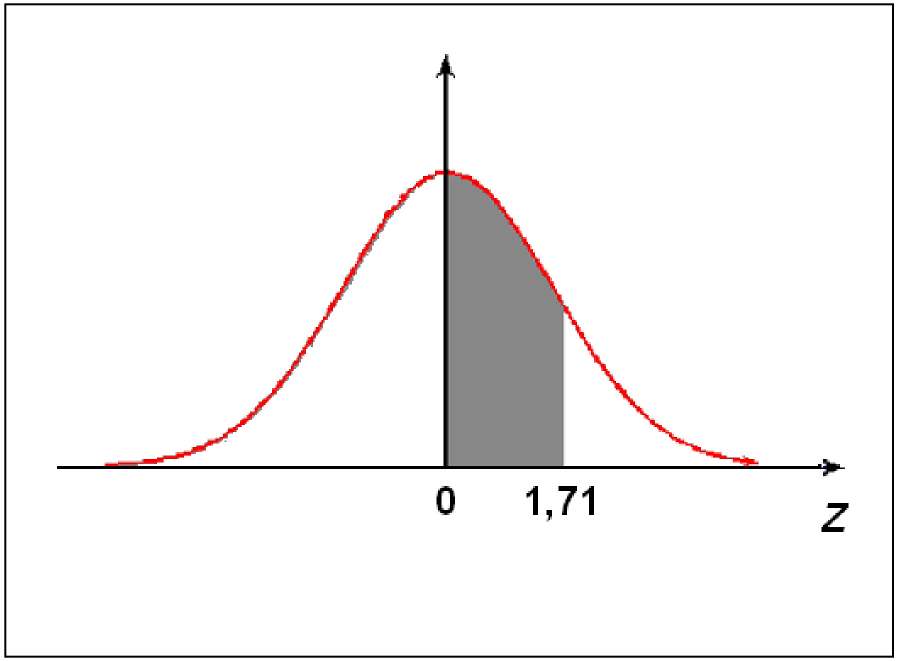


$P(Z \leq 0{,}32) = A(0{,}32) = 0{,}6255.$

Encontrando o valor na Tabela N(0;1)

z	0	1	2
0,0	0,5000	0,5039	0,5079
0,1	0,5398	0,5437	0,5477
0,2	0,5792	0,5831	0,5870
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
⋮	⋮	⋮	⋮

b) $P(0 < Z \leq 1{,}71)$



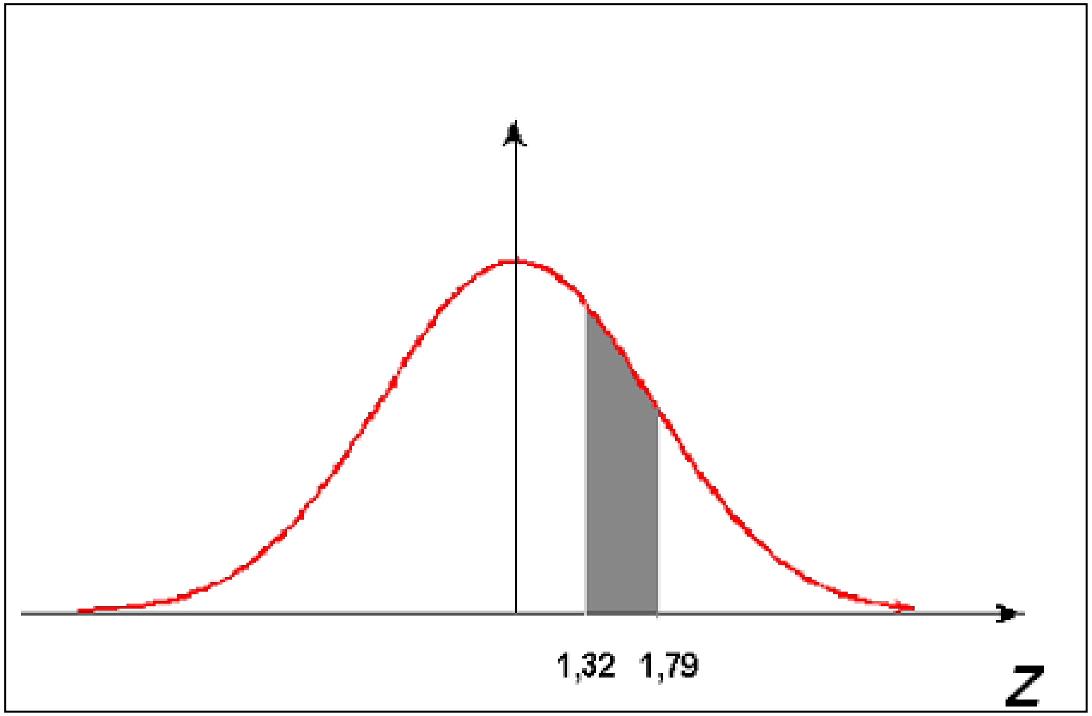
$$P(0 < Z \leq 1{,}71) = P(Z \leq 1{,}71) - P(Z \leq 0)$$

$$= A(1{,}71) - A(0)$$

$$= 0{,}9564 - 0{,}5 = 0{,}4564.$$

Obs.: $P(Z < 0) = P(Z > 0) = 0{,}5.$

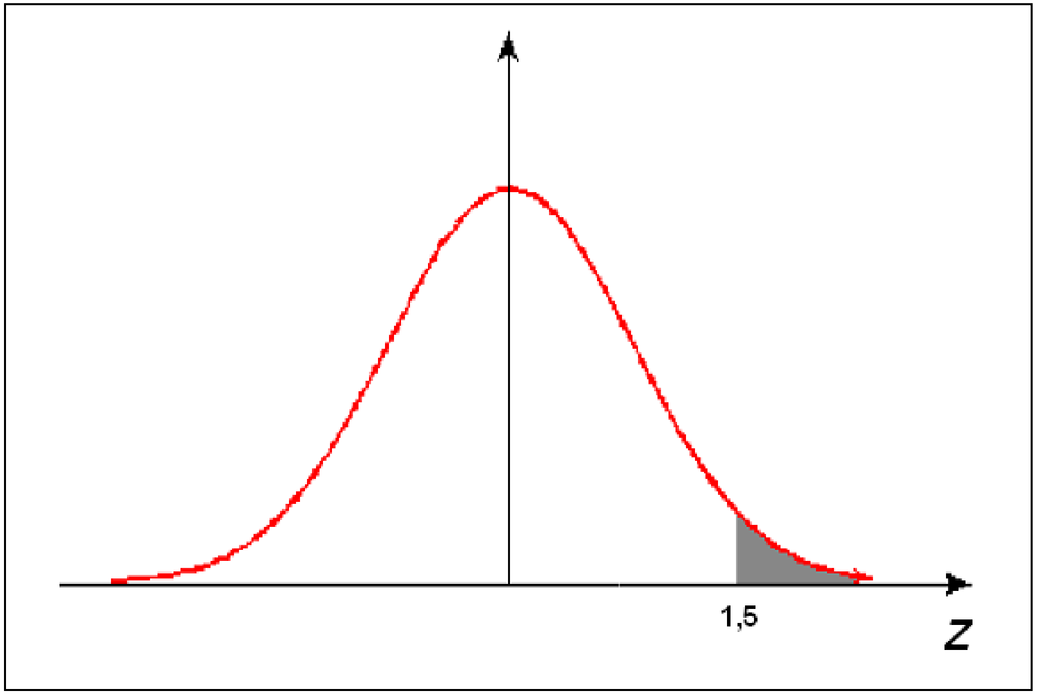
c) $P(1{,}32 < Z \leq 1{,}79)$



$P(1{,}32 < Z \leq 1{,}79) = P(Z \leq 1{,}79) - P(Z \leq 1{,}32) = A(1{,}79) - A(1{,}32)$

$= 0{,}9633 - 0{,}9066 = 0{,}0567.$

d) $P(Z \geq 1,5)$

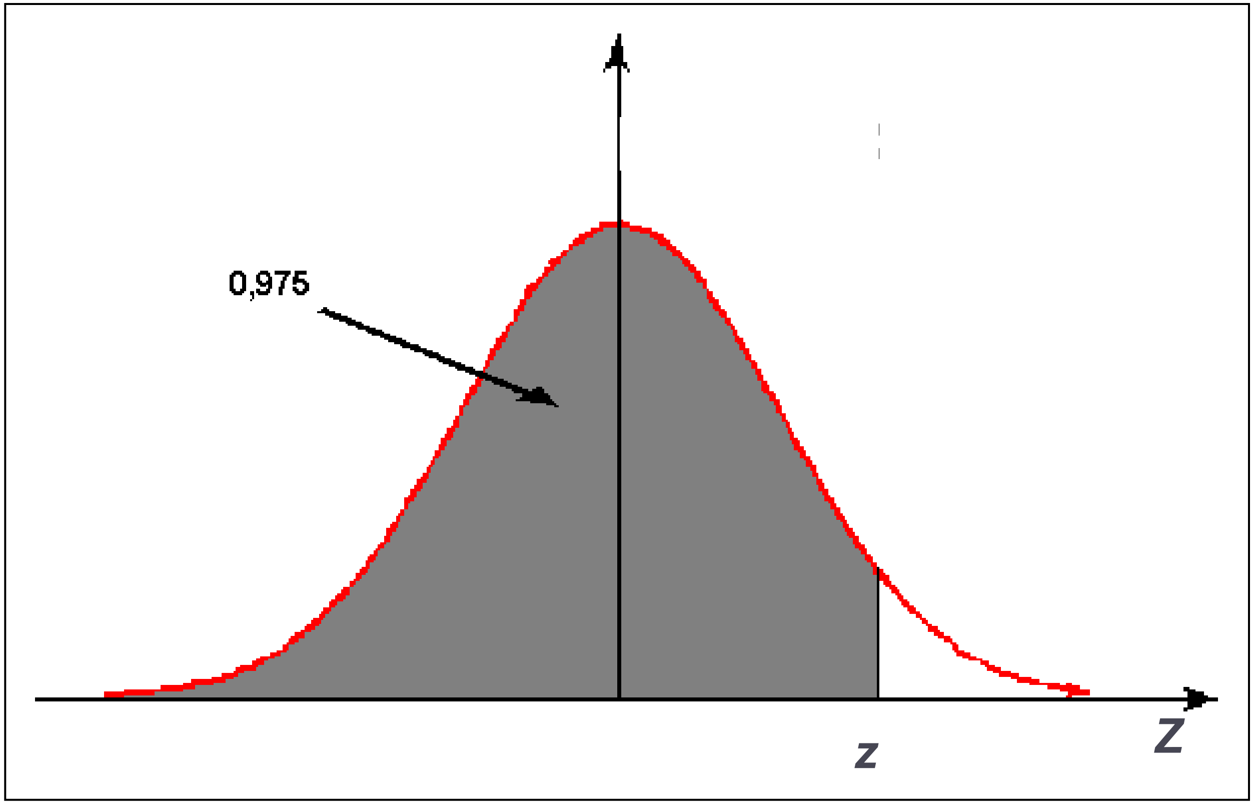


$P(Z > 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - A(1,5)$

$= 1 - 0,9332 = 0,0668.$

Como encontrar o valor z da distribuição N(0;1) tal que:

(i) $P(Z \leq z) = 0,975$



z é tal que $A(z) = 0,975$.

Pela tabela, $z = 1,96$.