

## 6. Espaço de estados a tempo discreto

### 6.1 Introdução

É um fato bem conhecido que é possível converter uma equação diferencial de ordem  $n$  em um sistema de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem

Exemplo:

$$\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) - y(t) = u(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{y}(t) = u(t) + y(t) + 3\dot{y}(t)$$

Seja  $x_1(t) = y(t)$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

A equação é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + 3x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

OBS: O vetor  $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$  é chamado de vetor

de estados, e  $u(t)$  é chamado de vetor de entradas.

Portanto um sistema dinâmico de qualquer ordem pode ser representado por uma equação diferencial

vetorial de primeira ordem.

O estado de um sistema dinâmico é um conjunto de quantidades que (na ausência de excitação externa) completamente determina a evolução do sistema

OBS: O conjunto não é único, mas o seu número é.  
(esse número é a ordem do sistema)

Assim, no caso geral temos

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

No caso do nosso curso (SLIT)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$u \in \mathbb{R}^m$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Podemos definir ainda um vetor de saídas (que pode ser o próprio vetor de estados ou um subconjunto ou uma combinação linear), dado por

$$y(t) = Cx(t) ; y \in \mathbb{R}^p$$

$$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

OBS: Pode ser  $y(t) = Cx(t) + Du(t)$



Podemos entender "p" como o número de sensores monitorando a planta (pode ser mais que um)

### Vantagens

\* Dispensa artifícios matemáticos (e.g. Transformada de Laplace) e seus problemas (e.g. condições iniciais)

\* O caso multivariável vem naturalmente (se presta muito melhor para problemas MIMO)

\* A descrição matricial é mais adequada a tratamentos computacionais

\* Tem solução analítica fechada:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

\* Para o caso SISO pode ser diretamente relacionado a uma função de transferência

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

### 6.2 A versão discreta

Para o caso SLIT, a versão discreta é a seguinte:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$y(k) = C x(k)$$

$$u \in \mathbb{R}^m$$

$$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$y \in \mathbb{R}^p$$

$$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

A solução da equação:

Note que

$$x(1) = \Phi x(0) + \Gamma u(0)$$

$$x(2) = \Phi x(1) + \Gamma u(1) = \Phi^2 x(0) + \Phi \Gamma u(0) + \Gamma u(1)$$

⋮

$$x(k) = \Phi^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^{k-i-1} \Gamma u(i)$$

Relação com a função de transferência discreta:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

↓ (p/ c.l. nulas)

$$zX(z) = \Phi X(z) + \Gamma U(z) \Rightarrow (zI - \Phi)X(z) = \Gamma U(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{X(z)}{U(z)} = (zI - \Phi)^{-1} \Gamma$$

$$\text{logo } \frac{Y(z)}{U(z)} = C (zI - \Phi)^{-1} \Gamma$$

Estabilidade:

Pode-se mostrar que o sistema é estável se e somente se todos os autovalores de  $\Phi$  se situarem dentro do círculo unitário no plano complexo.

Os autovalores são as raízes do polinômio característico, dado por  $\det[(zI - A)]$

Os autovalores de  $\Phi$  são também os polos do sistema.



### 6.3 Equivalente discreto

Ideia geral: Obter um sistema discreto que tenha comportamento similar ao de um sistema contínuo.

Veremos somente um único método (existem diversos)

Seja  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$   
 $y(t) = Cx(t)$

A solução é

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

para  $t_0 = KT$  e  $t = (K+1)T$  temos

$$x(K+1) = e^{AT} x(K) + \int_{KT}^{(K+1)T} e^{A((K+1)T-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Vamos fazer a seguinte aproximação:

$$u(\tau) = u(KT) \quad \text{p/ } KT \leq \tau < (K+1)T$$

(equivale a passar  $u(t)$  por um ZOH)

daí

$$x(K+1) = e^{AT} x(K) + \int_{KT}^{(K+1)T} e^{A((K+1)T-\tau)} d\tau \cdot B u(K)$$

fazendo  $\eta = (K+1)T - \tau$  resulta

$$x(k+1) = \underbrace{e^{AT}}_{\Phi} x(k) + \underbrace{\int_0^T e^{A\eta} d\eta B}_{\Gamma} u(k)$$

Note que os vetores  $x(k)$  e  $x(t)$  representam as mesmas quantidades medidas nas mesmas unidades (a menos da aproximação de  $u(t)$ ,  $x(k) = x(t) \Big|_{t=kT}$ )

Portanto  $y(k) = \underbrace{C}_{\text{mesma matriz do caso contínuo.}} x(k)$

Ou seja,

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{array} \xrightarrow{T} \begin{array}{l} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{array}$$

com  $\Phi = e^{AT} = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \dots$

$$\Gamma = \int_0^T e^{A\eta} d\eta B = \int_0^T (I + A\eta + \frac{A^2 \eta^2}{2!} + \dots) d\eta B$$

OBS.

- i) A única aproximação foi considerar  $u(t)$  constante por trechos (equivalente ao método do item 2.8)
- ii) Salvo casos particulares, a equivalência é melhor feita via computador. (há muitas contas)



## Exemplo

Seja  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  convertido em espaço de

estados e discretizado com  $T=0,1s$

i) Convertendo em espaço de estado

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + s} \Rightarrow s^2 Y(s) + s Y(s) = U(s)$$

↓

$$\ddot{y}(t) = u(t) - \dot{y}(t)$$

Seja  $x_1(t) = y(t)$  e  $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \end{cases} \Rightarrow \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u(t)$$

Como  $y(t) = x_1(t)$  :  $y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C x(t)$

(este é um caso em que é difícil fazer à mão)

$$E = I + A + \frac{A^2 T^2}{2} + \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0,0952 \\ 0 & 0,9048 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \int_0^T (I + A\eta + \frac{A^2 \eta^2}{2} + \dots) d\eta B = \begin{bmatrix} 0,004837 \\ 0,09516 \end{bmatrix}$$

OBS: Usando o comando 'c2d' do Matlab

com opção 'zoh'

(cuidado: o comando às vezes embaralha as componentes do estado)

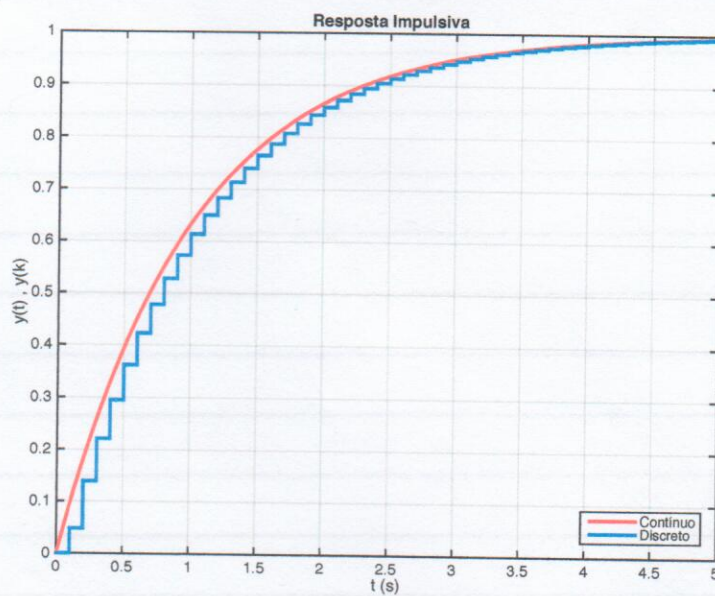
Assim

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

T

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0,0952 \\ 0 & 0,9048 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0,004837 \\ 0,09516 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$



Veja ex-c2d.m



## 6.4 Controle por realimentação de estado

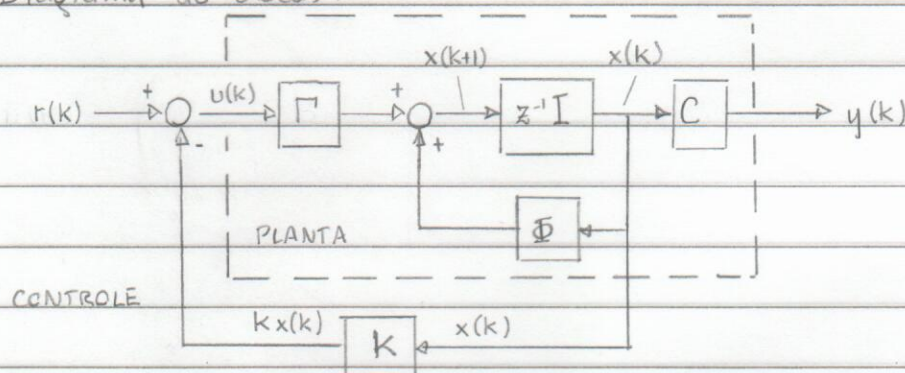
O vetor  $x(k)$  possui, a princípio, todas as informações sobre a dinâmica do sistema, portanto faz todo sentido utilizá-lo para controlar o sistema.

Seja a seguinte lei de controle:

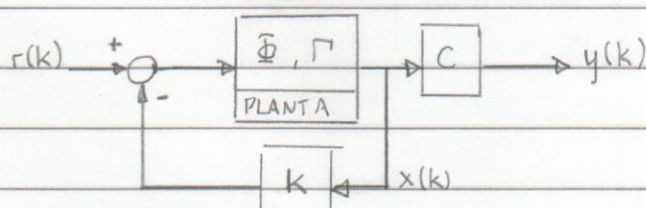
$$u(k) = r(k) - Kx(k) \quad ; \quad r(k) \in \mathbb{R}^m \text{ (setpoint)}$$

$$K \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Diagrama de blocos:



ou



Temos que

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \Rightarrow x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma r(k) - \Gamma K x(k)$$

$$\Rightarrow x(k+1) = (\Phi - \Gamma K) x(k) + \Gamma r(k)$$

A dinâmica do sistema em malha fechada é dada pelos autovalores da matriz  $(\Phi - \Gamma K)$  (os polos do sistema)

A princípio uma escolha adequada da matriz  $K$  pode fazer

$\Phi$  instável  $\rightarrow (\Phi - \Gamma K)$  estável

$\Phi$  lento  $\rightarrow (\Phi - \Gamma K)$  rápido

Cabe então a seguinte questão: Dados  $(\Phi, \Gamma)$ , é possível através apenas da matriz  $K$  impor os autovalores da matriz  $(\Phi - \Gamma K)$ ?

Resposta: O par  $(\Phi, \Gamma)$  tem de ter a propriedade de permitir isso. A essa propriedade denominamos controlabilidade (ou controlabilidade completa)

Supondo que o par  $(\Phi, \Gamma)$  seja controlável, como podemos impor os polos de  $(\Phi - \Gamma K)$ ?

Os polos de  $(\Phi - \Gamma K)$  são as raízes do polinômio característico da matriz, isto é

$$\det(zI - \Phi + \Gamma K) = 0$$

Portanto basta escolher quais devem ser as raízes do polinômio e encontrar os valores de  $k_{ij}$ ;  $i=1, \dots, m$ ;  $j=1, \dots, n$  tais que a matriz

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & \dots & \dots & k_{mn} \end{bmatrix}$$

satisfaga a equação



Salvo os casos mais simples, é preferível resolver o problema computacionalmente

No Matlab há dois comandos:

ACKER (fórmula clássica, somente ordem baixa)

PLACE (algoritmo avançado, estado da arte)

Exemplo

A planta  $G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  do último exemplo é instável

Vamos estabilizá-la, fazendo com que os polos da malha fechada sejam tais que  $\xi = 0,45$  (20% sobressinal) e  $\omega_n = 2,0$  (tempo de acomodação 2% = 4,44) para  $T = 0,1s$ .

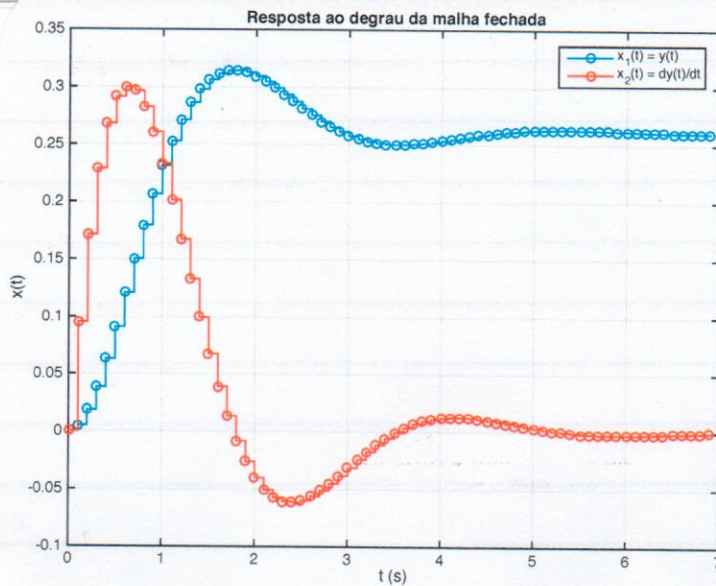
$$\text{Temos que } \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0,0952 \\ 0 & 0,9048 \end{bmatrix}; \Gamma = \begin{bmatrix} 0,004837 \\ 0,09516 \end{bmatrix}$$

$$\text{Polos desejados: Em } |s| \quad s_c = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow s_c = -0,9 \pm j1,7861$$

$$\text{Em } |z| \quad z_c = e^{s_c T} \Rightarrow \\ \Rightarrow z_c = 0,8994 \pm j0,1624$$

$$\text{Comando place: } \gg K = \text{place}(\Phi, \Gamma, z_c) \\ \text{resulta } K = [3,8339 \quad 0,9195]$$

Aplicando um degrau unitário em  $r(k)$ :



Veja ex\_sf.m

Note que o sistema apresenta erro de regime ao degrau, pois

$$r(k) = 1 \quad (\text{degrau unitário})$$

e

$$x(k+1) = (\Phi - \Gamma K) x(k) + \Gamma$$

no regime  $x(k) = x(k+1) = x_{\infty}$ , daí

$$\begin{aligned} x_{\infty} &= (\Phi - \Gamma K) x_{\infty} + \Gamma \Rightarrow (I - \Phi + \Gamma K) x_{\infty} = \Gamma \\ \Rightarrow x_{\infty} &= (I - \Phi + \Gamma K)^{-1} \Gamma \quad \text{ou} \quad y_{\infty} = C (I - \Phi + \Gamma K)^{-1} \Gamma \\ &\quad (\text{assumindo que a matriz seja inversível}) \end{aligned}$$

Como em geral não se pode dizer que  $y_{\infty} = 1$ , conclui-se que essa técnica não garante que o erro de regime na saída seja nulo.

No nosso caso,  $y_{\infty} = 0,2608$



## 6.5 Controlabilidade

### Caso discreto x Caso contínuo

O problema de impor os autovalores de  $(\Phi - \Gamma K)$  manipulando-se  $K$  é puramente algébrico e é igual ao do caso contínuo, portanto todos os resultados e propriedades sobre controlabilidade do caso contínuo são iguais ou similares aos do caso discreto.

### Resultados

As seguintes afirmações são equivalentes:

- i) Existe  $K$  tal que os autovalores de  $(\Phi - \Gamma K)$  podem ser atribuídos em qualquer valor desejado.
- ii) Existe uma sequência de entradas  $\{u(0); u(1); u(2); \dots, u(N-1)\}$  capaz de transferir o sistema dado por  $x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$  de um estado qualquer  $x(0)$  para um estado desejado  $x(N)$ .

iii) A matriz de controlabilidade

$$C = [\Gamma \mid \Phi \Gamma \mid \Phi^2 \Gamma \mid \dots \mid \Phi^{N-1} \Gamma]$$

tem posto pleno

iv) O par  $(\Phi, \Gamma)$  é controlável

Estabilizabilidade

Caso seja possível alocar apenas alguns polos de  $(\Phi - \Gamma K)$ , e não todos como seria desejável, o sistema não é controlável. Porém o caso em que os polos não-alocáveis são estáveis é uma condição mais fraca que também é de interesse.

Se existe  $K$  tal que é possível ter  $(\Phi - \Gamma K)$  estável, o par  $(\Phi, \Gamma)$  é dito estabilizável.

Existem sistemas não-controláveis?

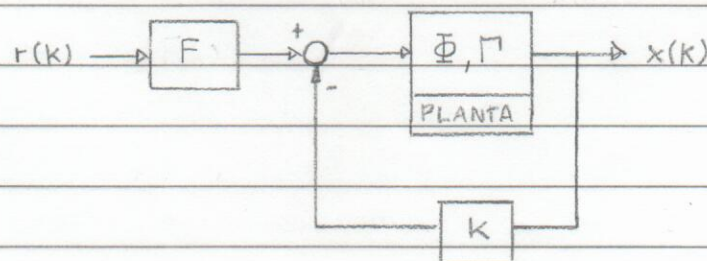
Sistemas não-controláveis, mas estabilizáveis são relativamente comuns. Em casos práticos, não-controlabilidade pode indicar que faltam atuadores ou que há estados redundantes (modelagem inadequada)

6.6 Realimentação de estado e erro de regime

Como vimos, controle por realimentação de estado não garante erro nulo ao degrau. Há variações no esquema de controle que permitem resolver esse problema, caso necessário.

a) Pré-filtragem (rastrear  $y$ )

Considere o seguinte esquema de controle



$F \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é  
um pré-filtro.



É fácil verificar que para  $r(k) = r$  (referência constante)

$$y_{\infty} = C(I_n - \Phi + \Gamma K) \Gamma F r$$

Para termos  $y_{\infty} = r$ , é necessário e suficiente que

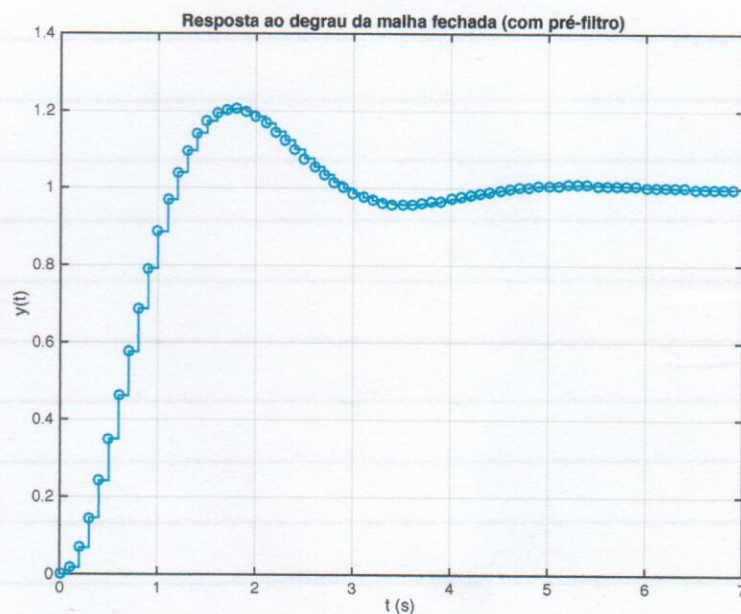
$$C(I_n - \Phi + \Gamma K) \Gamma F = I_p$$

$$\text{daí } F = [C(I_n - \Phi + \Gamma K)^{-1} \Gamma]^{-1}$$

(assumindo a matriz inversível)

Exemplo (continuando)

Para o exemplo anterior:  $F = 3,8339$



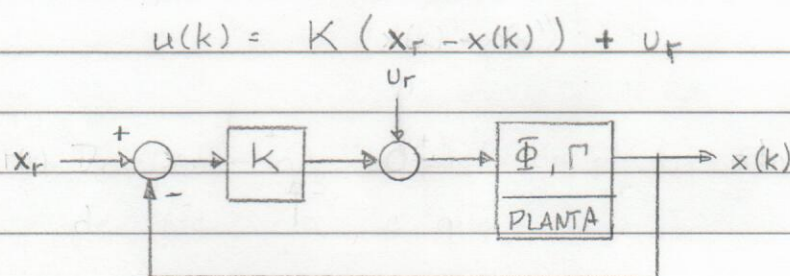
OBS \* Note que o pré-filtro apenas amplifica o sinal de referência, e não afeta a dinâmica do sistema (na verdade não estamos eliminando o erro de regime)

\*  $F$  é calculado com base em  $C, \Phi, \Gamma$  ( $K$  depende de  $\Phi$  e  $\Gamma$ ). Se esses parâmetros forem imprecisos ou variarem, o esquema deixa de funcionar.

\* Note que  $y(k)$  somente é capaz de rastrear a referência  $r(k)$  quando ela parar de variar, ou seja o erro é nulo só para setpoint constante.

### b) Feedforward (rastrea $x$ e $y$ )

Considere o seguinte esquema de controle



Desejamos que o controle atinja o estado de referência  $x_r$ , isto é

$$x_{\infty} = x_r$$

Para isso é necessário um termo extra  $u_r$  para manter o sistema no estado de referência  $x_r$ , isto é  $x(k) \rightarrow x_r$  quando  $u(k) \rightarrow u_r$ .

OBS: Caso esse termo não existisse, quando  $x(k) \rightarrow x_r$ , teríamos  $u(k) \rightarrow 0$

Somente uma planta com integradores é capaz de ter  $x(k) \rightarrow x_{\infty} \neq 0$  para  $u(k) \rightarrow 0$ , e mesmo nesse caso, não necessariamente  $x_{\infty} = x_r$



Além disso desejamos que no regime a saída da planta siga a referência (como no item (a)), ou seja:

$$y_{\infty} = Cx_{\infty} = Cx_r = r$$

No regime permanente

$$\begin{cases} x_{\infty} = \Phi x_{\infty} + \Gamma u_{\infty} \\ y_{\infty} = C x_{\infty} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_r = \Phi x_r + \Gamma u_r \\ y_r = C x_r \end{cases}$$

Como  $x_r$  e  $u_r$  dependem de  $r$ , sejam

$$\begin{cases} x_r = F'_x r \\ u_r = F_u r \end{cases}$$

daí

$$\begin{cases} F'_x = \Phi F'_x r + \Gamma F_u r \Rightarrow (\Phi - I)F'_x + \Gamma F_u = 0 \\ r = C F'_x r \Rightarrow C F'_x = I \end{cases}$$

para se obter  $F'_x$  e  $F_u$  basta resolver o sistema

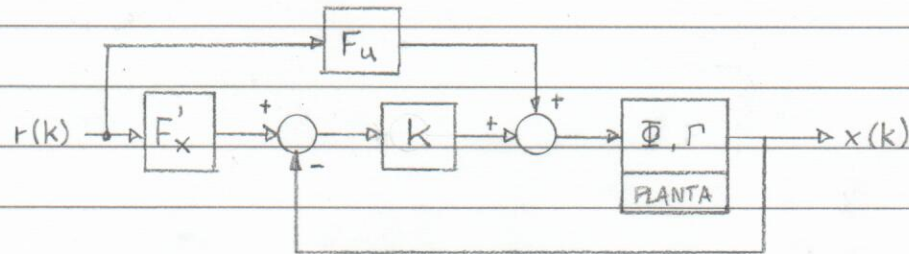
$$\begin{bmatrix} (\Phi - I) & \Gamma \\ C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F'_x \\ F_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Caso a matriz seja inversível:

$$\begin{bmatrix} F'_x \\ F_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Phi - I) & \Gamma \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

( $m=p$  é uma condição necessária)

E o esquema de controle fica

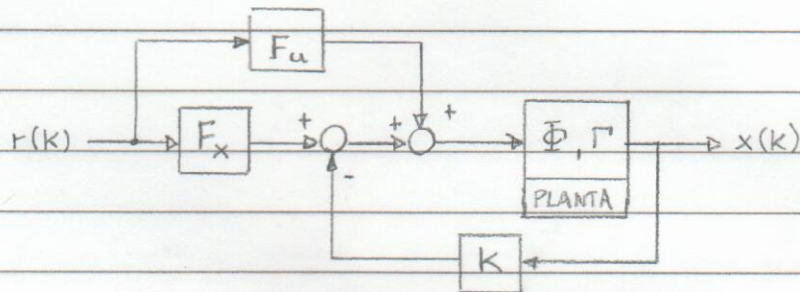


Como  $u(k) = K(x_r - x(k)) + u_r = K(F'_x r - x(k)) + F_u r$ ,  
podemos escrever

$$u(k) = F_x r - Kx(k) + F_u r$$

$$\text{com } F_x = KF'_x$$

e o esquema fica



OBS: \* No esquema de controle,  $F_x$  é um pré-filtro e  $F_u$  o ganho de uma malha de feedforward

\* Note que  $F_x, F_u$  dependem de  $C, \Phi, \Gamma$ . Se esses parâmetros estiverem incorretos ou variarem, o esquema deixa de funcionar.

\* Como no caso anterior, o esquema só garante erro nulo para setpoint constante.



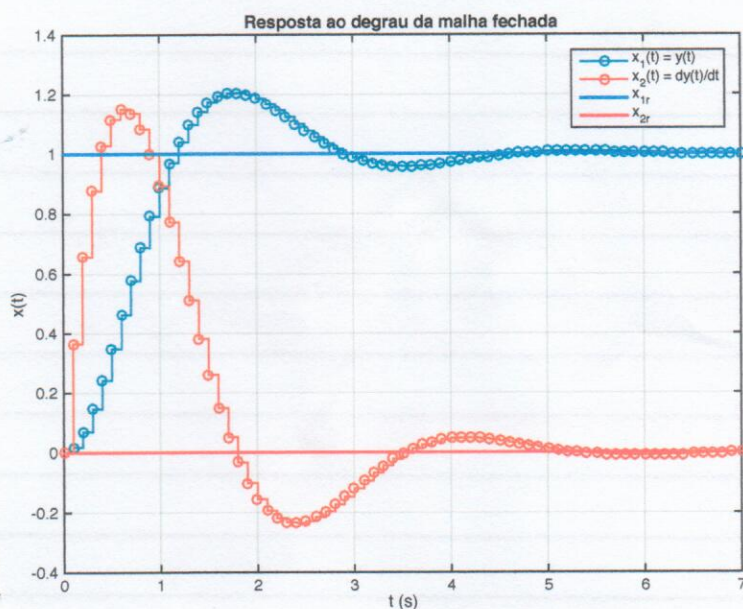
Exemplo (continuando)

Para o exemplo anterior:  $F_x' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  ;  $F_u = 0$

ou

$F_x = -3,8339$  ;  $F_u = 0$

Note que  $F_u = 0$  pois o sistema é de tipo 1 (portanto o estado pode ser diferente de zero mesmo quando  $u = 0$ ). O termo nulo de  $F_x'$  aparece por causa da dinâmica do sistema (como  $\dot{x}_2 = x_1$ ; se  $x_1 = \text{cte}$ , então  $x_2 = 0$ )



Ver ex\_sf\_ff\_1.m

Outro exemplo (mais apropriado)

Seja o sistema 
$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,3 \\ 0,1 & 0,5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$T = 0,1s$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

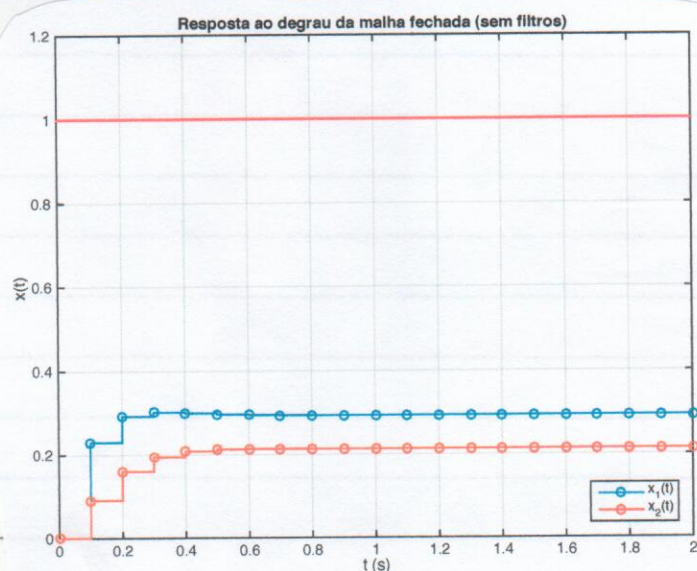
Os polos do sistema são:  $0,6 \pm j0,1414$  ( $\xi = 0,9021$ ;  $\omega_n = 5,363$ )

Desejamos que a malha fechada seja duas vezes mais rápida, isto é queremos  $\xi = 0,9021$  e  $\omega_n = 10,726$

Para tanto os polos desejados são:  $0,34 \pm j0,1697$

Daí 
$$K = \begin{bmatrix} 0,3600 & -0,1303 \\ -0,0697 & 0,1600 \end{bmatrix}$$

Note o erro de regime:



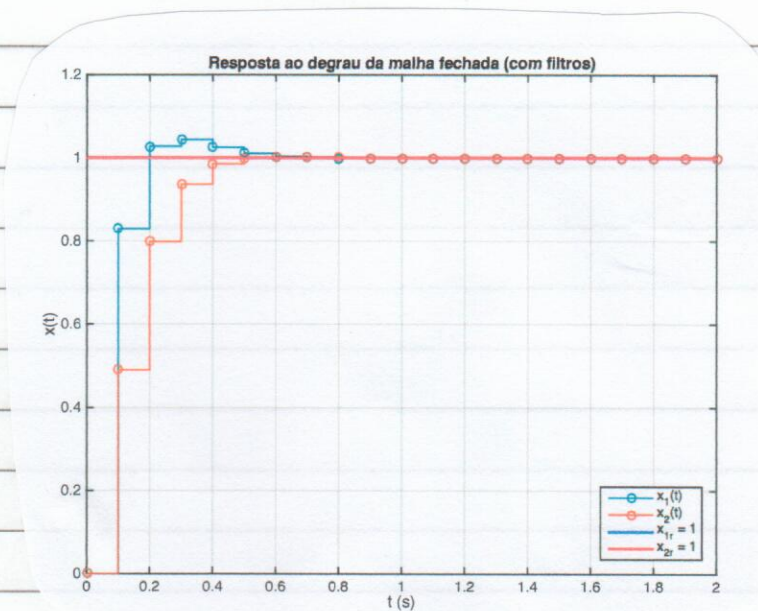


Projetando os filtros:

$$F_u = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 \\ -0,1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$F_x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad F_x = \begin{bmatrix} -0,3600 & 0,1303 \\ 0,0697 & -0,1600 \end{bmatrix}$$

Com isso



Veja ex\_sf\_ff\_2.m

### c) Adição de integradores (aumenta o "tipo" do sistema)

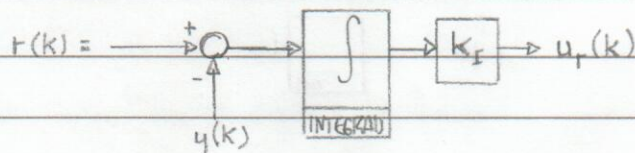
A adição de um integrador ao controle permite melhorar bastante o desempenho do sistema em relação ao erro de regime.

Considere novamente o seguinte controle:

$$u(k) = K(x_r - x(k)) + u_r$$

Em vez de calcularmos um vetor  $u_r$  que mantém o sistema no estado desejado para uma referência constante, poderíamos variar dinamicamente  $u_r$  para que se ajustasse sempre ao valor necessário.

Isso é feito comumente. Basta integrar o sinal de erro e multiplicar por um ganho  $K_I$ .



OBS: Integrador discreto

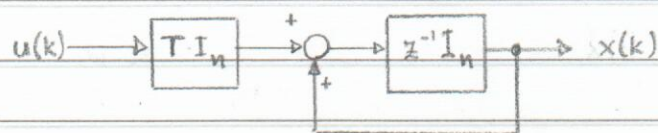
$$\dot{x}(t) = u(t) \quad \text{ou} \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\text{com } A = 0_n \text{ e } B = I_n$$

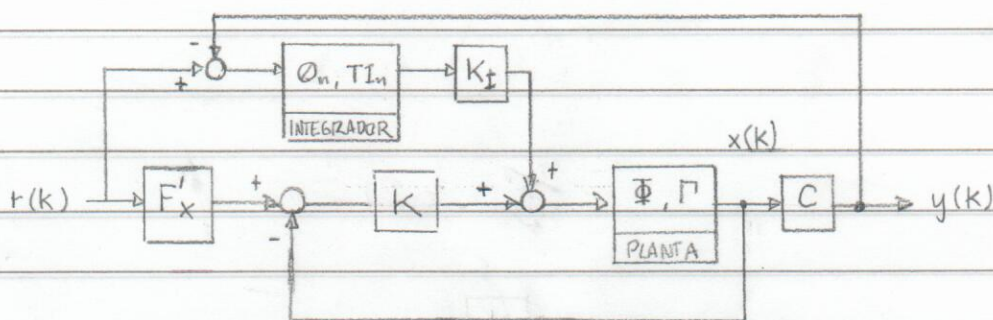
$$\text{logo } \Phi = e^{AT} = e^{0_n T} = I_n$$

$$F = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B = \int_0^T I_n d\tau \cdot I_n = T \cdot I_n$$





Com isso o esquema de controle completo fica



O ganho  $K_I$  ajusta a velocidade com que o erro será anulado

Integrador:  $x_I(k+1) = x_I(k) + T(r(k) - y(k)) = x_I(k) + T(r(k) - Cx(k))$

Sistema controlado:  $x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma(K_I x_I(k) + K(F_x' r(k) - x(k)))$   
 $= (\Phi - \Gamma K)x(k) + \Gamma K_I x_I(k) + \Gamma K F_x' r(k)$

ou (lembrando que  $m=p$ )

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_I(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Phi - \Gamma K) & \Gamma K_I \\ -TC & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_I(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma K F_x' \\ TI_m \end{bmatrix} r(k)$$

$$\text{com } \begin{bmatrix} (\Phi - \Gamma K) & \Gamma K_I \\ -TC & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & 0_p \\ -TC & I_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K & -K_I \end{bmatrix}$$

$\bar{\Phi}$                        $\bar{\Gamma}$                        $\bar{K}$

Com isso é possível projetar  $\bar{K}$  para escolher uma dinâmica adequada para o integrador (por exemplo mais rápida que a do sistema em malha fechada)

Exemplo: (retomando)

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,3 \\ 0,1 & 0,5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

c/  $T = 0,1s$ .

Controle igual ao exemplo anterior:  $z_e = 0,34 \pm j0,1697$

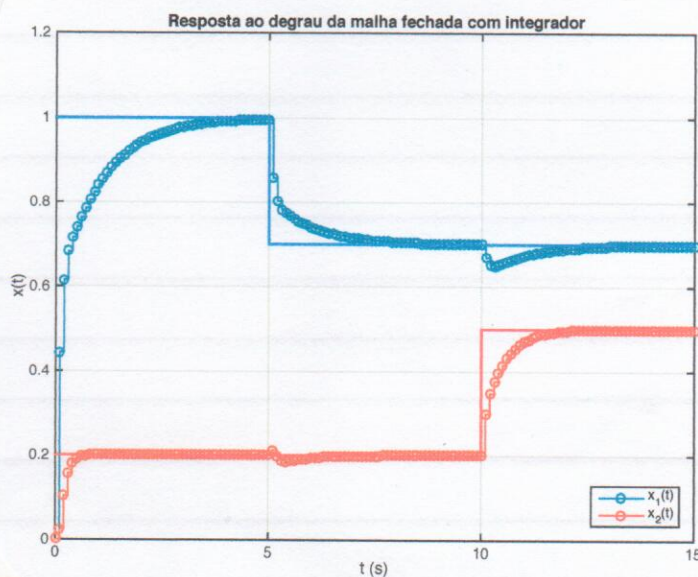
Vamos fazer um integrador com constante de tempo de 1s para a saída 1 e 0,5s para a saída 2.

$$\text{Daí } \bar{K} = \begin{bmatrix} 0,4646 & -0,1032 & -0,6454 & -0,3567 \\ -0,0425 & 0,3318 & 0,1122 & -1,1792 \end{bmatrix}$$

$K$

$K_I$

$$F_x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{como no exemplo anterior})$$



Veja ex\_sf\_int.m



OBS. \* Note que a entrada de referência é produzida dinamicamente a partir do erro, portanto não depende da precisão dos parâmetros do sistema.

\* A inclusão do integrador afeta o ganho  $K$ , mas não afeta  $F_x$ .

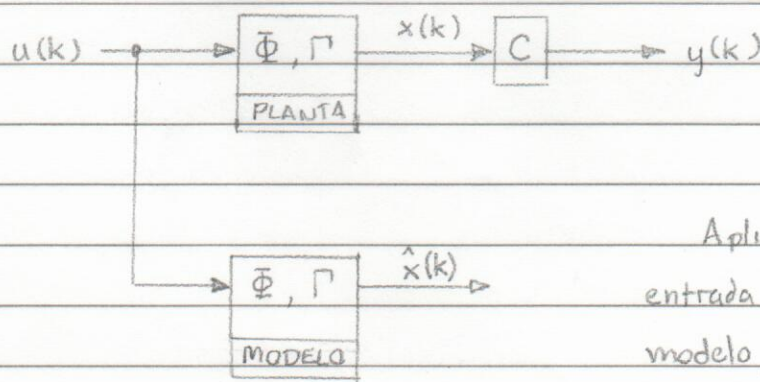
## 6.7 Observador de estado

Ideia geral: A filosofia de controle vista utiliza o vetor de estados para realizar o controle. A rigor só dispomos de acesso ao vetor de saídas da planta. A solução então é utilizar uma estimativa do estado.

OBS: Um estimador determinístico que estima o estado de um sistema é chamado de observador.

### 6.7.1 Observador em malha aberta (que não funciona)

Considere o seguinte esquema:



Aplicamos a mesma entrada à planta e ao modelo, suposto idêntico à planta.

$x(k)$ : estado da planta

$\hat{x}(k)$  estado do modelo (estado estimado da planta)

Vamos analisar o erro de estimação  $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$

planta:  $x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$

observador:  $\hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k)$

dinâmica do erro:  $\tilde{x}(k+1) = \Phi \tilde{x}(k)$

Problemas: \* Se  $\Phi$  é instável,  $\tilde{x} \rightarrow \infty$

O estimador não funciona

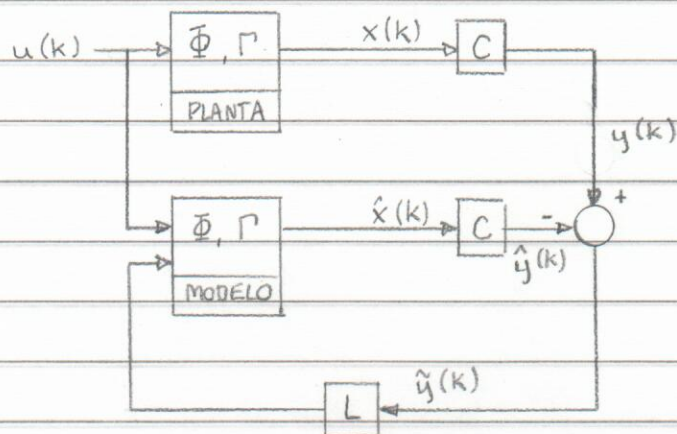
- \* Se  $\Phi$  é estável, o erro se anula com a dinâmica da planta em malha aberta (possivelmente lenta), portanto não dá para admitir que  $\hat{x} = x$  e substituir o estado real pelo estado estimado. O estimador não serve para fazer controle.

OBS: Há uma informação importante que não foi utilizada: a saída  $y(k)$  da planta.

### 6.7.2 Observador de Luenberger de ordem completa

Considere o seguinte esquema:





O observador agora é dado por

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(k+1) &= \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + L \tilde{y}(k) \\
 &= \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + L y(k) - L \hat{y}(k) \\
 &= \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + LC x(k) - LC \hat{x}(k)
 \end{aligned}$$

Analisando o erro de estimação

planta:  $x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$

observador:  $\hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + \Gamma u(k) + LC x(k) - LC \hat{x}(k)$

dinâmica do erro:  $\tilde{x}(k+1) = (\Phi - LC) \tilde{x}(k)$

Portanto: \* Se  $\Phi$  é instável, basta escolher  $L$  de maneira adequada para que  $(\Phi - LC)$  seja estável e daí  $\hat{x} \rightarrow x$

\* Escolhendo  $L$  de maneira adequada é possível fazer  $(\Phi - LC)$  ser muito mais rápido que  $\Phi$ , daí  $\hat{x} \rightarrow x$  muito rapidamente e poderemos admitir que  $\hat{x} = x$ .

Pergunta: É possível impor os autovalores de  $(\Phi - LC)$  apenas manipulando os termos de  $L$ ?

Resposta: Desde que o par  $(C, \Phi)$  permita isso. A essa propriedade chamamos observabilidade.  
(ou observabilidade completa)

Pergunta: Como projetar

Resposta:  $L' = \text{place}(\Phi', C', z_0)$

pois

$$\det(zI - \Phi + \Gamma K) = \det(zI - \Phi + \Gamma K)' = \\ = \det(zI - \Phi' + K' \Gamma')$$

(trocando  $\Phi$  por  $\Phi'$ ,  $\Gamma$  por  $C'$  e  $K$  por  $L'$  o problema é o mesmo)

Exemplo:

Seja o sistema do primeiro exemplo. (controlado)

Vamos monitorá-lo com um observador com dinâmica cinco vezes mais rápida que o sistema em malha fechada

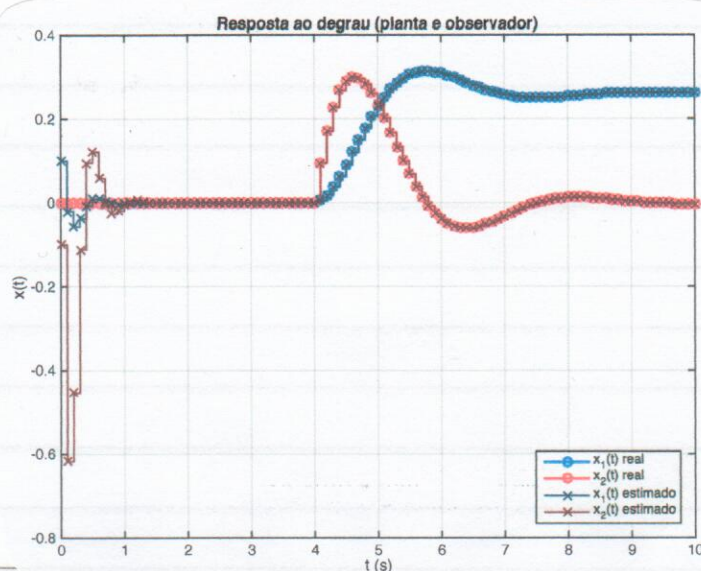
malha-fechada:  $(\xi = 0,45; \omega_n = 2)$   $z_c = 0,8994 \pm j0,1624$

observador:  $(\xi = 0,45; \omega_n = 10)$   $z_o = 0,3998 \pm j0,4967$

Projetando o observador:  $L = \begin{bmatrix} 1,1052 \\ 5,2725 \end{bmatrix}$

Vamos colocar um erro inicial  $\tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ -0,1 \end{bmatrix}$





Veja ex\_obs.m

### 6.8 Observabilidade

As seguintes afirmações são equivalentes:

- Existe  $L$  tal que os autovalores de  $(\Phi - LC)$  podem ser alocados em qualquer valor desejado.
- Para qualquer  $x(0)$ , existe  $N$  finito tal que  $x(0)$  pode ser calculado a partir de  $\{y(0), y(1), \dots, y(N-1)\}$ .
- A matriz de observabilidade

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ C\Phi^2 \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{tem posto pleno}$$

iv)  $O$  por  $(C, \Phi)$  é observável.

### Detectabilidade

Se existe  $L$  tal que é possível ter  $(\Phi - LC)$  estável, mesmo que não seja impossível impor todos os polos, o sistema é dito detectável.

É uma condição mais fraca que a observabilidade que também é de interesse.

### Existem sistemas não-observáveis?

Sim. Em casos práticos isso pode indicar que faltam sensores ou que o modelo tem estados que não afetam a saída do sistema (modelagem inadequada).

## 6.8 Realimentação de estado observado

Ideia geral: Implementar um observador e utilizar o estado observado  $\hat{x}(k)$  para realizar o controle em vez do estado real  $x(k)$ .

Lei de controle:  $u(k) = r(k) - K\hat{x}(k) = r(k) - K(x(k) - \tilde{x}(k))$

Planta:  $x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$

Erro de observação:  $\tilde{x}(k+1) = (\Phi - LC)\tilde{x}(k)$

Combinando as equações (usando  $\tilde{x}$  é mais fácil do que usando  $\hat{x}$ ) temos que o sistema completo é



$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Phi - \Gamma K) & -\Gamma K \\ 0_n & (\Phi - LC) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0_{n \times m} \end{bmatrix} r(k)$$

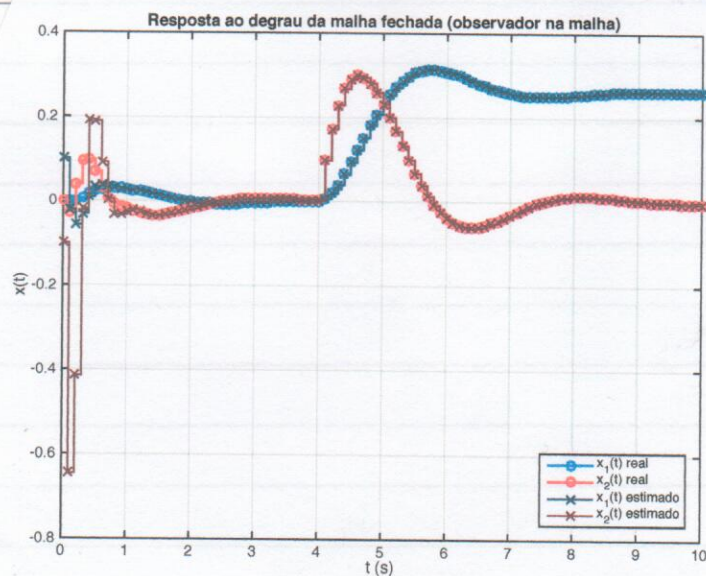
Os autovalores (polos do sistema) desta matriz são os autovalores de  $(\Phi - \Gamma K)$  mais os autovalores de  $(\Phi - LC)$

### Princípio da Separação

Para se fazer realimentação de estado com o estado estimado pode-se projetar o controlador (como se não houvesse observador) e o observador (como se não houvesse controlador) e integrá-los.

Exemplo:

Repetindo o exemplo anterior, mas usando o estado estimado para o controle.



Veja ex-abs\_ctl.m

## 6.9 Regulador Linear Quadrático (RLQ)

O Problema:

Seja o sistema  $x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$ Obter  $K$  tal que a lei de controle

$$u(k) = -Kx(k)$$

minimize o funcional  $J$ , dado por

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x'(k)Qx(k) + u'(k)Ru(k))$$

onde  $Q=Q^T \geq 0$  e  $R=R^T > 0$  são matrizes de ponderação.O termo  $x'(k)Qx(k)$  penaliza o desvio de  $x$  do ponto 0.O termo  $u'(k)Ru(k)$  (que é uma medida da energia do sinal  $u$ ), penaliza controles exageradamente agressivos.

Tipicamente usamos matrizes diagonais do tipo

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & r_m \end{bmatrix}$$

$$c/ q_i \geq 0 ; i=1, \dots, n$$

$$c/ r_l > 0 ; l=1, \dots, m$$



Pode-se mostrar (e este é um tópico bem complexo) que a solução para o problema é

$$K = (R + \Gamma' S \Gamma)^{-1} \Gamma' S \Phi$$

onde  $S$  é a solução estabilizante de

$$S = \Phi' (S - S \Gamma (R + \Gamma' S \Gamma)^{-1} \Gamma' S) \Phi + Q \quad (*)$$

A equação (\*) é chamada equação algébrica de Riccati discreta.

(\*) pode ter várias (talvez infinitas) soluções, mas somente uma chamada estabilizante (porque é esta solução que resolve o problema de controle) nos interessa.

Pode-se mostrar que

\* Se  $(\Phi, \Gamma)$  é estabilizável, então existe uma sequência  $u = \{u(0), u(1), \dots\}$  tal que  $J < \infty$ .

\* Se  $(\Phi, \Gamma)$  é estabilizável, então existe uma solução  $S \geq 0$  para (\*).

Adicionalmente, se o par  $(H, \Phi)$  é detectável, onde  $H$  é tal que  $H' H = Q$  então a solução  $S \geq 0$  é única e produz o ganho  $K$  que estabiliza o sistema e minimiza o funcional  $J$ .

\*  $K$  resulta invariante no tempo (mesmo que não se inclua esse requisito no problema)

\* Se relaxarmos o requisito  $R=R' > 0$  para  $R=R' \geq 0$ ,  
u tende a infinito. ( $Q=Q' \geq 0$  não apresenta  
problemas)

OBS: \* Frequentemente se adota  $Q=C'C$ , porque daí as  
condições para existência de solução estabilizante  
se resumem a  
 $(\Phi, \Gamma)$  estabilizável e  $(C, \Phi)$  detectável.

\* O RLQ tem esse nome porque o sistema é linear  
e o custo é quadrático.

\* Somente para os casos mais simples é possível  
obter uma solução analítica para (\*). A abordagem  
normal é obter soluções numericamente.  
No Matlab: comando dlqr

\*  $r(k)$  foi assumida nula para o RLQ. Pode-se  
incluir a referência no problema com os  
mesmos desdobramentos vistos anteriormente.



## Exemplo

Seja o sistema do primeiro exemplo ( $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  discretizado a 10 Hz)

Vamos projetar um RLQ com  $Q = C'C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $R = 1$

Note que  $Q \geq 0$  e  $R > 0$

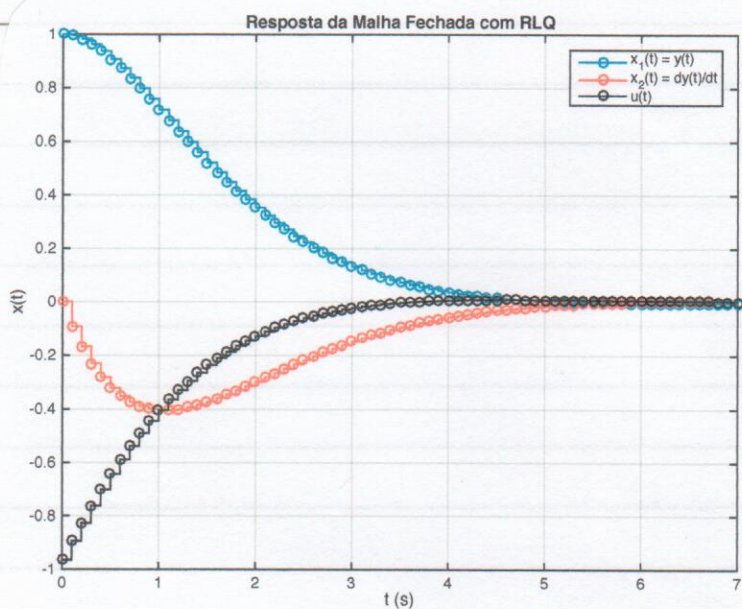
Usando `>> [K, S, zc] = dlqr(Phi, Gamma, Q, R)`

Temos

$$K = [0,9641 \quad 0,7184]$$

$$S = \begin{bmatrix} 17,8242 & 9,9939 \\ 9,9939 & 7,3220 \end{bmatrix} ; \text{ Note que } S = S' \geq 0$$

Polos da malha fechada:  $z_c = 0,9159 \pm j0,0459$



Condições iniciais:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

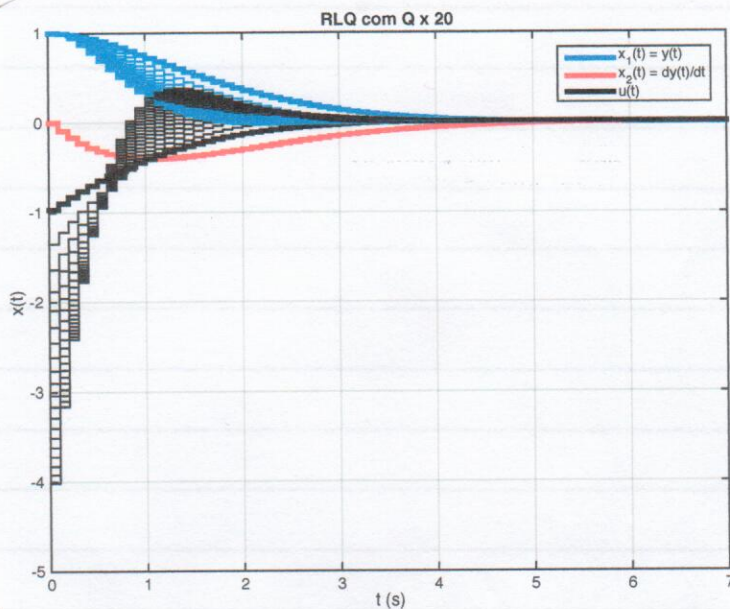
Veja `ex_sf_rlq.m`

## Exemplo

Variações:

i) Aumentando  $Q$  em relação a  $R$ 

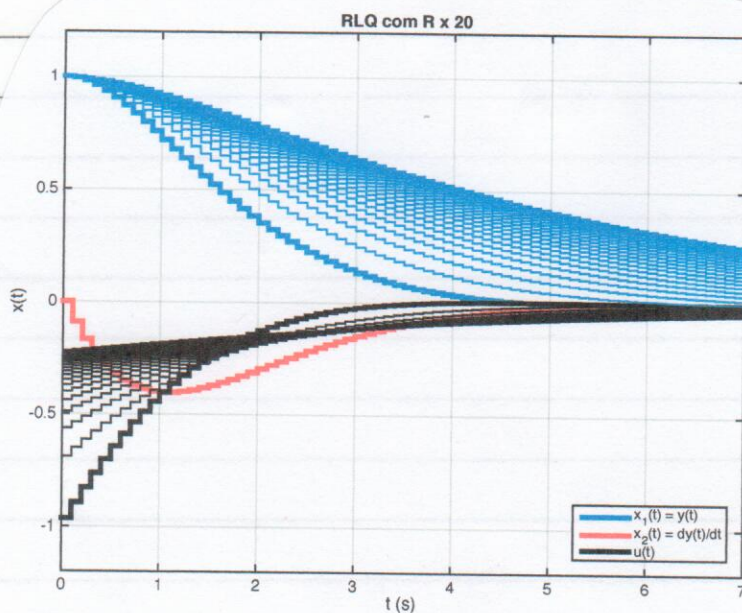
O desempenho melhora, mas o controle fica mais agressivo.



Veja ex-st-rlq-2.m

ii) Aumentando  $R$  em relação a  $Q$ 

O controle fica menos agressivo, mas o desempenho piora



Veja ex-st-rlq-3.m



## 6.10 O Filtro de Kalman

## O Problema:

$$\text{Seja o sistema } \begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) + \Lambda w(k) \\ y(k) &= C x(k) + v(k) \end{aligned}$$

onde  $w(k), v(k)$  são sequências de ruído branco gaussiano de média nula independentes entre si e  $\Lambda$  é uma matriz de ganhos para ponderar e distribuir a influência do ruído nas componentes do estado do sistema.

$$w(k) \in \mathbb{R}^m \text{ (tipicamente - não obrigatório)}$$

$$v(k) \in \mathbb{R}^p$$

$$\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ (conf. } w(k) \text{)}$$

Obter uma estimativa  $\hat{x}(k)$  para o estado  $x(k)$  do sistema que minimize o funcional  $J$  dado pela covariância do erro de estimação

$$J = \lim_{K \rightarrow \infty} E((x(k) - \hat{x}(k)) \cdot (x(k) - \hat{x}(k))')$$

Em resumo, deseja-se obter a melhor estimativa do estado quando há ruídos influenciando o processo.

Suporemos que as covariâncias dos ruídos são perfeitamente conhecidas:

$$E(w(k) \cdot w'(k)) = W$$

$$E(v(k) \cdot v'(k)) = V.$$

Pode-se mostrar (e este é um tópico bem-bem complexo) que o seguinte filtro (o filtro de Kalman) resolve o problema:

preditor:  $\hat{x}(k+1|k) = \Phi \hat{x}(k|k-1) + \Gamma u(k) + L(y(k) - C \hat{x}(k|k-1))$

Obs. Nesse caso denotamos  $\hat{x}(k+1)$  como  $\hat{x}(k+1|k)$  porque é uma estimativa de  $x(k+1)$  com informações até o instante  $k$ .

com  $L = (\Phi P C' + \Lambda W)(C P C' + V)^{-1}$

onde  $P = P' \geq 0$  é a solução estabilizante de

$$P = \Phi(P - P C'(C P C' + V)^{-1} C P) \Phi' + W \quad (*)$$

Pode-se mostrar que

Obs: \* Se  $(C, \Phi)$  é detetável existe pelo menos uma solução  $P \geq 0$  para (\*)

\* Se  $(\bar{\Phi}, \bar{C})$  é estabilizável então a solução é única e  $(\Phi - \Lambda C)$  é estável, sendo que  $\bar{\Phi} = \Phi - \Lambda C$ . Se  $\Lambda = I$  esta condição se resume a  $(\Phi, C)$  estabilizável.



corretor:

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + M(y(k) - C\hat{x}(k|k-1))$$

onde  $M = PC'(CPC' - V)^{-1}$  é denominada matriz de ganho de inovações ou ganho de Kalman.

O termo  $(y(k) - C\hat{x}(k|k-1))$  é denominado resíduo ou inovação

Obs. A estimativa  $\hat{x}(k|k)$  é uma estimativa de  $x(k)$  que considera informações até o instante  $k$  (no caso,  $y(k)$ )

### Sequência de operações

No instante  $k$ : 1) Utilizando  $\hat{x}(k|k-1)$  calculado no instante anterior, obter  $\hat{x}(k|k)$  e  $\hat{y}(k|k) = C\hat{x}(k|k)$  usando o corretor

2) Calcular  $\hat{x}(k+1|k)$  usando o preditor e armazenar para uso no próximo instante.

Obs. \* O filtro de Kalman é também chamado de estimador linear quadrático. O filtro é linear, enquanto a covariância é quadrática

\* O preditor do filtro é similar ao observador de Luenberger. O corretor melhora a qualidade da estimativa do preditor.

\* A equação de Riccati, quando as condições são satisfeitas, garante a estabilidade do filtro e atinge o seguinte compromisso que produz a solução que minimiza  $J$ :  
quando  $k \rightarrow \infty$ , mais informação sobre o estado do sistema é coletada e processada,  
porém  
quanta maior  $k$ , mais incerto se torna o estado do sistema

\* Na forma aumentada, o filtro de Kalman é

$$\hat{x}(k+1|k) = (\Phi - LC)\hat{x}(k|k-1) + \begin{bmatrix} \Gamma & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \quad (\text{eq. estado})$$

$$\hat{x}(k|k) = (I - MC)\hat{x}(k|k-1) + \begin{bmatrix} 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \quad (\text{eq. saída})$$

A entrada do filtro é  $\begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$ , o estado é  $\hat{x}(k|k-1)$  e a saída é  $\hat{x}(k|k)$ .

Note que a matriz "D" do filtro é não nula (a saída no instante  $k$  depende da entrada no instante  $k$ )



## 6.11 Controle LQG

O controle

$$u(k) = -K \hat{x}(k|k)$$

em que  $K$  é o ganho do RLQ e  $\hat{x}(k|k)$  a estimativa produzida por um filtro de Kalman é denominado Controle Linear Quadrático Gaussiano (LQG)

Pontos importantes:

- \* O princípio da separação continua valendo. Algumas suposições (já feitas) sobre o ruído são necessárias.

- \* O RLQ é um controle intrinsecamente robusto, assim como o filtro de Kalman, mas não há garantias de robustez quando os dois são combinados no controle LQG.

- \* Se a matriz "D" da planta é não nula ( $y(k)$  depende diretamente de  $u(k)$ ), a implementação do filtro de Kalman é problemática (pois  $\hat{x}(k|k)$  depende diretamente de  $u(k) = -K \hat{x}(k|k)$  (!)). Nesses casos usar o estimador sem o corretor elimina o problema.

- \* Uma referência  $r(k)$  pode ser incluída no controle como anteriormente.

Exemplo (malha aberta)

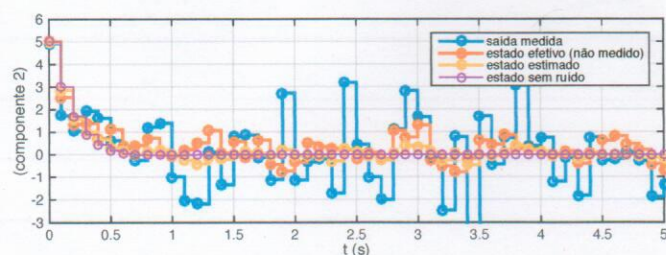
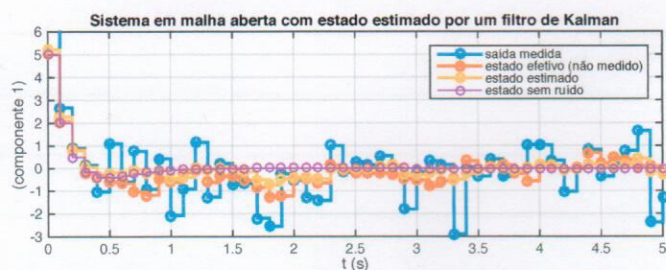
Seja a planta  $x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) + \Lambda w(k)$

$$y(k) = C x(k) + v(k)$$

com  $\Phi = \begin{bmatrix} 0,7 & -0,3 \\ 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}$ ;  $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (já utilizada)

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

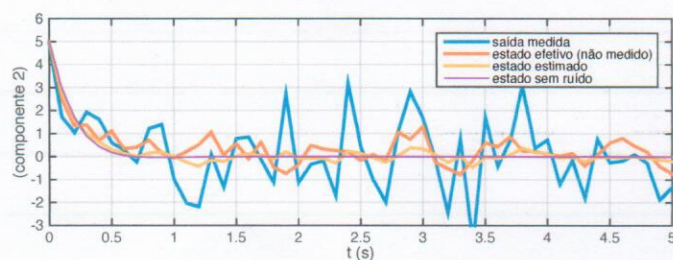
em malha aberta com um filtro de Kalman apenas estimando o estado.



$$x(0) = \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ou, em uma versão menos corrigida do gráfico



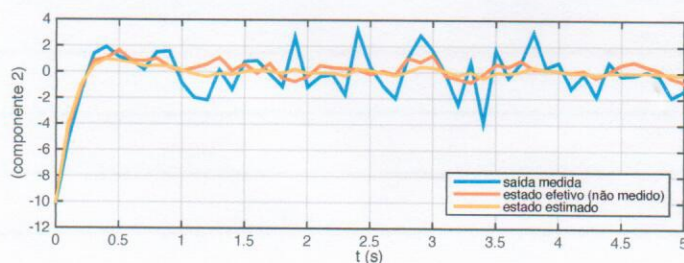
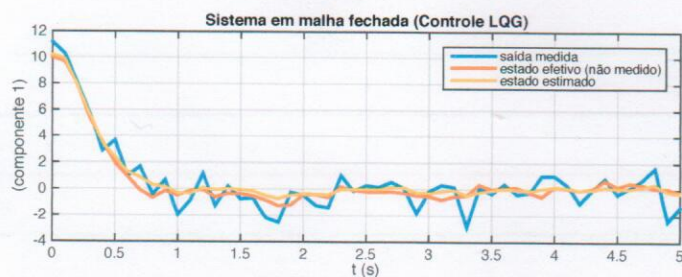


Veja ex\_kf.m

### Exemplo (Controle LQG)

Fechando a malha com  $u(k) = -K \hat{x}(k|k)$ , em que  $K$  é o ganho de um RLQ e  $\hat{x}(k|k)$  a estimativa do filtro de Kalman

O RLQ foi projetado com  $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $R = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$



$$x(0) = \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Veja ex\_lqg.m

(FIM DAS NOTAS DE AULA)