# Instituto de Física
# USP

# Física V - Aula 10

**Professora: Mazé Bechara**

# *Aula 10 – A radiança expectral do corpo negro: a relação de Rayleigh-Jeans e a proposta de Planck .*

1. Uma **determinação** da radiança espectral de uma cavidade, **no contexto da Física Clássica: as idéias** e **a expressão de Rayleigh e Jeans.** Comparação com os resultados experimentais e a chamada **"catástrofe do ultravioleta".**

2. A **proposta** de **quantização** de **Planck** e as suas implicações: **na energia média da radiação eletromagnética** da cavidade e na **radiança espectral emitida. O bom acordo do resultado de Planck** com os resultados experimentais. **A constante h (ajustada) de Planck.**

3. **A dedução da Lei de deslocamento de Wien a partir da radiança espectral de Planck. A frequencia mais provável (que não é a frequencia do comprimento de onda mais provável).**

4. **A dedução da lei de Stefan Boltzmann a partir da radiança espectral de Planck.**

5. **Aplicação de corpo negro.**

# A radiança espectral nas teorias da Física Clássica

- **Relação** entre a ***intensidade espectral emitida $R_T(\nu)$*** com a ***densidade volumétrica espectral da radiação no interior da cavidade***

- **Mostra-se que: $R_T(\nu)=c\rho_T(\nu)/4$**

- **$\rho_T(\nu)$ é a densidade volumétrica espectral de energia eletromagnética no interior da cavidade,** ou seja, **a energia** eletromagnética por unidade de volume dV e por unidade de frequencia d$\nu$ no interior da cavidade.

- ***<u>Sugestão:</u> faça análise dimensional para conferir a relação entre radiança espectral e densidade volumétrica de energia***

# A radiança espectral do corpo negro

- ***Consequencias do entendimento explicitado nas idéias sobre as ondas na cavidade de um corpo sólido:***

1. **a radiação no interior da cavidade é a do interior da matéria, portanto, a densidade volumétrica espectral de energia $\rho_T(\nu)$ na cavidade é igual à densidade de energia no interior da matéria na temperatura T.**

2. **As ondas eletromagnéticas estacionárias na cavidade podem ser calculadas como o número de ondas estacionárias no vácuo, com frequencia entre $\nu$ e $\nu+d\nu$ por unidade de volume e de frequência $(dN_{EB}(\nu)/dVd\nu)$ vezes a energia $(\varepsilon(\nu))$ das ondas estacionárias com frequencia entre $\nu$ e $\nu+d\nu$. E a energia da onda deve ser igual a energia média dos oscildores da matéria.**

# A densidade volumétrica espectral em termos de frequência

- **A proposta:**
- **a densidade volumétrica de energia eletromagnética é calculada como: número de diferentes ondas estacionárias com frequencia ν dentro de dν vezes a energia destas ondas (do eletromagnetismo clássico).**
- **A energia média da onda é a energia média dos osciladores que a geram, calculada pela mecânica estatística de Boltzmann:**

$$\rho_T(\nu) \equiv < \frac{dU_{EB}(\nu)}{dVd\nu} >= \frac{dN_{ondestc}(\nu)}{dVd\nu} < \varepsilon_{EB} >= \frac{dN_{ondestc}(\nu)}{dVd\nu} < \varepsilon_T >$$

# Cálculo do número de ondas estacionárias pelo eletromagnetismo clássico – *dedução em aula.*

- 1. **Há várias ondas com a mesma frequencia entre $\nu$ e $\nu+d\nu$ porque a cavidade gera ondas estacionários tridimensionais.**

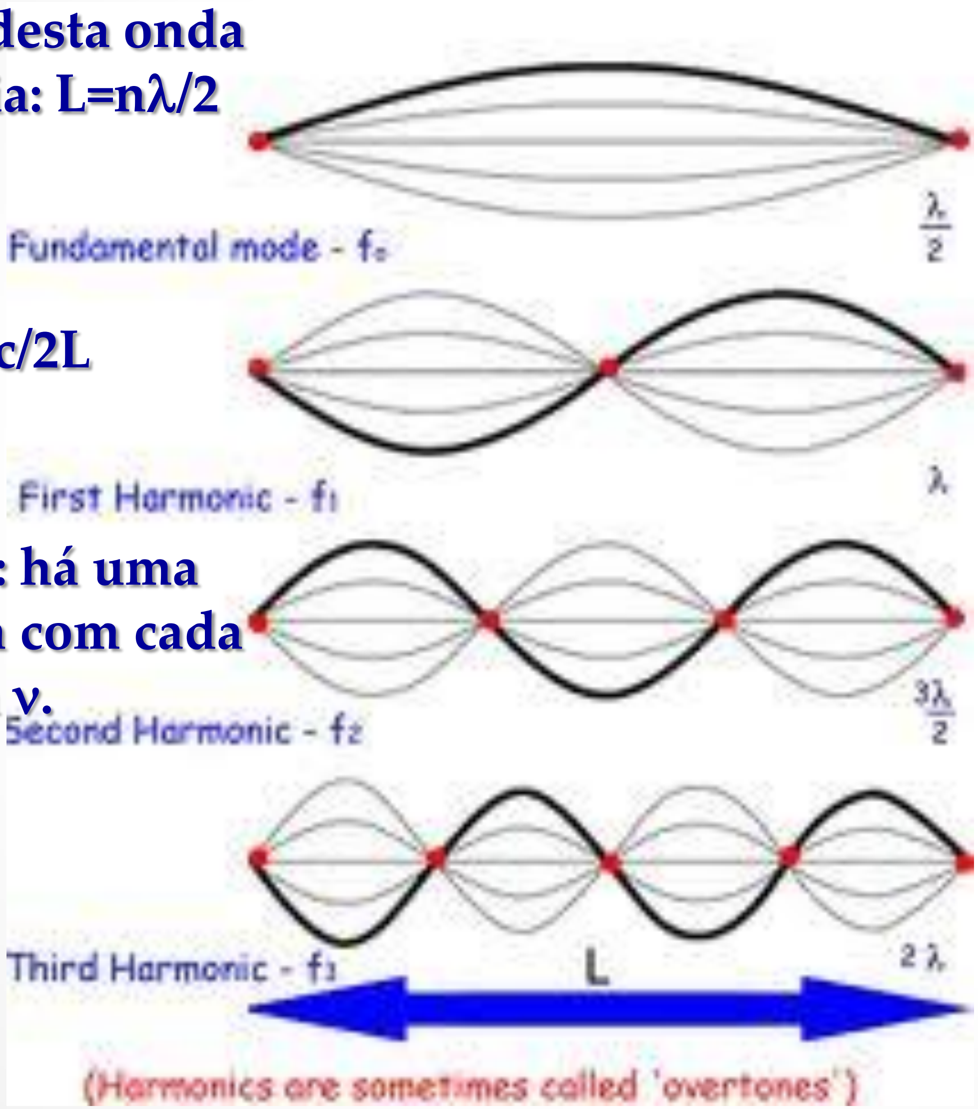
- 2. **O contagem do número de ondas estacionárias com a mesma frequencia $\nu$, dentro de $d\nu$ é feita sobre infinitas possibilidades de frequencias quantizadas, ou seja, infinitos números quânticos $n_1$,$n_2$ e $n_3$ , daí a aproximação de volume no espaço tridimensional contínuo de componentes $n_1$,$n_2$ e $n_3$ .**

# *Ondas estacionárias em cordas*

**Condição desta onda estacionária: L=nλ/2**
**n=1,2,3...**

**Assim ν=nc/2L**

**Conclusão: há uma única onda com cada frequencia ν.**




**As linhas grossas são as ondas em um instante.**
**Em outros instantes são as outras linhas.**

**Os nós, pontos (x) nos quais o valor da função da onda (y(x,t) é nulo, são sempre (qualquer instante t) os mesmos.**

**Assim como os máximos da função de onda são nas mesmas posições x, embora com diferentes valores da função de onda y em instantes t diversos.**

# Ondas estacionárias unidimensionais

- Condição de **onda unidimensional estacionária** em uma corda de comprimento L:

$$L = \frac{n\lambda}{2} = n\frac{2\pi}{2k} = n\frac{\pi}{k}$$

$$\Rightarrow k = n\frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{c}\nu$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{c}{2\pi}k = \frac{c}{2\pi}n\frac{\pi}{L} = n\frac{c}{2L}$$

$$n = 1,2,3\ldots$$

- **A função da onda estacionária unidimensional é: $f(x,t)=f_o \operatorname{sem}(kx)\operatorname{sem}(2\pi\nu t)$**
- Assim na **unidimensional existe uma única onda estacionária com frequencia $\nu$.**

# Já no caso bi ou tridimensional…

- **A função da onda estacionária tridimensional e eletromagnética no vácuo tem os campos elétrico e magnético dados por (pense em analogia com a onda rmecânica):**

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_o sen(k_1 x) sen(k_2 y) sen(k_3 z) sen(2\pi \nu t)$$

$$\vec{B}(x,y,z,t) = \hat{B}_o \frac{E_0}{c} sen(k_1 x) sen(k_2 y) sen(k_3 z) sen(2\pi \nu t)$$

$$\vec{c} = \frac{w}{k}\hat{k} = \lambda \nu \hat{k} = c\hat{k}$$

$$\vec{k} = k_1 \vec{\varepsilon}_1 + k_2 \vec{\varepsilon}_2 + k_3 \vec{\varepsilon}_3 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}\,\hat{k} = k\hat{k}$$

- **Se esta onda estacionária taridimensional estiver em uma caixa de dimensões $L_x$, $L_y$ e $L_z$, as condições de ondas estacionárias são 3:**

$$k_1 = n_1 \frac{\pi}{L_x}; k_2 = n_2 \frac{\pi}{L_y}; k_3 = n_3 \frac{\pi}{L_z}$$

# Já no caso bi ou tridimensional...

- **Assim a condição de onda estacionária tridimensional, fica nesta caixa de dimensões $L_x$, $L_y$ e $L_z$:**

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi\nu}{c}=\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}=\sqrt{\frac{n_1^2\pi^2}{L_x^2}+\frac{n_2^2\pi^2}{L_y^2}+\frac{n_3^2\pi^2}{L_z^2}}$$

$$\Rightarrow \nu=\frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{n_1^2\pi^2}{L_x^2}+\frac{n_2^2\pi^2}{L_y^2}+\frac{n_3^2\pi^2}{L_z^2}}$$

- **Se esta onda estacionária tridimensional estiver em uma caixa cúbica de lado L:**

$$\nu=\frac{c\pi}{2\pi}\sqrt{\frac{n_1^2}{L^2}+\frac{n_2^2}{L^2}+\frac{n_3^2}{L^2}}$$

- **Isto quer dizer que há diferentes conjuntos de ($n_1$,$n_2$,$n_3$), como por exemplo (1,2,3) e (2,1,3), que resultam no mesmo ν, mas em diferentes campos elétricos e magnéticos, ou seja, ondas diferentes:**

$$\vec{E}(x,y,z,t)=\vec{E}_o sen(k_1x)sen(k_2y)sen(k_3z)sen(2\pi\nu t)$$

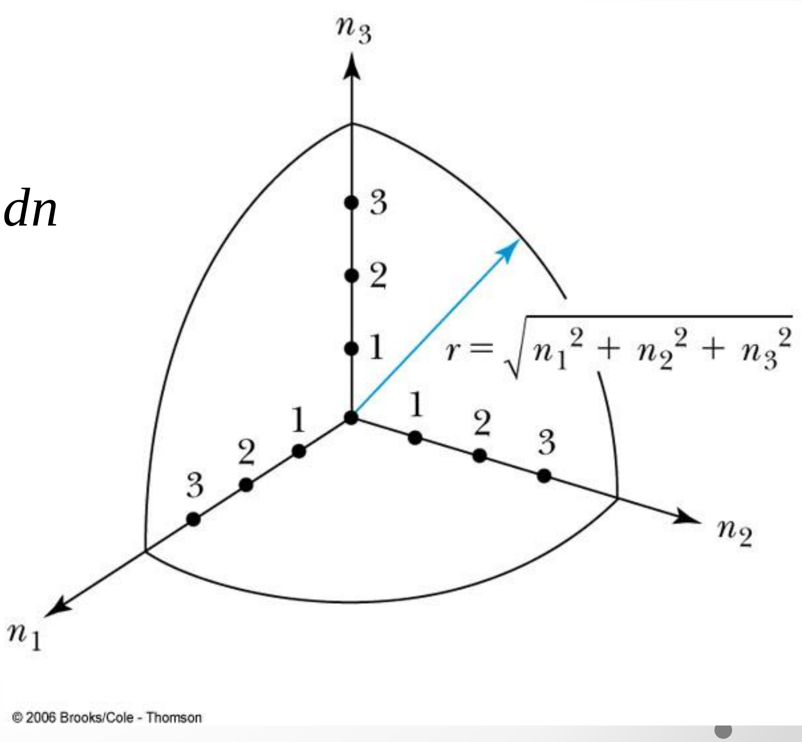
$$\vec{B}(x,y,z,t)=\hat{B}_o\frac{E_0}{c}sen(k_1x)sen(k_2y)sen(k_3z)sen(2\pi\nu t)$$

# Contagem das ondas estacionárias tridimensionais

- **Em uma caixa cúbica de lado L, as diferentes ondas estacionárias com mema frequencia podem ser contadas a partir do volume da casca esférica de largura dn da figura abaixo. Isto porque, diante dos infinitos valores dos números de $n_1$,$n_2$, e $n_3$, esta aproximação de espaço contínuo,**

$$\nu = \frac{c\pi}{2\pi L}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = \frac{cn}{2L}$$

$$\Rightarrow dN_{ondestc}(n) = dN_{ondestc}(\nu) = 2 \times \frac{1}{8} \times 4\pi n^2 dn$$




- **O número 2 vem do fato de haver duas possibilidades de ondas e stacionárias com mesma direção e sentido (duas polari-zações).**

# Contagem das ondas estacionárias tridimensionais

- **Observe que:**

$$dN_{ondestc}(n) = dN_{ondestc}(\nu) = 2 \times \frac{1}{8} \times 4\pi n^2 dn$$

- **E da relação (linear) entre n e $\nu$:**

$$\nu = \frac{cn}{2L} \Rightarrow d\nu = \frac{c}{2L} dn$$

$$dN_{ondestc}(\nu) = 2 \times \frac{1}{8} \times 4\pi \left[\frac{\nu 2L}{c}\right]^2 \left[\frac{2L}{c} d\nu\right] = 8\pi L \left[\frac{\nu L}{c}\right]^2 d\nu$$

# A densidade voluméatrica espectral
# dedução em aula

Assim, o número de ondas estacionárias com mesma frequencia entre $\nu$ e $\nu$+d$\nu$, por unidade de volume e de frequencia nesta caixa cúbica é dado por:

$$\frac{dN_{ondestc}(\nu)}{L^3 d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

- E portanto, no referencial de idéias já expostas, a densidade volumétrica de energia por unidade de frequência é

$$\rho_T(\nu) \equiv < \frac{dU_{EB}(\nu)}{dVd\nu} > = \frac{dN_{ondestc}(\nu)}{dVd\nu} < \varepsilon_{EB} > = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} < \varepsilon_T >$$

Este resultado é independente da forma da cavidade, e a caixa cúbica pode se pensada como um elemento de volume na cavidade!

# A densidade volumétrica espectral em termos de comprimento de onda

- A **densidade volumétrica da energia eletromagnética por unidade de elemento de comprimento de onda** em função do comprimento de onda:

$$\rho_T(\lambda) \equiv < \frac{dU_{EB}(\lambda)}{dVd\lambda} > = \frac{dN(\lambda)}{dVd\lambda} < \varepsilon_{EB} > = \frac{dN(\lambda)}{dVd\nu}\left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right| < \varepsilon_T > = \frac{8\pi}{\lambda^4} < \varepsilon_T >$$

$\frac{dN(\lambda)}{dVd\lambda}$ é **o número de ondas estacionárias com**

**comprimento de onda λ dentro de dλ** por unidade de volume e de dλ .

$< \varepsilon_T >$ é a **energia média da onda estacionária = média da energia de oscilação no material.**

# Resultados de Rayleigh e Jeans e a catástrofe do ultra-violeta - (demonstração em aula)

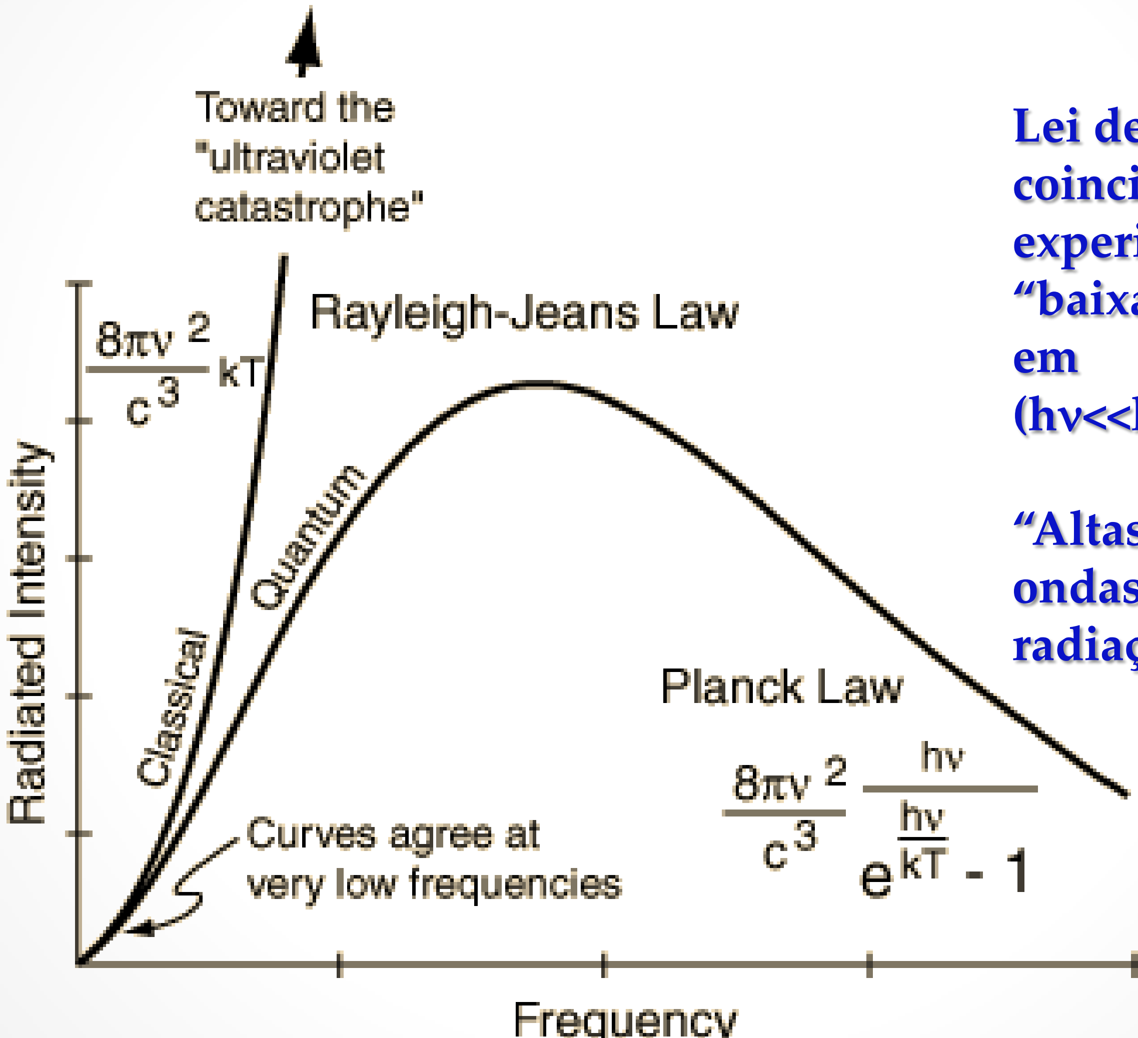
**A dotando a energia média da onda como a média das energias de oscilação unidimensional (variáveis contínuas) na mecânica estatística de Boltzmann, $<\varepsilon>=kT$, resulta para as radianças espectrais:**

$$R_T(\nu) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}kT \qquad R_T(\lambda) = \frac{c}{4}\rho_T(\lambda) = \frac{2\pi c}{\lambda^4}kT$$

$$\Rightarrow R_T = \int_0^\infty R_T(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty R_T(\nu)d\nu \to \infty$$

**Energia total infinita $\to$ catástrofe na Física!!!**

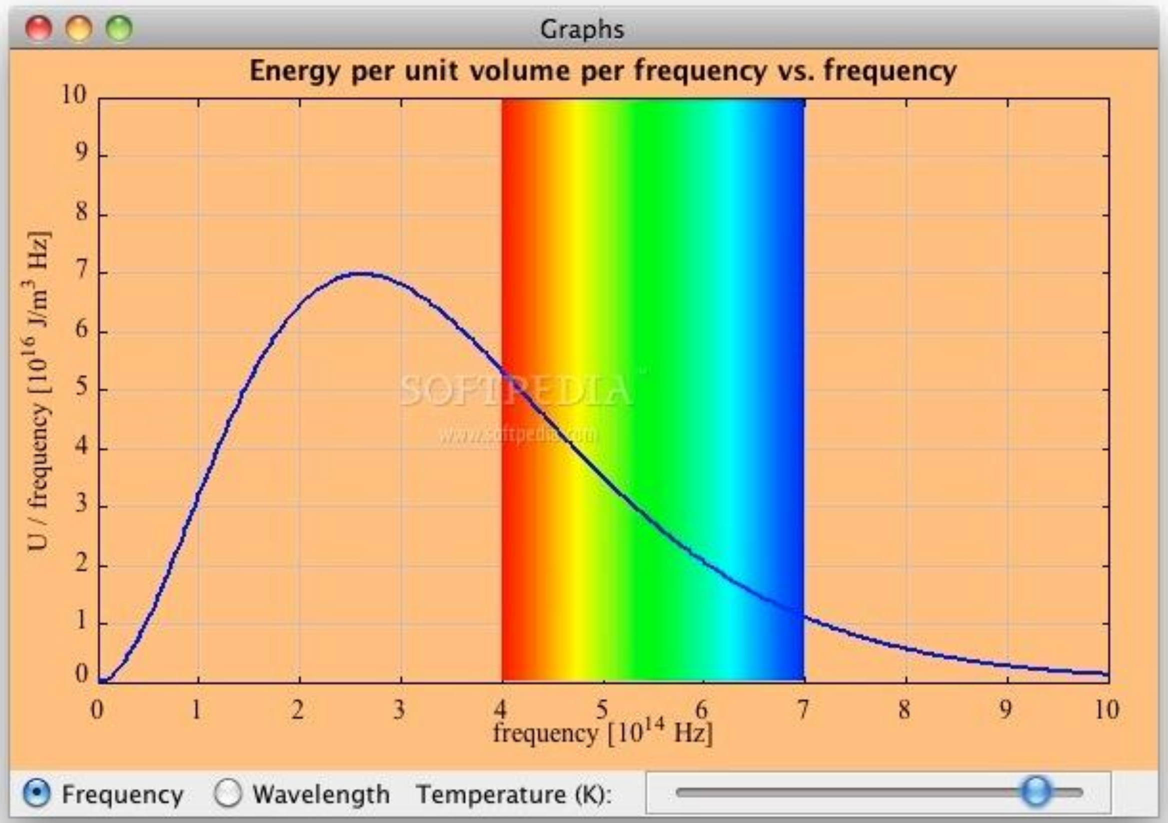
# Radiança espectral versus frequência e a catástrofe do ultravioleta




**Lei de Rayleigh-Jeans coincide com dados experimentais para "baixas" frequencias em qualquer T ($h\nu << kT$).**

**"Altas frequencias" nas ondas visíveis é a radiação ultravioleta.**

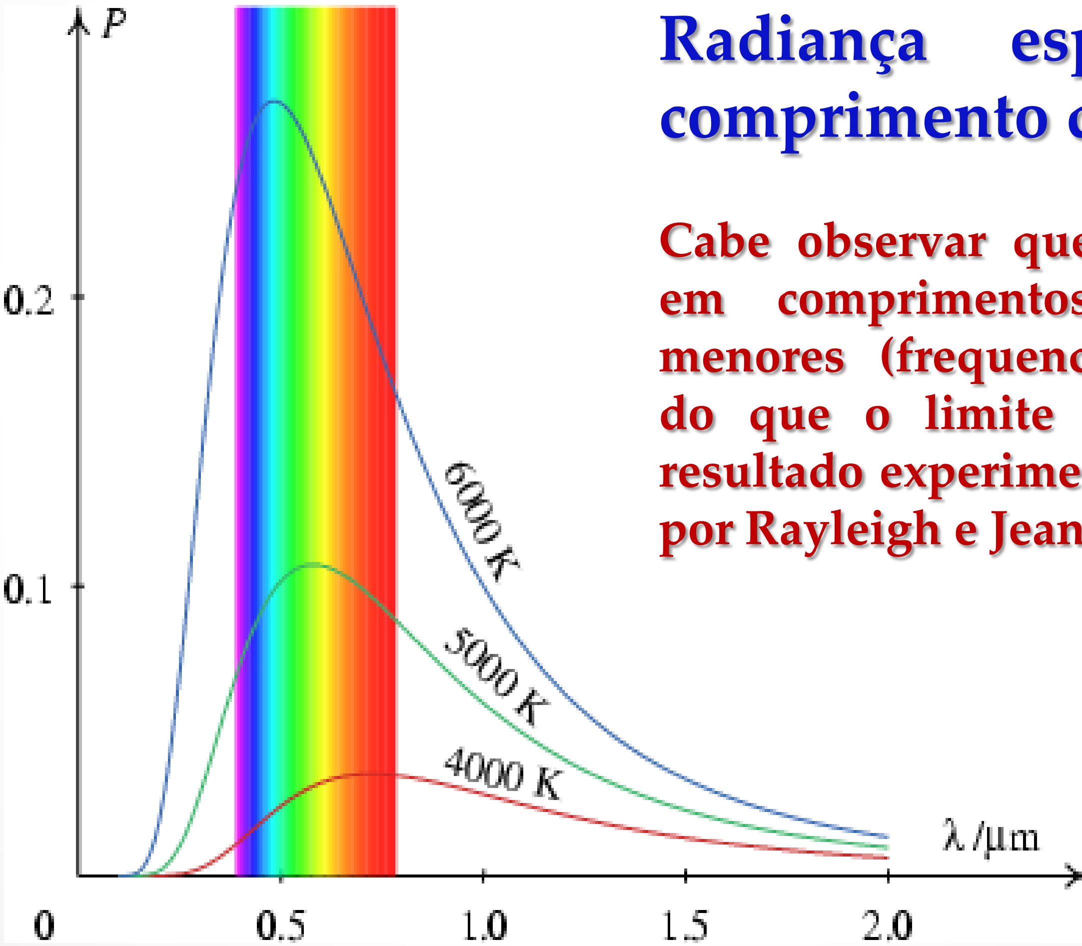
# *Corpo negro: radiação emitida*




**Radiança espectral versus a frequencia**

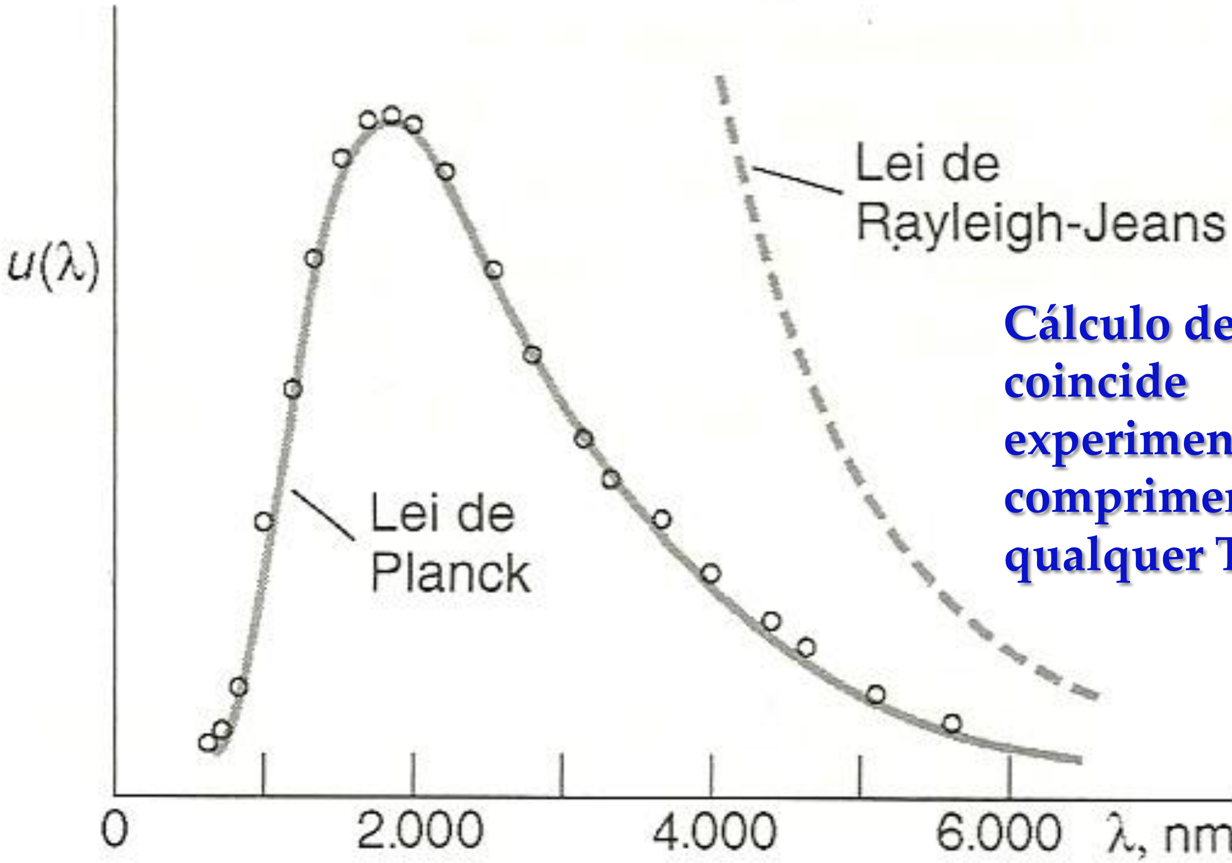
**"altas frequencias" no visível é o ultravioleta.**

# A razão do nome catástrofe do ultravioleta




**Radiança espectral versus comprimento de onda .**

**Cabe observar que o ultravioleta está em comprimentos de onda muito menores (frequencias muito maiores) do que o limite de coincidência do resultado experimental com o calculado por Rayleigh e Jeans.**



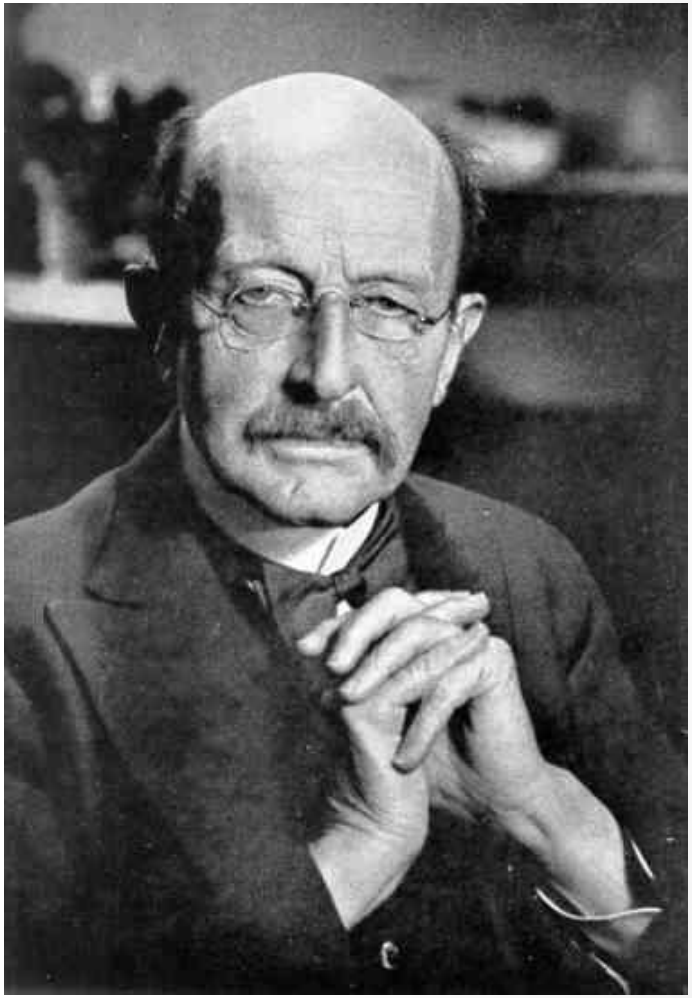

**Cálculo de Rayleigh-Jeans coincide com dados experimentais para "altos" comprimento de onda em qualquer T ($(hc/\lambda) \ll kT$).**

**Fig. 3-9** Comparação da lei de Planck e da lei de Rayleigh-Jeans com os resultados experimentais obtidos por W. W. Coblentz, por volta de 1915, para um buraco negro a $T = 1.600$ K. A escala do eixo vertical é linear. [*Adaptado de F. K. Richtmyer, E. H. Kennard e J. N. Cooper*, Introduction to Modern Physics, *6th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1969, com permissão.*]

**Figura do Tipler & Llewellyn**

# *Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 —1947) físico alemão, Nobel de Física em 1918.*

**1900 – Propõe que as oscilações no interior da matéria tem energias quantizadas: $\varepsilon = nh\nu$, o que resulta em energia média dependente da frequencia e da temperatura. Com isto se descreve o corpo negro ajustando uma única constante que leva o seu nome, constante de Planck h.**

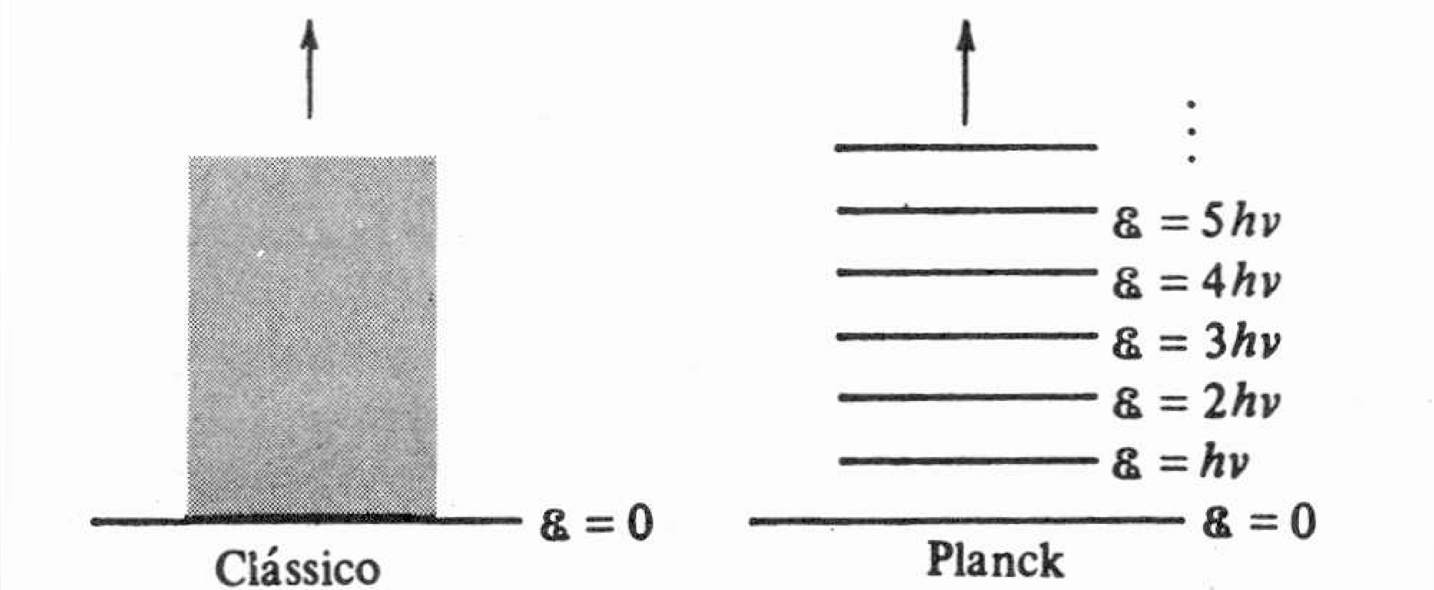


***Obs. Ele não acreditou tanto assim em sua própria proposta !!! Mas o tempo futuro mostrou que atirou onde viu, e acertou também onde não viu!***

# Diagrama de energias de sistemas de muitos osciladores harmônicos unidimensionais – energias contínuas (clássico) e discretas (Planck)

- **A energia das oscilações quantizada (Planck - 1900): $\varepsilon = n\varepsilon_o = nh\nu$, que resulta em $<\varepsilon>$ dependente da frequencia (demonstrado em aula anterior).**

$$< \varepsilon_T^P > = \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_o}{kT}} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{h\frac{c}{\lambda}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$



# A diferença de energia quantizada dos osciladores entre o estado n e o estado n+1 , para qualquer frequencia

| n | $\Delta\varepsilon/\varepsilon = 1/n$ | % |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 100 |
| 10 | 0,1 | 10 |
| 100 | 0,01 | 1 |
| 500 | 0,002 | 0,2 |
| 1000 | 0,001 | 0,1 |

# Resultados de Planck

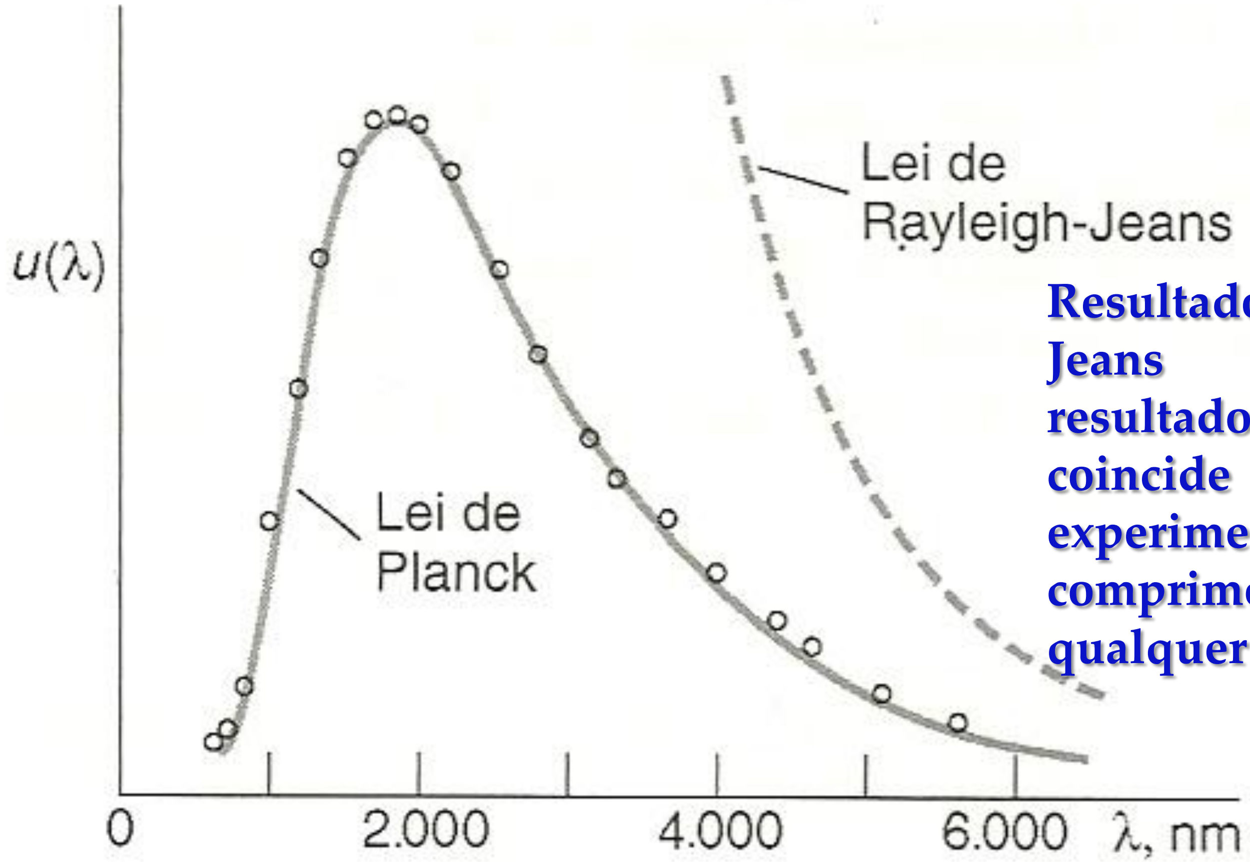
- **O valor da energia média** para energia quantizada de oscilação, e substituindo, no resultado de aula anterior $\varepsilon_o = h\nu$ :

$$< \varepsilon_T^P > = \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_o}{kT}} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{h\frac{c}{\lambda}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

- Multiplicando **esta energia média dependente da frequencia** pelo número de ondas estacionárias do eletromagnetismo:

$$R_T^P(\nu) = \frac{2\pi\nu^3}{c^2} \frac{h}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad R_T^P(\lambda) = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5} \frac{h}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

- **Planck ajustou a constante h para dar o resultado experimental: h = $6{,}62 \times 10^{-34}$J.s = h = $4{,}14 \times 10^{-15}$eV.s**




**Resultado de Rayleigh-Jeans coincide com resultado de Planck (que coincide com o experimental) para "altos" comprimento de onda em qualquer T (($hc/\lambda$)<<kT).**

**Fig. 3-9** Comparação da lei de Planck e da lei de Rayleigh-Jeans com os resultados experimentais obtidos por W. W. Coblentz, por volta de 1915, para um buraco negro a $T = 1.600$ K. A escala do eixo vertical é linear. [*Adaptado de F. K. Richtmyer, E. H. Kennard e J. N. Cooper*, Introduction to Modern Physics, *6th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1969, com permissão.*]

**Figura do Tipler & Llewellyn**

# Radiação cósmica de fundo

- **Este tema deu dois prêmios Nobel de Física: 1978 e 2006**

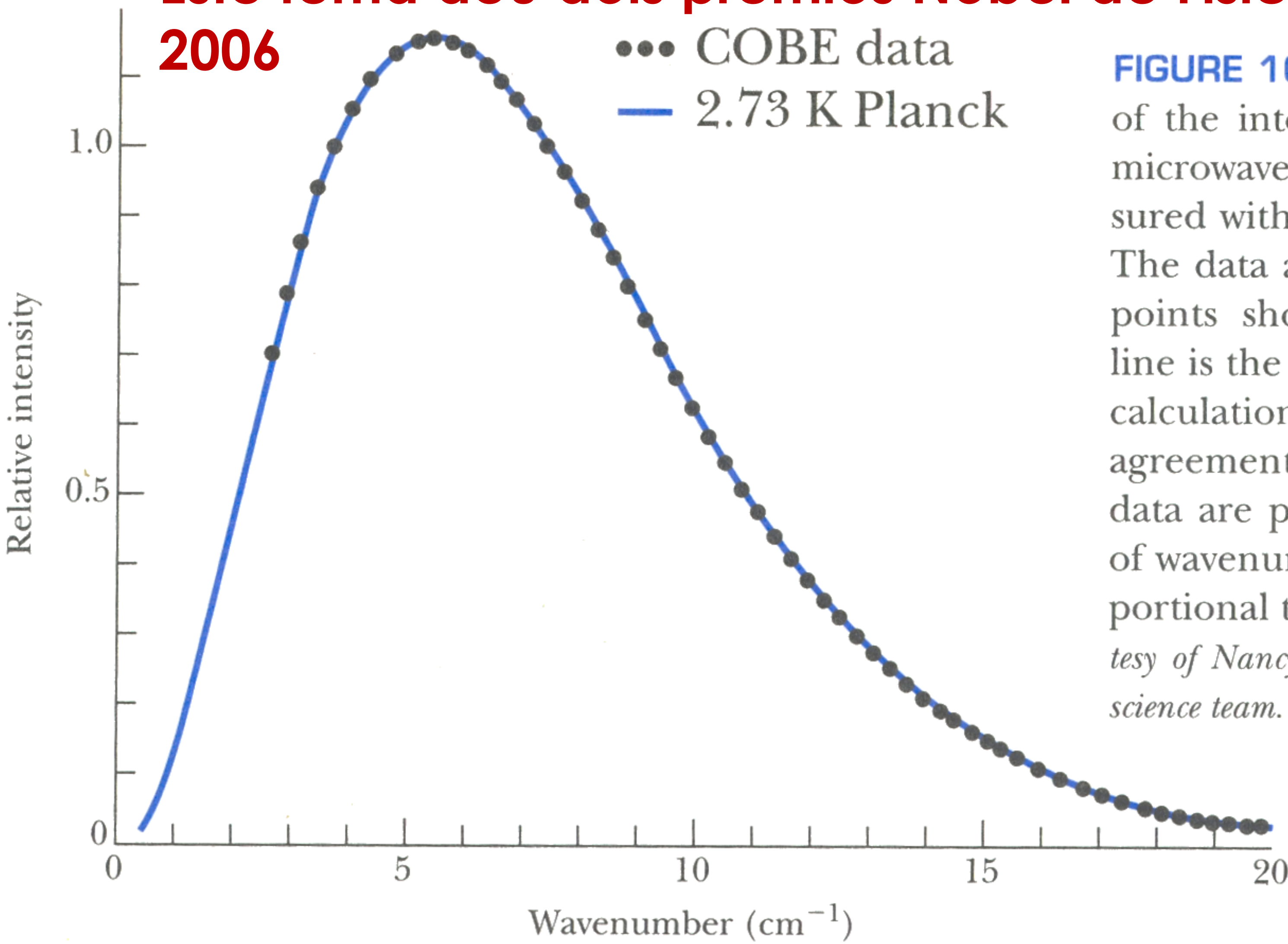



**FIGURE 16.15** The spectrum of the intensity of the cosmic microwave background as measured with the COBE satellite. The data are smaller than the points shown, and the solid line is the blackbody radiation calculation for 2.73 K. The agreement is spectacular. The data are plotted as a function of wavenumber (inversely proportional to wavelength). *Courtesy of Nancy Burgess, NASA COBE science team.*

# Resultados de Planck

$$< \varepsilon_T > = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{h\frac{c}{\lambda}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

$$R_T(\nu) = \frac{2\pi\nu^3}{c^2}\frac{h}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad R_T(\lambda) = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5}\frac{h}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

- **Observações importantes:**
- **1. a radiança espectral do corpo negro é contínua;**
- **2. Saiba mostrar que quando $h\nu \ll kT$, os resultados de Planck coincidem com os clássicos para a energia média de oscilador unidimensional (kT de Boltzmann) e para a radiança do corpo negro (expressão de Rayleigh-Jeans).**

# A lei de Stefan-Boltzmann a partir da radiança espectral de Planck.

**Discutido em aula. Mostre!**

- **A radiança total é a integral da espectral. Geometricamente é a área sob a curva em termos da temperatura**, e portanto vale:

$$R_T = \int_0^\infty R_T(\nu)d\nu = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}T^4 = 5{,}6705\times 10^{-8}T^4\,\frac{W}{m^2}$$

- ***Observação: Foi usado o resultado da integral (tabela):***

$$\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

# A lei de deslocamento de Wien a partir da radiança espectral de Planck.

## Discutido em aula. Mostre!

- **Determinação** do **comprimento de onda mais provável,** ou seja, **no máximo da radiança espectral.**

$$\frac{\partial R_T(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

- **Cuidado:** se chega em **equação transcedental (não tenha medo de nome feio!)**, **que só tem solução numérica.**

$$5\frac{[e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1]}{\frac{hc}{\lambda kT}e^{\frac{hc}{\lambda kT}}} = 1 \Rightarrow e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} + \frac{hc}{5\lambda kT} = 1$$

$$e^{-x} + \frac{x}{5} = 1$$

$$\Rightarrow x = 4{,}965$$

$$\Rightarrow \frac{hc}{\lambda kT} = 4{,}966 \Rightarrow \lambda_{+p}T = \frac{hc}{4{,}966k} = 2{,}8998\times 10^{-3}\, mK$$

$$\nu(\lambda_{+p}) = c/\lambda_{+p} = 1{,}04\times 10^{11}(Hz/K)T$$

# A frequencia mais provável a partir da radiança espectral de Planck – FAÇA!

- **Determinação da frequencia mais provável**, ou seja, no máximo da radiança espectral.

$$\frac{\partial R_T(\nu)}{\partial \nu} = 0$$

- **Cuidado: se chega em equação transcedental** (não tenha medo de nome feio!)

$$\nu_{+p} = 0{,}59 \times 10^{11} (Hz/K)T$$

$$\nu(\lambda_{+p}) = c/\lambda_{+p} = 1{,}04 \times 10^{11} (Hz/K)T$$

- ***Ou seja, a frequencia mais provável não é a frequencia do comprimento de onda mais provável! A relação entre a frequencia e comprimento de onda não é linear. Entenda o significado físico disto na distribuição!***

# Resultados de Planck

- **1. Qual a grandeza física que você conhece que tem a unidade de h: energia ×segundos?**

- **2. Será que esta grandeza h é de valor pequeno ou grande comparado com as grandezas de mesma unidade que você conhece no mundo macroscópico?**

- **$h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ J.s = $h = 4{,}1410^{-15}$ eV.s)**

# QUESTÃO

- 1. As “imagens” com infravermelho, ou “imagens térmicas” do corpo humano, são detectadas no comprimentos de onda $7\mu m < \lambda < 14\mu m$. Dê uma “explicação” usando resultados da radiação por efeito de temperatura (corpo negro).