

Suplemento 3

Espaço de estados: Um projeto de controle

3.1 Introdução

Neste suplemento é apresentado um projeto de controle relativamente detalhado, porém não ao ponto de ser realista, visando ilustrar a aplicação de técnicas de espaço de estados a tempo discreto.

3.2 Modelando o problema



(Espaço 1999 - ITC Entertainment)

O problema abordado é o pouso de um módulo lunar com algumas especificações emprestadas dos utilizados no Programa Apollo. Tanto a física empregada como o modelo do módulo e o procedimento de aproximação são significativamente simplificados. Em particular, o módulo é suposto pontual, todos os modelos utilizados são lineares, e o problema é reduzido a duas dimensões.

3.2.1 Introdução ao problema



(NASA)

O problema, esquematizado na Figura 3.1 consiste em levar o módulo lunar LM do ponto A para o ponto B. A estação de telemetria TS é capaz de determinar a posição do módulo e transmiti-la para o sistema embarcado de controle dos propulsores, que pode usar esta informação para ajustar a trajetória até a base.

3.2.2 O modelo básico do módulo lunar

O módulo, que tem especificações similares aos do projeto Apollo, possui uma massa de 2.600 kg e carrega 2.200 kg de combustível. Por simplicidade assume-se que a atuação dos propulsores não afeta a massa total m do sistema¹ igual a 4.800 kg.

Há dois propulsores no módulo: um propulsor vertical capaz de produzir um empuxo E_h de até 45.000 N e um propulsor horizontal capaz de produzir um empuxo E_d de 45.000 N. Para simplificar o modelo, assume-se que os propulsores podem operar em ambos os sentidos. O uso dos propulsores em suas capacidades máximas deve ser evitado sempre que possível para não danificar os injetores. Para tanto foi estabelecido

1. Um modelo mais preciso que considerasse a perda de massa devido ao consumo de combustível seria variante no tempo e eventualmente não linear, o que foge ao escopo do presente documento.

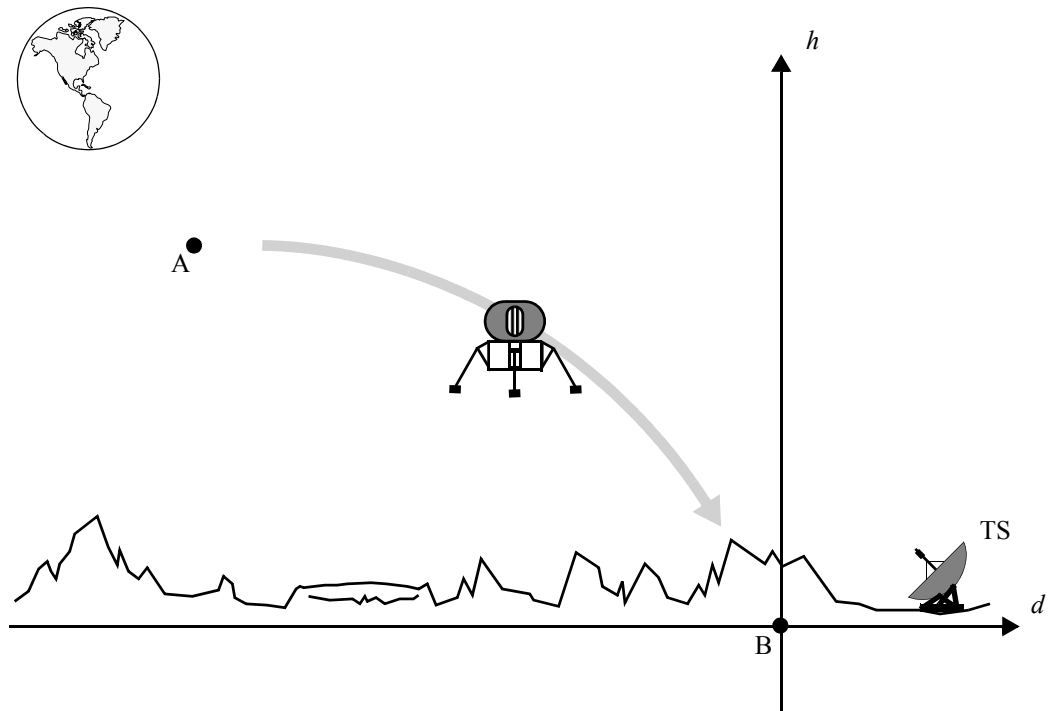


Figura 3.1 O problema esquematizado

um limite de segurança de 65% das capacidades máximas de empuxo que deve ser respeitado em operação normal.

A Figura 3.2 apresenta um esquema da propulsão do módulo.

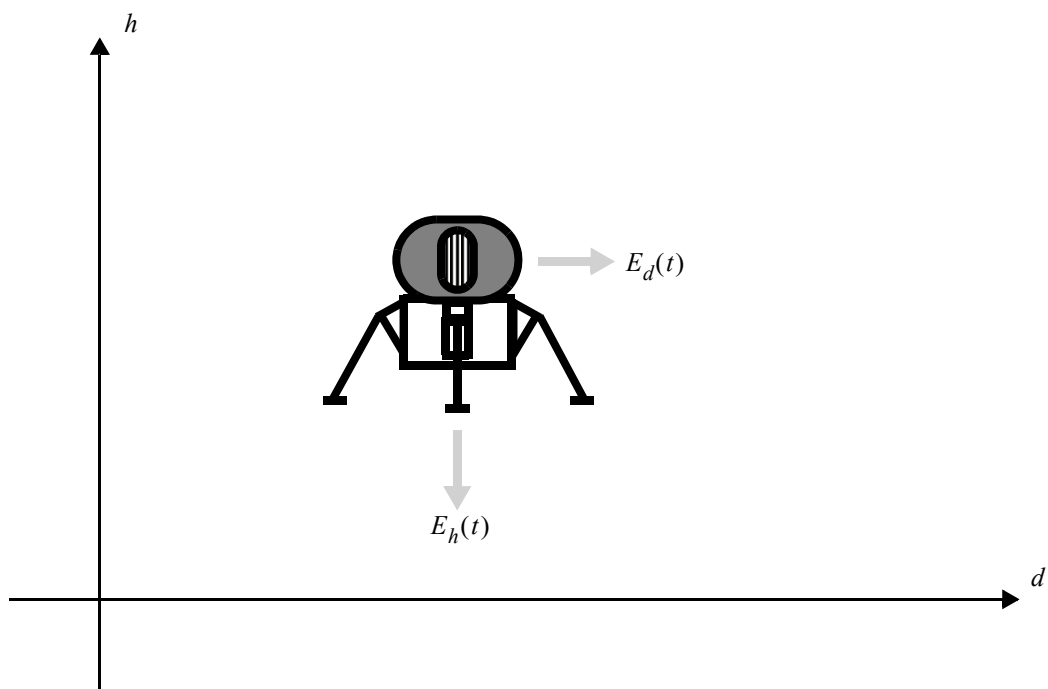


Figura 3.2 O sistema de propulsão esquematizado

Com isso pode-se modelar o sistema nas componentes vertical e horizontal (assume-se que a atitude do módulo não varie), resultando em

$$\text{vertical:} \quad m \cdot \ddot{h}(t) = -mg + E_h(t) \Rightarrow \ddot{h}(t) = -g + \frac{E_h(t)}{m}, \quad (3.1)$$

$$\text{horizontal:} \quad m \cdot \ddot{d}(t) = E_d(t) \Rightarrow \ddot{d}(t) = \frac{E_d(t)}{m}, \quad (3.2)$$

onde $g = 1,625 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade na superfície da Lua.

Deseja-se obter uma equação de estado do tipo $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ e uma equação de saída do tipo $y(t) = Cx(t)$ para o módulo lunar, mas a equação (3.1) em sua forma atual não se presta a essa estrutura devido à presença do termo constante $-g$. Pode-se eliminar esse termo com uma simples mudança de variáveis¹. Seja E_o o empuxo que anula o peso do módulo, isto é,

$$E_o = mg. \quad (3.3)$$

Definindo

$$\Delta E_h(t) = E_h(t) - E_o \quad (3.4)$$

e substituindo (3.3) e (3.4) em (3.1), pode-se reescrever o sistema dinâmico descrito por (3.1) e (3.2) como

$$\text{vertical:} \quad \ddot{h}(t) = \frac{\Delta E_h(t)}{m}, \quad (3.5)$$

$$\text{horizontal:} \quad \ddot{d}(t) = \frac{E_d(t)}{m}, \quad (3.6)$$

que se prestam ao equacionamento usual. Note que $\Delta E_h(t)$ pode ser encarado como o empuxo líquido capaz de impelir o módulo lunar na direção vertical sob a ação da gravidade.

Escolhendo

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \text{ com } \begin{cases} x_1(t) = h(t) \\ x_2(t) = \dot{h}(t) \\ x_3(t) = d(t) \\ x_4(t) = \dot{d}(t) \end{cases} \text{ e } u(t) = \begin{bmatrix} \Delta E_h(t) \\ E_d(t) \end{bmatrix},$$

pode-se consolidar (3.5) e (3.6) na forma matricial $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$$\text{com } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/m & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix}.$$

Como a estação de telemetria TS envia a posição do módulo lunar ao sistema embarcado de controle, pode-se admitir que

$$y(t) = Cx(t)$$

1. Este é o procedimento usual para eliminar termos independentes do equacionamento, tanto na equação de estado como na equação de saída

$$\text{com } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2.3 Irregularidades nos propulsores

Devido a irregularidades na mistura e em sua queima, bem como devido a vibrações e outros fenômenos, o empuxo efetivamente produzido pelos propulsores é diferente do demandado. Essas diferenças são modeladas na forma de um ruído adicionado à demanda.

3.2.4 Erros de telemetria

Admite-se que a estimativa da posição do módulo LM feita pela estação de telemetria TS esteja sujeita a erros. Não é incabível supor em princípio que esses erros tenham um caráter fortemente ou exclusivamente aleatório. Fenômenos facilmente mensuráveis ou previsíveis que interferissem nas leituras poderiam ser considerados e ter seus efeitos corrigidos, o que sobraria seria apenas o ruído. Assim admite-se que os erros de leitura de posição do módulo realizados pela estação de telemetria sejam ruídos adicionados à (hipotética) leitura ideal.

3.2.5 Incluindo ruídos e discretizando o modelo

Ruídos podem ser incluídos na descrição do sistema através de uma contribuição à equação de estado, no caso do ruído associado aos propulsores e de uma contribuição à equação de saída, no caso do ruído associado à telemetria.

Incluindo o ruído dos propulsores, a equação de estado do sistema pode ser escrita como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t)$$

ou em forma aumentada como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \begin{bmatrix} B & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

onde $w(t)$ é um ruído que afeta a evolução do estado do sistema e G é um ganho matricial que pondera e distribui a intensidade desse efeito em cada estado. Como o ruído dos propulsores se soma à intensidade destes e se reflete diretamente somente nas componentes do estado que são diretamente influenciadas pela entrada $u(t)$, é razoável adotar

$$G = B$$

com a intensidade do ruído $w(t)$ arbitrada por sua covariância.

O ruído da telemetria pode ser incluído na equação de saída, que pode então ser escrita como

$$y(k) = Cx(k) + v(k)$$

onde $v(t)$ é um ruído que corrompe as medidas $y(t)$ com sua intensidade também arbitrada por sua covariância. Note que isolar as contribuições de $w(t)$ e $v(t)$ às equações de estado e saída implica em admitir que suas distribuições são independentes (isto é, o conhecimento da evolução temporal de um dos sinais não acrescenta nenhuma informação que permita prever a evolução do outro).

Considerando a versão discretizada do sistema, tem-se

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) + \Lambda w(k) \quad \text{ou} \quad (3.8)$$

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \begin{bmatrix} \Gamma & \Lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k). \quad (3.9)$$

Φ e Γ são as versões discretas de A e B e são calculadas respectivamente por

$$\Phi = e^{AT} \text{ e}$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B.$$

Como no caso contínuo, $\Lambda = \Gamma$, o que é facilmente verificável discretizando-se a versão aumentada do sistema dada por (3.7).

A intensidade dos ruídos é arbitrada pelas suas covariâncias. Assume-se que os ruídos são gaussianos com média nula e covariância de 15 para o ruído de posição e de 450 para cada propulsor, de modo que

$$W = E(w(k)w'(k)) = \begin{bmatrix} 450 & 0 \\ 0 & 450 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$V = E(v(k)v'(k)) = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

Note que as matrizes W e V podem ser associadas às suas correspondentes em tempo contínuo W_c e V_c através de

$$W = \int_0^T e^{A\tau} G W_c G' e^{A'\tau} d\tau \text{ e}$$

$$V = \frac{V_c}{T}.$$

3.2.6 Alguns requisitos para o controle dos propulsores

O sistema de controle deverá ser capaz de levar o sistema do ponto A ao ponto B ou de seguir uma trajetória qualquer pré-determinada, baseando-se nas medidas de posição $h(t)$ e $d(t)$ do módulo, enviadas pela telemetria de solo, e atuando através dos propulsores vertical e horizontal (sinais $E_h(t)$ e $E_d(t)$).

O sistema será computadorizado e corrigirá o empuxo a uma taxa de dez vezes por segundo.

3.3 Um teste de manobra

O módulo parte de um ponto inicial A a 1.000 m de altura a uma distância de 1.000 m da base. A sua velocidade inicial é nula e a sequência de empuxos da Figura 3.3 é aplicada ao módulo.

O empuxo demandado dos propulsores é apresentado em linha contínua. Devido às irregularidades dos atuadores, o empuxo efetivamente aplicado ao módulo é a curva ruidosa exibida em pontos discretos. Note que o sistema de controle não tem acesso ao empuxo efetivo (e ruidoso), que não é medido.

A trajetória do módulo para a sequência de empuxos da Figura 3.3 é apresentada na Figura 3.4. A trajetória medida (em pontos discretos) é aquela efetivamente percebida pelo sistema de telemetria e sofre os efeitos dos ruídos, tanto dos propulsores como da leitura da posição. A linha contínua mostra o estado efetivo do

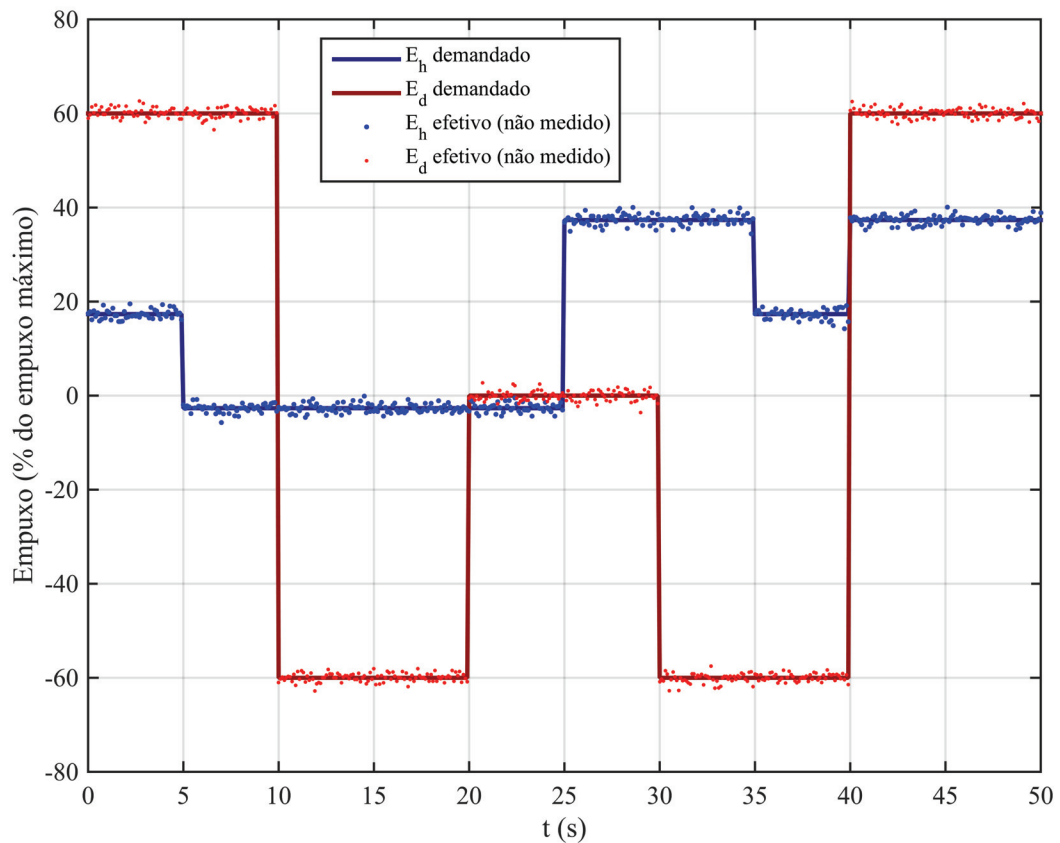


Figura 3.3 Sequência de empuxos para o teste de manobra

sistema, que não é medido (aqui é possível mostrá-lo, pois trata-se de uma simulação) e sofre os efeitos dos ruídos nos propulsores. A curva tracejada mostra como seria a trajetória equivalente caso não houvesse nenhum ruído no sistema. Note que não é possível isolar o ruído, e portanto a curva tracejada é denominada *fictícia*.

Os arquivos `ex_lm_test.m` e `ex_lm_test_sim.slx` reproduzem o teste de manobra no Matlab/Simulink.

3.4 Utilizando um filtro de Kalman para estimar o estado da planta

As saídas do sistema são corrompidas por ruído, como se pode ver no teste de manobras. Para filtrar esse ruído e obter uma boa estimativa para o estado da planta, um filtro de Kalman será utilizado. Pode-se mostrar que, para um sistema linear com modelo perfeitamente conhecido e ruídos gaussianos com covariâncias também perfeitamente conhecidas, o filtro de Kalman estacionário é o melhor estimador linear e invariante no tempo.

Assumindo que o modelo (matrizes Φ , Γ , Λ e C) é conhecido, assim como as covariâncias dos ruídos $w(k)$ e $v(k)$ (matrizes W e V), um filtro de Kalman estacionário a tempo discreto pode ser projetado.

3.4.1 O filtro de Kalman

O filtro de Kalman pode ser dividido em duas partes: preditor e corretor, que agrupadas compõem o filtro. O preditor produz num dado instante uma estimativa baseada em informações até o instante anterior, e o corretor atualiza essa estimativa com as informações disponíveis naquele instante.

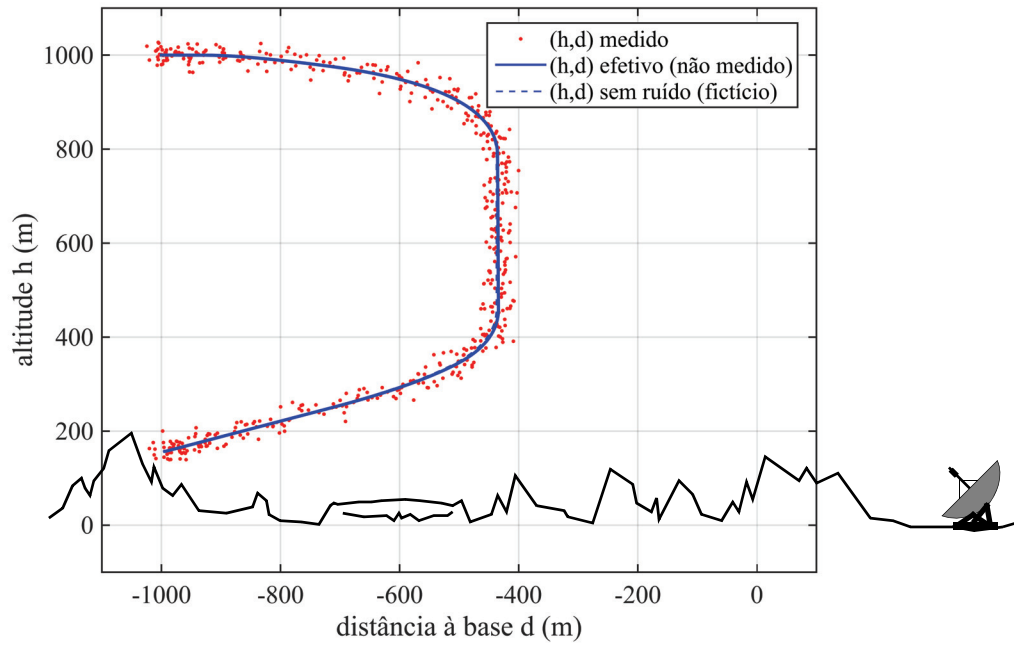


Figura 3.4 Trajetória do módulo no teste de manobra

preditor:

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi\hat{x}(k|k-1) + \Gamma u(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k|k-1)) \text{ ou}$$

$$\hat{x}(k|k-1) = \Phi\hat{x}(k-1|k-2) + \Gamma u(k-1) + L(y(k-1) - C\hat{x}(k-1|k-2))$$

$$\text{com o ganho dado por } L = (\Phi PC' + \Lambda W)(CPC' + V)^{-1},$$

onde P é a solução da equação algébrica de Riccati discreta

$$P = \Phi(P - PC'(CPC' + V)^{-1}CP)\Phi' + W.$$

Pode-se ler $\hat{x}(k+1|k)$ como a estimativa de $x(k+1)$ baseada nas informações até o instante k e $\hat{x}(k|k-1)$ como a estimativa de $x(k)$ baseada nas informações até o instante $k-1$.

A estimativa $\hat{x}(k|k-1)$ produzida pode ser melhorada ao se incorporar a saída $y(k)$, utilizando-se

corretor:

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + M(y(k) - C\hat{x}(k|k-1)),$$

onde o termo $y(k) - C\hat{x}(k|k-1)$ é denominado inovação (ou resíduo) e

$$M = PC'(CPC' + V)^{-1} \text{ é a matriz de ganhos de inovação.}$$

Finalmente, $\hat{y}(k|k) = C\hat{x}(k|k)$, e com isso tem-se

$$\text{filtro de Kalman (com corretor):} \quad \begin{bmatrix} \hat{y}(k|k) \\ \hat{x}(k|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(I - MC) \\ I - MC \end{bmatrix} \hat{x}(k|k-1) + \begin{bmatrix} CM \\ M \end{bmatrix} \cdot y(k).$$

As inovações servem a um duplo propósito. Além do aprimoramento da estimativa, elas servem como uma

medida do desempenho do filtro. Quanto melhor o processo de estimação, mais as inovações adquirem características de ruído branco. Avaliar o desempenho do filtro é uma tarefa desafiadora, pois basicamente o que se quer é estabelecer quão próximas estão as estimativas $\hat{x}(k|k)$ de um sinal $x(k)$ que não é medido.

O esquema preditor/corretor pode apresentar dificuldades computacionais para implementação em malhas de controle caso o estado estimado $\hat{x}(k|k)$ seja alimentado diretamente até a saída da planta (e.g. através de uma lei de controle do tipo $u(k) = -K\hat{x}(k|k)$ e uma planta em que $y(k)$ dependa de $u(k)$). Caso isso seja um problema, pode-se deixar de lado as inovações e usar

$$\text{filtro de Kalman (sem corretor):} \quad \begin{bmatrix} \hat{y}(k|k-1) \\ \hat{x}(k|k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} \hat{x}(k|k-1).$$

Note que com isso as informações do instante k não são utilizadas para o cálculo da estimativa de $x(k)$, o que certamente diminui a qualidade dos resultados. (a rigor tratar-se-ia apenas de um preditor e não propriamente de um filtro de Kalman).

3.4.2 Aplicando o filtro ao teste de manobra

Aplicando um filtro de Kalman ao teste de manobra, obtém-se a estimativa da trajetória do módulo apresentada na Figura 3.5. Para referência, o gráfico também apresenta a trajetória fictícia do módulo, caso o

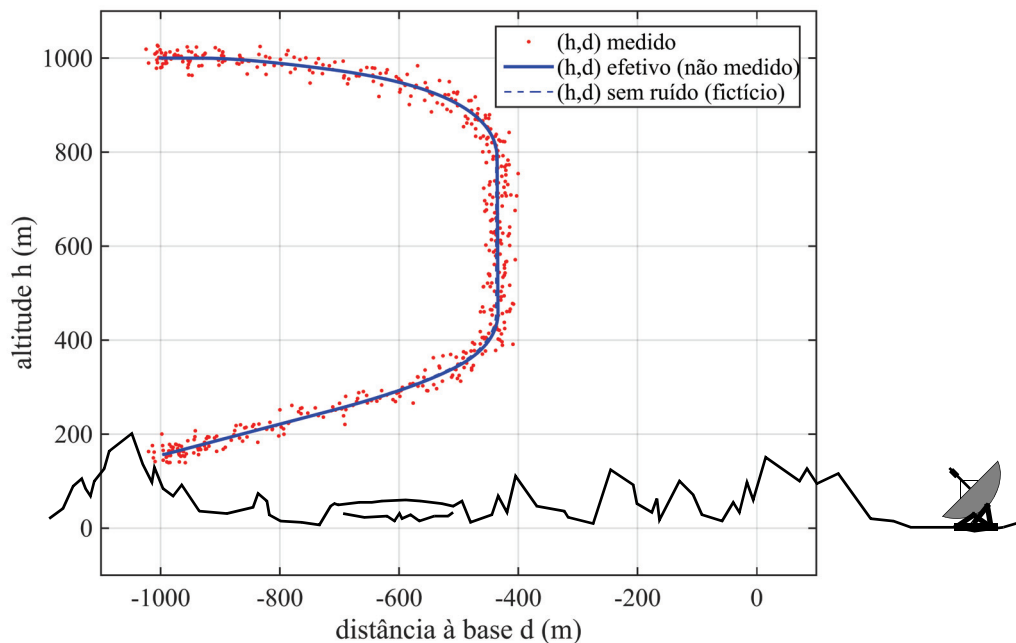


Figura 3.5 Estimativa da trajetória do módulo no teste de manobra

sistema não sofresse a influência de ruídos. Como as trajetórias são muito próximas, não é possível distingui-las visualmente. As Figuras 3.6 e 3.7 apresentam os erros de estimação. Na Figura 3.6 o erro é calculado contra o estado efetivo do sistema (não acessado pelo sistema) e na Figura 3.7 contra o estado sem ruído (fictício). Como se pode ver, o desempenho do filtro é perfeitamente adequado.

Os arquivos `ex_lm_test_kf.m` e `ex_lm_test_kf_sim.slx` reproduzem o teste de manobra e a filtragem no Matlab/Simulink.

3.5 Utilizando um regulador linear quadrático para controlar o sistema

Como há restrições para o uso dos atuadores (evitar empuxos maiores que 65% dos valores máximos) e

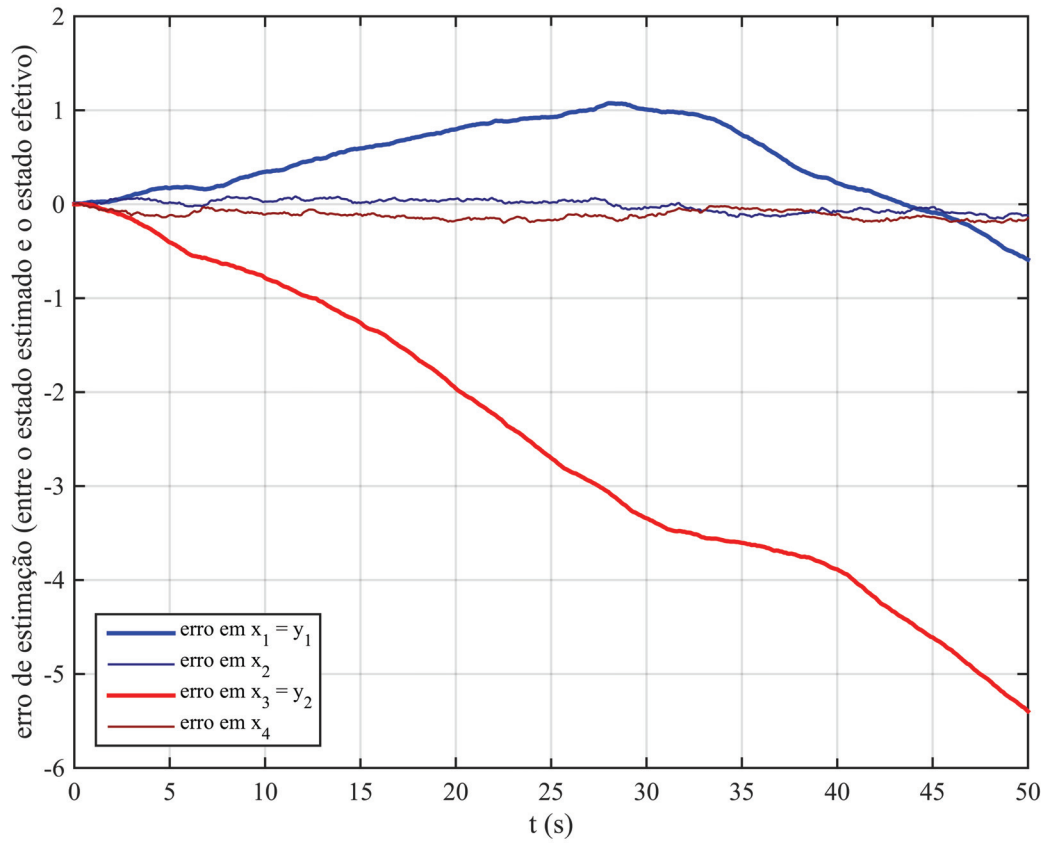


Figura 3.6 Erro de estimação $x(k) - \hat{x}(k|k)$.

ao mesmo tempo deseja-se que o deslocamento do módulo até a base seja tão rápido quanto possível dadas as restrições, uma abordagem adequada é utilizar um regulador linear quadrático.

3.5.1 O regulador linear quadrático

O regulador linear quadrático (RLQ) é uma lei de controle linear e invariante no tempo que minimiza o seguinte funcional:

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x'(k)Qx(k) + u'(k)Ru(k)), \quad (3.10)$$

onde $Q \geq 0$ é uma matriz de ponderações para penalizar as amplitudes de $x(k)$ e $R > 0$ é uma matriz que penaliza amplitudes elevadas da saída do regulador, dado por

regulador:

$$u(k) = -Kx(k)$$

com o ganho dado por $K = (R + \Gamma'S\Gamma)^{-1}\Gamma'S\Phi$,

onde S é a solução da equação algébrica de Riccati discreta

$$S = \Phi'S - S\Gamma(R + \Gamma'S\Gamma)^{-1}\Gamma'PS\Phi + Q.$$

Como se deseja apenas balancear o esforço de controle com o desempenho, pode-se adotar $Q = qI$ e $R = rI$ com $q, r \in \mathbb{R}^{*+}$ e ajustar a proporção entre eles.

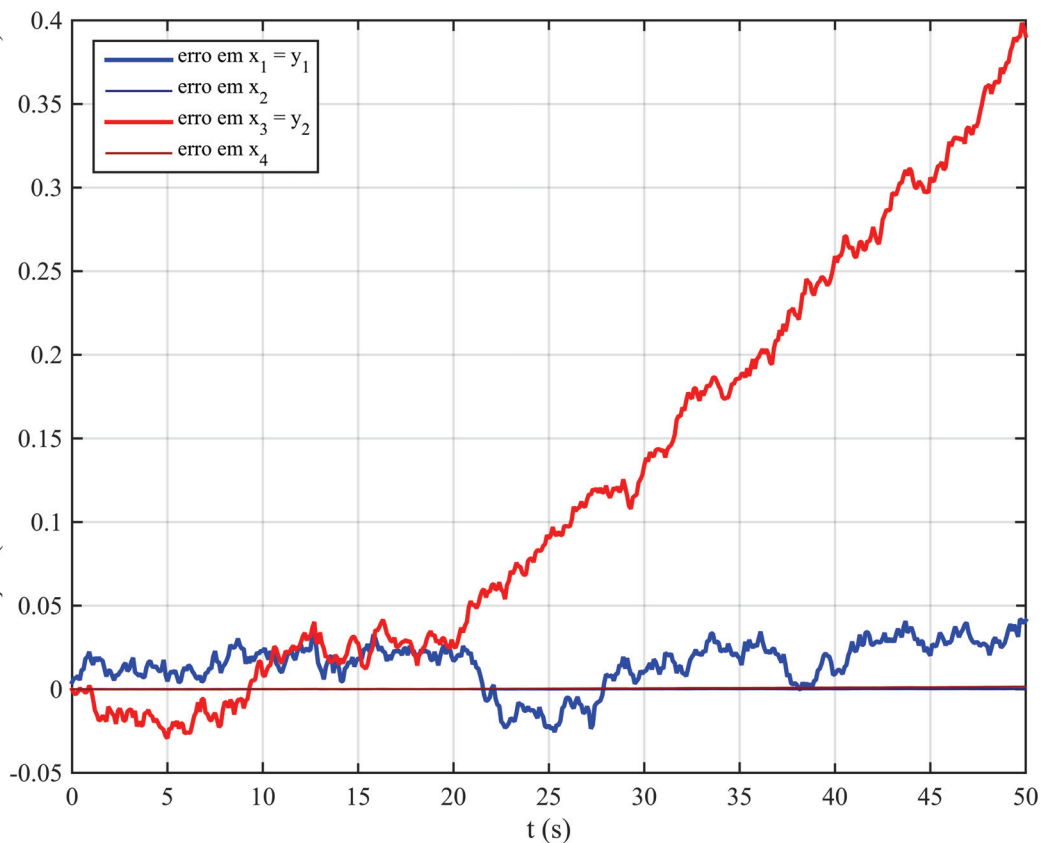


Figura 3.7 Erro de estimação entre o estado estimado e o estado sem ruído (fictício)

3.5.2 O controle linear quadrático gaussiano

O regulador linear quadrático requer que o estado $x(k)$ do sistema esteja disponível. Como o estado real do sistema, além de não estar disponível, é corrompido por ruídos, o estado estimado, fornecido por um filtro de Kalman será utilizado. Nesse caso

$$u(k) = -K\hat{x}(k|k) \text{ ou } u(k) = -K\hat{x}(k|k-1).$$

A utilização do regulador linear quadrático com o estado estimado por um filtro de Kalman forma uma estrutura denominada *controlador linear quadrático gaussiano* (LQG)

3.5.3 Controlando o módulo lunar

Foi projetado um controle LQG para levar o módulo lunar do ponto A ($h = 1.000$ m e $d = -1.000$ m) ao ponto B (origem). Para se ter uma excursão adequada dos propulsores, aliada a um tempo de trajetória razoável foram utilizados pesos $q = 500$ e $r = 1$ para o projeto do regulador linear quadrático.

A sequência de figuras a seguir apresenta os resultados.

A Figura 3.8 apresenta a trajetória do módulo. Note que a linha azul contínua representa a trajetória efetiva do módulo LM, que não é medida, enquanto que os pontos vermelhos representam as medidas da trajetória feitas pela estação de telemetria TS. Adicionalmente a figura inclui uma trajetória fictícia para um sistema sem ruídos, mas não é possível discernir a diferença, o que é um bom indicativo da qualidade do controle utilizado no que concerne a rejeição de ruídos.

Dois aspectos da trajetória devem ser destacados. O primeiro é que a trajetória apresenta oscilações antes de atingir o ponto B (note que ela passa por alturas negativas). Isso ocorre porque nenhuma restrição

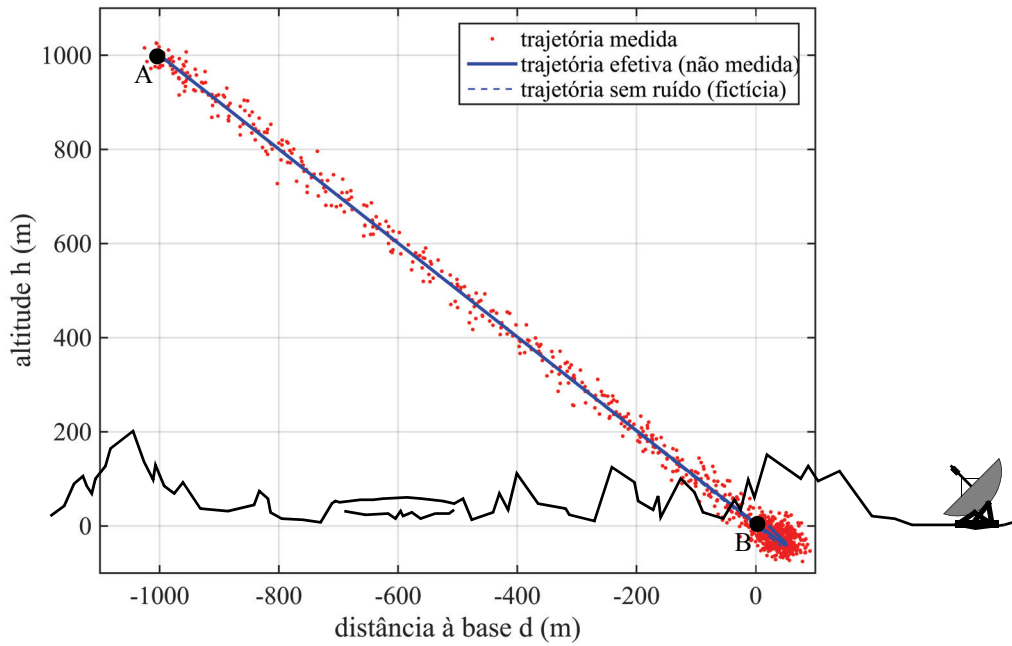


Figura 3.8 Trajetória de pouso para o módulo lunar

neste sentido foi incluída no problema. Evidentemente o contato com o solo é um evento a ser considerado numa abordagem mais realista.

O segundo é que a trajetória é um segmento de reta do ponto A ao ponto B, com ângulo de ataque de 45° . Isso ocorre porque pesos iguais penalizam tanto $h(k)$ como $d(k)$, o que aliado à dinâmica do sistema faz com que a trajetória que minimiza o funcional \mathfrak{J} de (3.10) seja de fato uma reta. Isso fica mais evidente nas curvas da Figura 3.9 (note a simetria entre as curvas de posição/velocidade horizontais e verticais). A Figura 3.10, que apresenta o empuxo produzido pelos propulsores, sugere que esta talvez não seja a trajetória mais conveniente para o sistema: a intensidade de ambos os propulsores se situa sempre bem abaixo da restrição de uso (65% do empuxo máximo) e claramente o propulsor horizontal é bem menos demandado do que o propulsor vertical. Se, por exemplo, o deslocamento horizontal do módulo fosse intensificado nos instantes iniciais, o ângulo de ataque poderia se aproximar da vertical, o que seria mais desejável.

Os arquivos `ex_lm_lqg.m` e `ex_lm_lqg_sim.slx` reproduzem o pouso do módulo LM no Matlab/Simulink.

3.6 Fusão de dados

Em certas situações, as informações de um processo (especialmente os altamente complexos) são coletadas de diversas formas, a diferentes taxas e às vezes a intervalos irregulares. Considere o módulo lunar: sua posição pode ser rastreada por diversas estações de telemetria com diferentes características a diferentes taxas, pode ser registrada por outros módulos em voo ao se aproximar destes, pode ser esporadicamente avistado por observadores em solo, pode ter sua posição medida por radares, telescópios, sistemas de laser, etc. Todas essas informações, se consolidadas de alguma forma, podem contribuir para se ter uma melhor estimativa da posição do módulo do que qualquer delas tomada isoladamente. A esse processo denomina-se *fusão de dados*.

O uso de filtros de Kalman, e ferramentas conceitualmente similares, em problemas do tipo vem ganhando grande relevância. Uma técnica bastante simples de fusão de dados de sensores utilizando um filtro de Kalman é apresentada a seguir.

Considere um sistema linear discreto e invariante no tempo (como o modelo considerado para o módulo lunar):

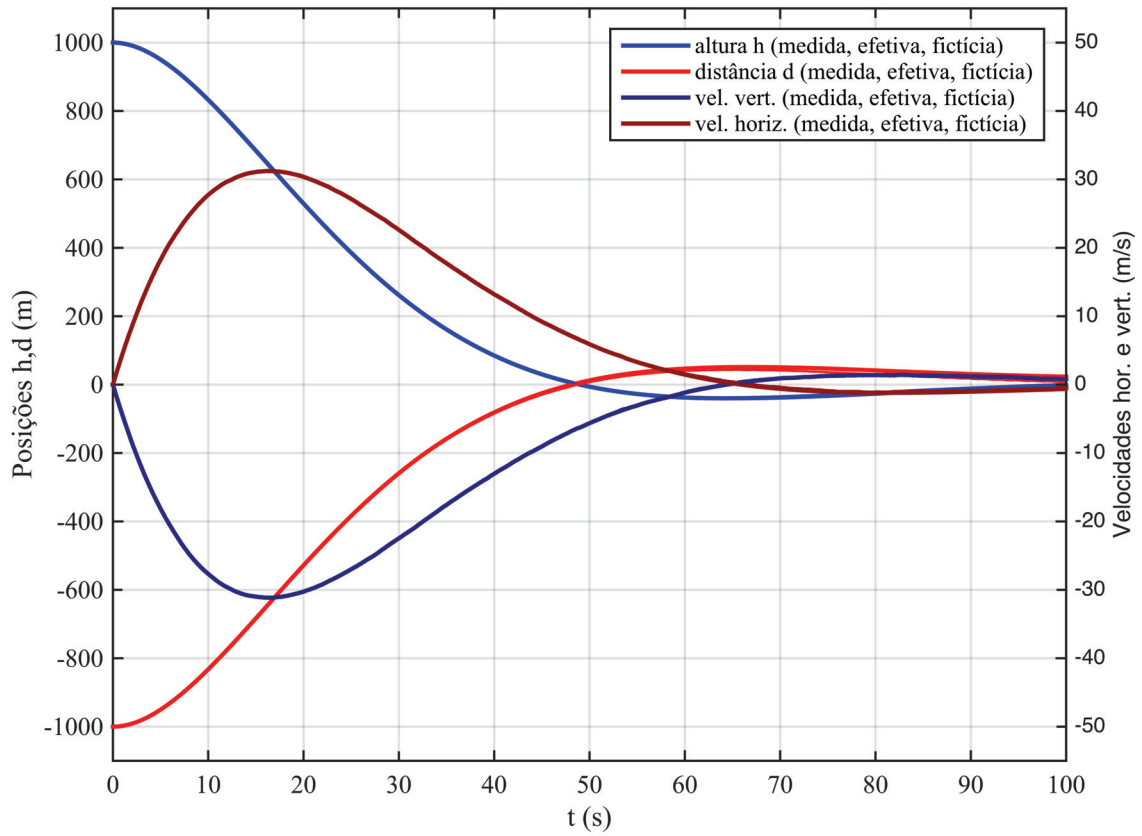


Figura 3.9 Evolução temporal do estado do sistema (altura, distância, velocidades horizontal e vertical)

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) + \Lambda w(k). \quad (3.11)$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k). \quad (3.12)$$

Nas equações (3.11)-(3.12) acima, assume-se que as saídas do sistema sejam produzidas por um único grupo de sensores, formando o vetor $y(k)$. Supondo que diversos grupos de sensores meçam as mesmas variáveis (ou subconjuntos ou combinações lineares das mesmas), pode-se substituir a equação de saída (3.12) por

$$y_1(k) = C_1 x(k) + v_1(k)$$

$$y_2(k) = C_2 x(k) + v_2(k)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$y_{N-1}(k) = C_{N-1} x(k) + v_{N-1}(k)$$

$$y_N(k) = C_N x(k) + v_N(k)$$

para N grupos de sensores.

Note que esses grupos não necessariamente medem as mesmas variáveis ou sequer o mesmo subconjunto delas (o que se reflete em diferentes matrizes C_i , $i = 1, \dots, N$ com diferentes dimensões para cada grupo i de sensores) ou sofrer o efeito de ruído da mesma forma (o que se reflete em diferentes covariâncias ou tamanhos para os vetores v_i). Em forma matricial tem-se

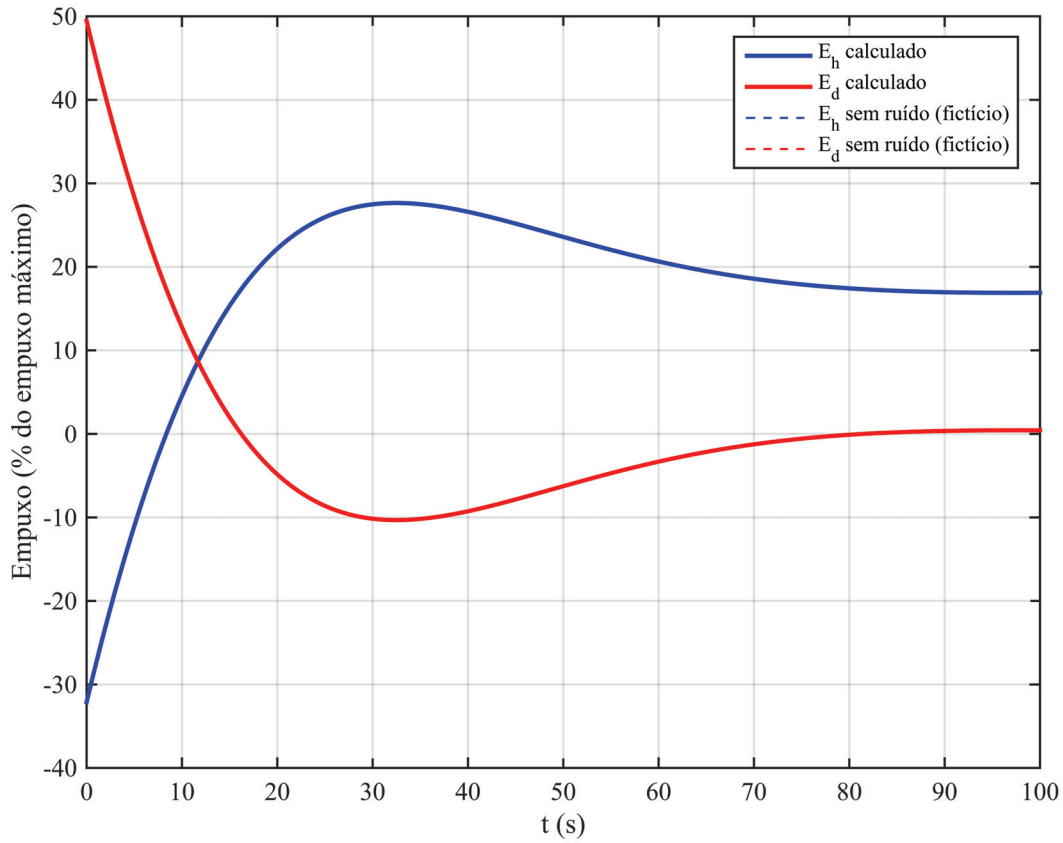


Figura 3.10 Empuxo produzido pelos propulsores

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_{N-1}(k) \\ y_N(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{N-1} \\ C_N \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ \vdots \\ v_{N-1}(k) \\ v_N(k) \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

e o filtro de Kalman pode ser aplicado à forma aumentada (3.13) da mesma forma que na equação de saída (3.12) original. Note que por simplicidade assumiu-se que todos os N grupos de sensores operam à mesma taxa e sincronamente.

Potencialmente, os N grupos de sensores podem fornecer uma melhor estimativa para o estado do sistema. Como a dimensão do problema cresce com o número de grupos, esta é uma abordagem viável para um número reduzido de grupos de sensores apenas. A equação de estado (3.11) não se altera, mas as dimensões de (3.13) podem ser bem maiores que as de (3.12), aumentando o esforço computacional empregado para implementar o filtro. Além disso, a resolução da equação algébrica de Riccati pode se tornar numericamente problemática para dimensões elevadas.

3.7 Atividades sugeridas

3.7.1 Robustez do filtro e do controlador

Tanto o controlador como o filtro de Kalman utilizados aqui foram projetados a partir de um modelo rigorosamente igual à planta. Além disso os ruídos simulados tem as exatas propriedades estatísticas utilizadas

no projeto do filtro.

- Explore o comportamento do filtro de Kalman quando o ruído do sistema é diferente daquele utilizado no projeto. Em particular experimente utilizar ruídos de covariâncias bem maiores do que as de projeto e introduzir *offsets* em $w(k)$ e $v(k)$.
- Explore o comportamentos do sistema quando a planta não é igual ao modelo de projeto. Em particular experimente introduzir alterações nas matrizes Φ e Γ da planta e no *offset* E_o .

3.7.2 Condições iniciais

O filtro utilizado tinha condições iniciais iguais às da planta, o que não é uma hipótese razoável.

- Explore o comportamento do filtro de Kalman para diferentes condições iniciais. Analise como isso afeta as estimativas e o controle.
- Proponha e implemente e avalie algum método para obter condições iniciais próximas às da planta para o filtro.

3.7.3 Usando somente um preditor para estimar o estado

O filtro utilizado empregou um esquema preditor-corretor.

- Compare o desempenho do filtro e do controle LQG quando somente o preditor é implementado.

3.7.4 Usando os pesos do RLQ para alterar a trajetória e as velocidades

Como os pesos para penalizar cada componente do vetor de estados eram iguais, a trajetória produzida pelos controles RLQ e LQG eram retas. A introdução de diferentes pesos produz diferentes trajetórias ótimas (veja a Figura 3.11 abaixo).

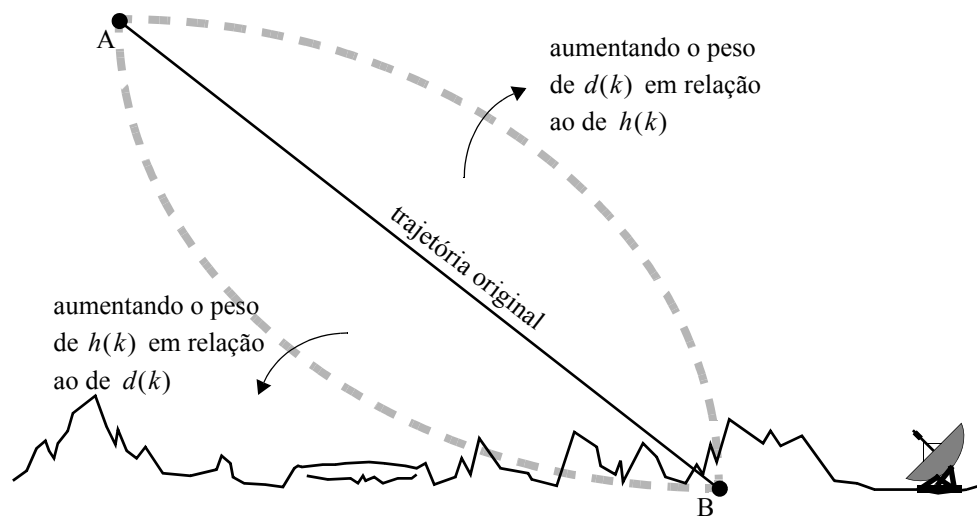


Figura 3.11 Variando os pesos de penalização de $h(k)$ e da distância $d(k)$

- Experimente alterar os pesos para que o módulo faça a aproximação final ao ponto B de um ângulo mais próximo à vertical.
- Experimente alterar os pesos referentes às velocidades vertical e horizontal para que o pouso seja mais suave (i.e. com velocidade vertical baixa e velocidade horizontal idealmente nula).

3.7.5 Impondo uma trajetória de referência

Uma abordagem para se ter um maior domínio sobre a trajetória do módulo é fazer com que o sistema de controle rastreie uma trajetória de referência.

- a) Proponha uma trajetória de referência de modo que a aproximação se dê pela vertical e que o pouso seja suave.
Note que a taxa de variação da referência de posição serve como referência para a velocidade.
- b) Altere o sistema de controle para que ele rastreie a velocidade proposta.
Note que pode ser necessário incluir algum esquema de eliminação de erros de regime, tal como o uso de integradores, para que isso seja possível.

3.7.6 Utilizando múltiplos sensores

Suponha que, além da estação de telemetria utilizada, as seguintes medidas de posição estejam disponíveis:

- i) Um radar embarcado no próprio módulo, com ruído duas vezes mais intenso que o da estação de telemetria;
- ii) Uma segunda estação de telemetria, com características similares às da primeira.

Suponha ainda que todas as três fontes de medida operem à mesma taxa (10 Hz) e em sincronia com a discretização utilizada.

- a) Simule as fontes de informação e implemente um esquema de fusão de dados que utilize as três fontes de informação para estimar o estado do sistema.
OBS.: Utilize diferentes sementes para os geradores de ruído para que estes sejam independentes.
- b) Avalie os resultados. O esquema de fusão de dados melhora a qualidade das estimativas?
- c) Como incluir uma fonte de informação que opere a uma taxa duas vezes menor que as outras?

3.7.7 Estabelecendo um tempo limite para a manobra

Pesquise e proponha soluções para que a manobra de pouso tenha um limite de tempo.

3.7.8 Impedindo que a trajetória passe por altitudes negativas

A trajetória da Figura 3.8 intercepta o solo lunar antes de atingir o ponto final. Proponha uma solução para impedir que isso ocorra.

Apêndice A

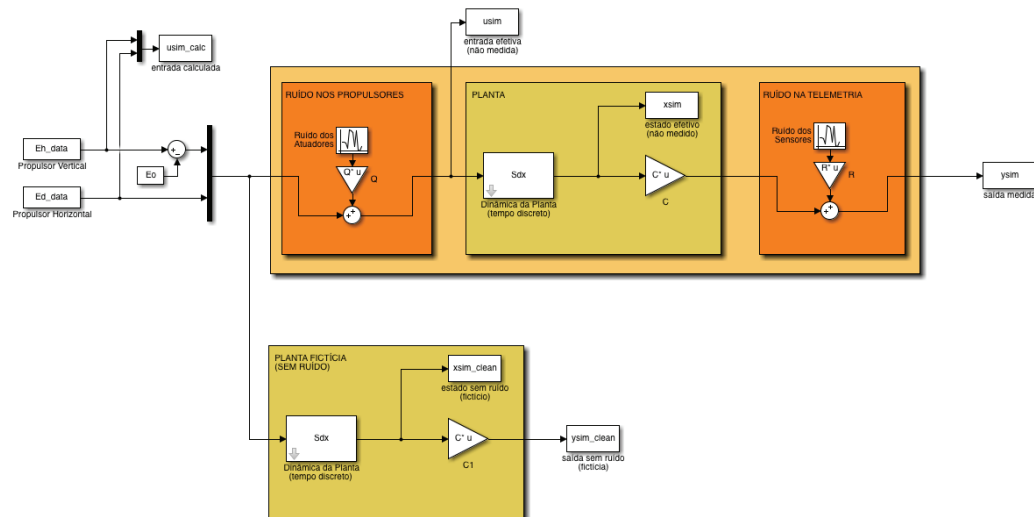
Programas

As seguintes rotinas acompanham este documento:

ex_lm_test.m

ex_lm_test_sim.slx

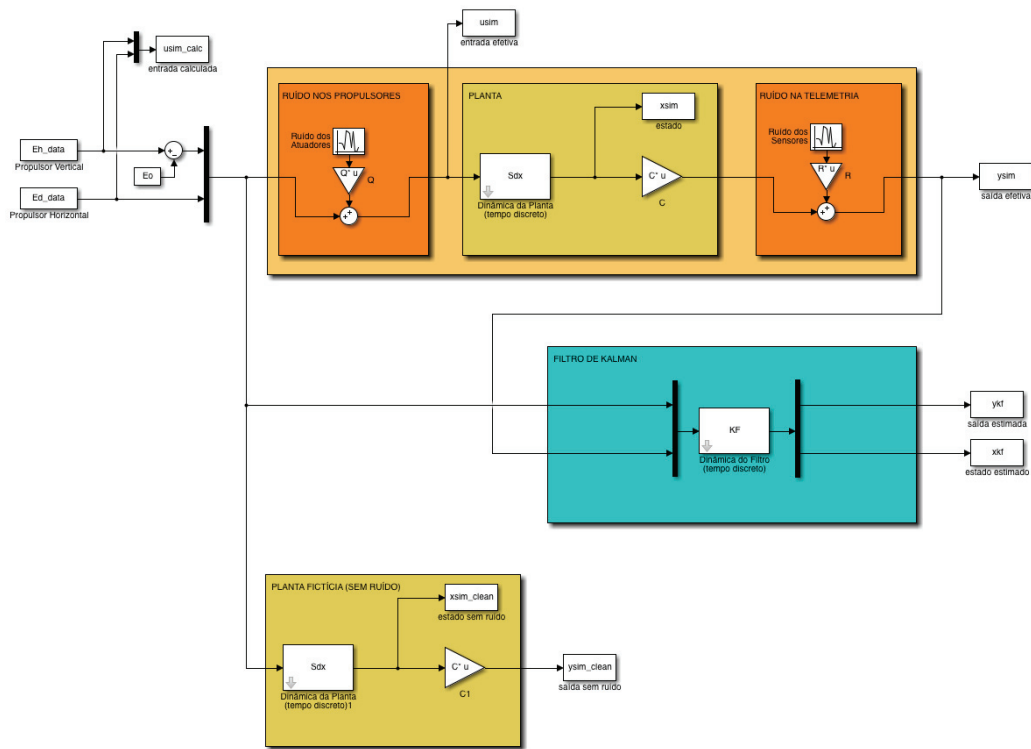
Teste de manobra com a planta em malha aberta.



ex_lm_test_kf.m

ex_lm_test_kf_sim.slx

Teste de manobra com a planta em malha aberta e um filtro de Kalman.



ex_lm_lgg.m

ex_lm_lgg_sim.slx

Manobra de pouso com controle LQG.

