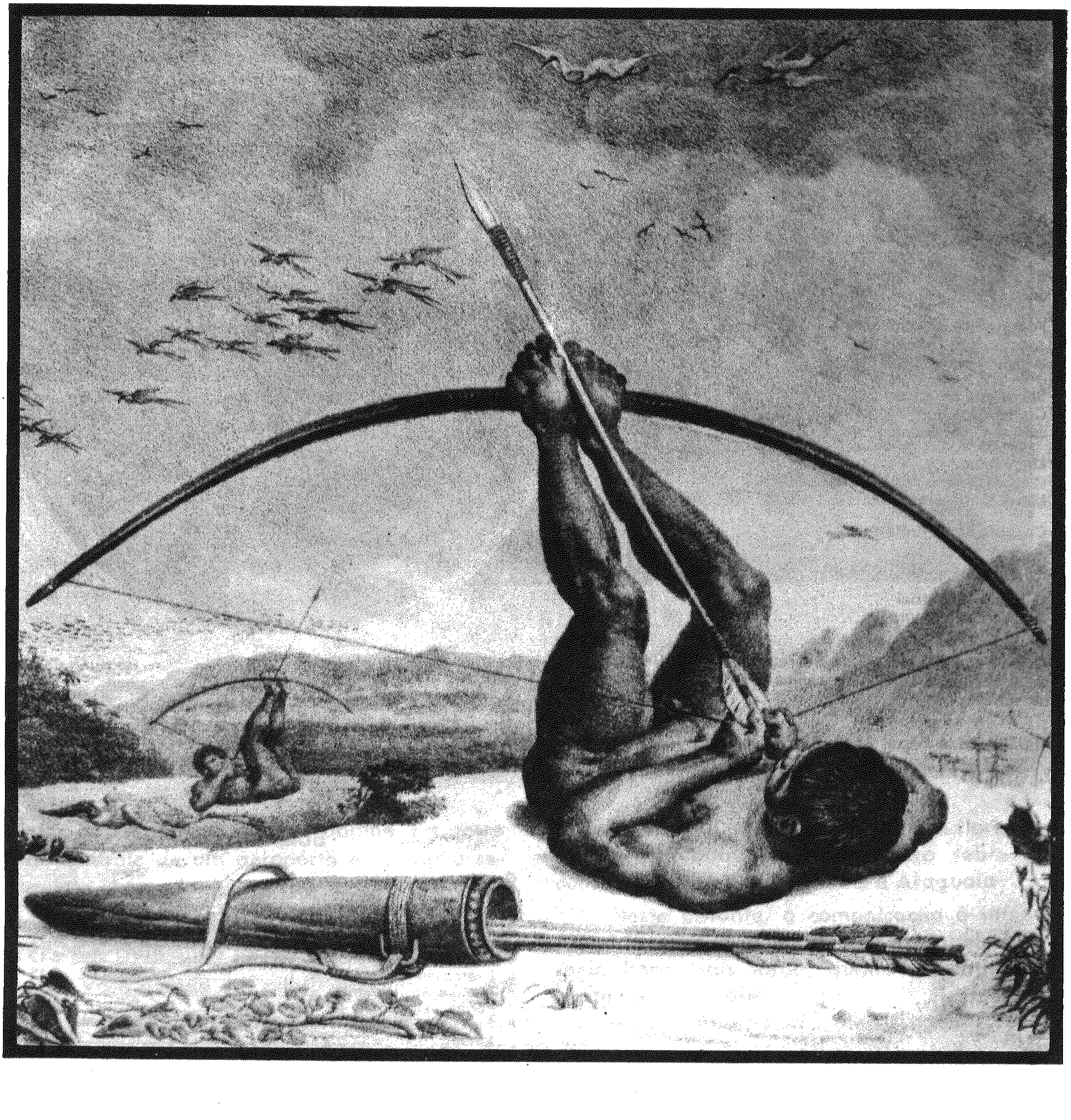
PROJETO
DE ENSINO
DE FÍSICA
IFUSP - Instituto de Física da Universidade de São Paulo
MEC/FAE/PREMEN

8

Mecânica

Grandezas vetoriais



MEC/FAE/PREMEN

PEF — PROJETO DE ENSINO DE FÍSICA, constituído de quatro conjuntos destinados ao Ensino de 2.º Grau, foi planejado e elaborado pela equipe técnica do Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP) mediante convênios com a FAE e o PREMEN.

Coordenação
Ernst Wolfgang Hamburger
Giorgio Moscati

Mecânica
Antonia Rodrigues
Antonio Geraldo Violin
Diomar da Rocha Santos Bittencourt
Hideya Nakano
Luiz Muryllo Mantovani
Paulo Alves de Lima
Plínio Ugo Meneghini dos Santos

Eletricidade
Eliseu Gabriel de Pieri
José de Pinto Alves Filho
Judite Fernandes de Almeida

Eletromagnetismo
Jesuina Lopes de Almeida Pacca
João Evangelista Steiner

Programação Visual
Carlos Egídio Alonso
Carlos Roberto Monteiro de Andrade
Ettore Michele di San Fili Bottini
João Baptista Novelli Júnior

Fotografia e Reproduções
José Augusto Machado Calil
Washington Mazzola Racy

Secretaria e Datilografia
Carlos Eduardo Franco de Siqueira
Janete Vieira Garcia Novo

Linguagem
Claudio Renato Weber Abramo
Maria Nair Moreira Rebello

Construção de Protótipos
José Ferreira
Voanerges do Espírito Santo Brites

Desenho Industrial
Alessandro Ventura

Colaboraram o pessoal da Secretaria, Oficina Gráfica, Administração, Oficina Mecânica e Oficina Eletrônica do IFUSP.

IFUSP: Caixa Postal 8 219, São Paulo — SP

CAPA

Caboclo (Índio Civilizado) — Gravura do livro **Viagem Pitoresca e Histórica ao Brasil**, de Jean Baptiste Debret.

Debret integrou a Missão Artística que veio da França para o Brasil em 1816 para aqui difundir as belas-artes.

Já quando da sua chegada a população indígena estava reduzida, vencida pela assimilação ou exterminada pelo avanço do branco. Os "caboclos" ou índios civilizados, assim chamados por terem sido batizados, trabalhavam para os proprietários da região em troca de aguardente e alimentos.

As grandezas vetoriais são comumente representadas por setas ou flechas como aquela que o "índio civilizado" está prestes a atirar. Entretanto, grandeza vetorial não é flecha, nem flecha é grandeza vetorial. Existe uma entidade matemática abstrata chamada vetor, que é representada por um segmento orientado e para a qual podemos definir as operações soma vetorial, diferença vetorial, etc.

Se as flechas se comportassem como grandezas vetoriais, o índio poderia atirar uma flecha para o leste e outra para o norte, obtendo dessa forma uma flecha resultante para atingir a um inimigo a nordeste. Isto é impossível. Entretanto, podemos somar dois vetores, um apontando para leste, outro para norte, e obter um vetor resultante que aponta para nordeste.

SUMÁRIO

Grandezas vetoriais

Suponha que você trabalhe na torre de controle de um aeroporto e receba o seguinte chamado:

— **PP-NCK** chamando torre de controle. **PP-NCK** chamando torre de controle.

Você atende e o piloto informa:

— Estou com pane no motor número 4, voando em linha reta com velocidade de 800km/h a 4 000m de altura sobre a floresta amazônica. Estou passando agora sobre a confluência dos rios Tocantins e Araguaia . . .

Neste instante, a comunicação é interrompida e só é parcialmente restabelecida **meia hora** mais tarde, quando é captada parte de uma frase:

— . . . tentando uma aterrissagem forçada . . .

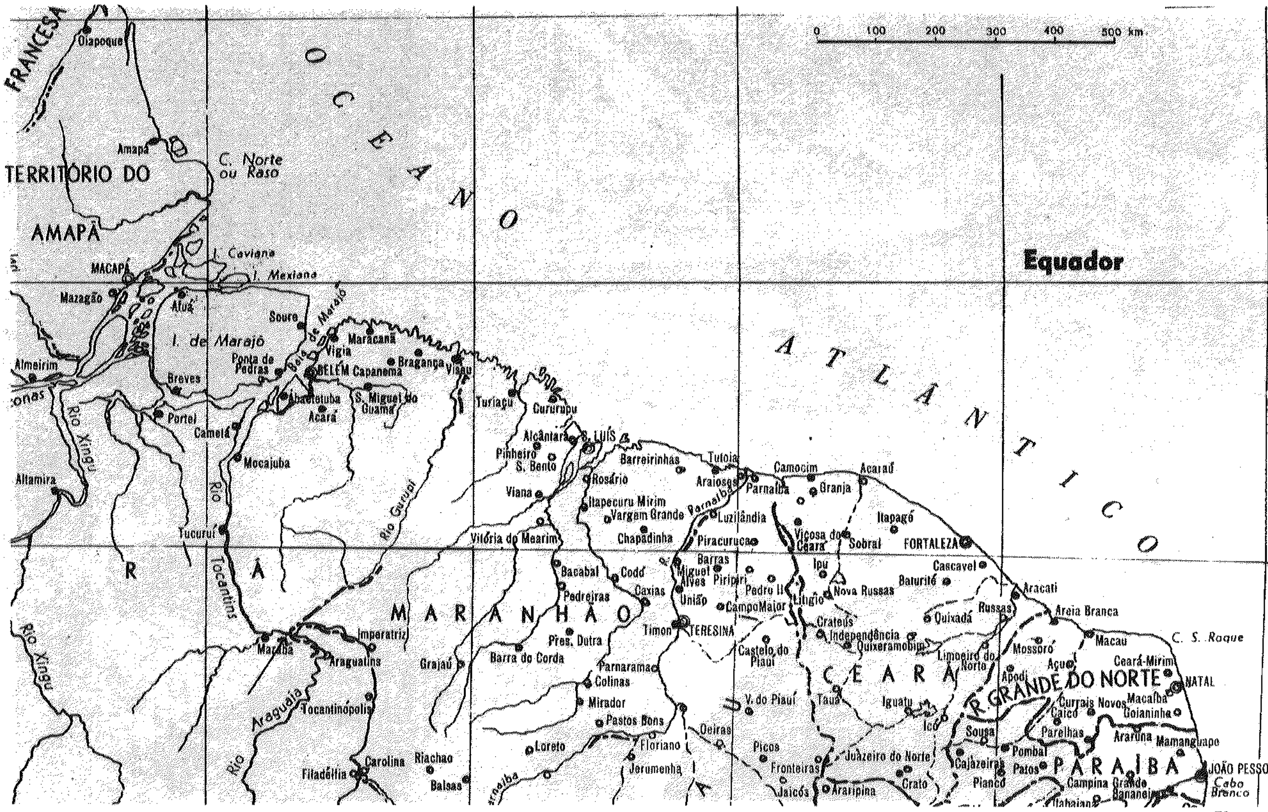


figura 1

Q1 — Apenas com base nos dados fornecidos pelo piloto, você seria capaz de informar ao serviço de salvamento o local mais provável em que o avião aterrissou, localizando-o no mapa mostrado na figura 1?

Q2 — Que outras informações o piloto deveria ter dado à torre na primeira comunicação para que o avião pudesse ser localizado?

Q3 — Se o piloto tivesse dito que voava numa direção paralela ao equador, isso bastaria para deduzir o local mais provável em que o avião aterrissou?

Q4 — Localize, na figura 1, os pontos em que o avião poderia ser encontrado se o piloto tivesse informado apenas que voava paralelamente ao equador.

Essa informação indicaria a **reta** segundo a qual o avião se movia, isto é, daria a **direção** de seu movimento. No entanto, faltaria saber se ele se movia para leste ou para oeste; isto é, ficaria faltando a informação sobre o **sentido** do movimento do avião.

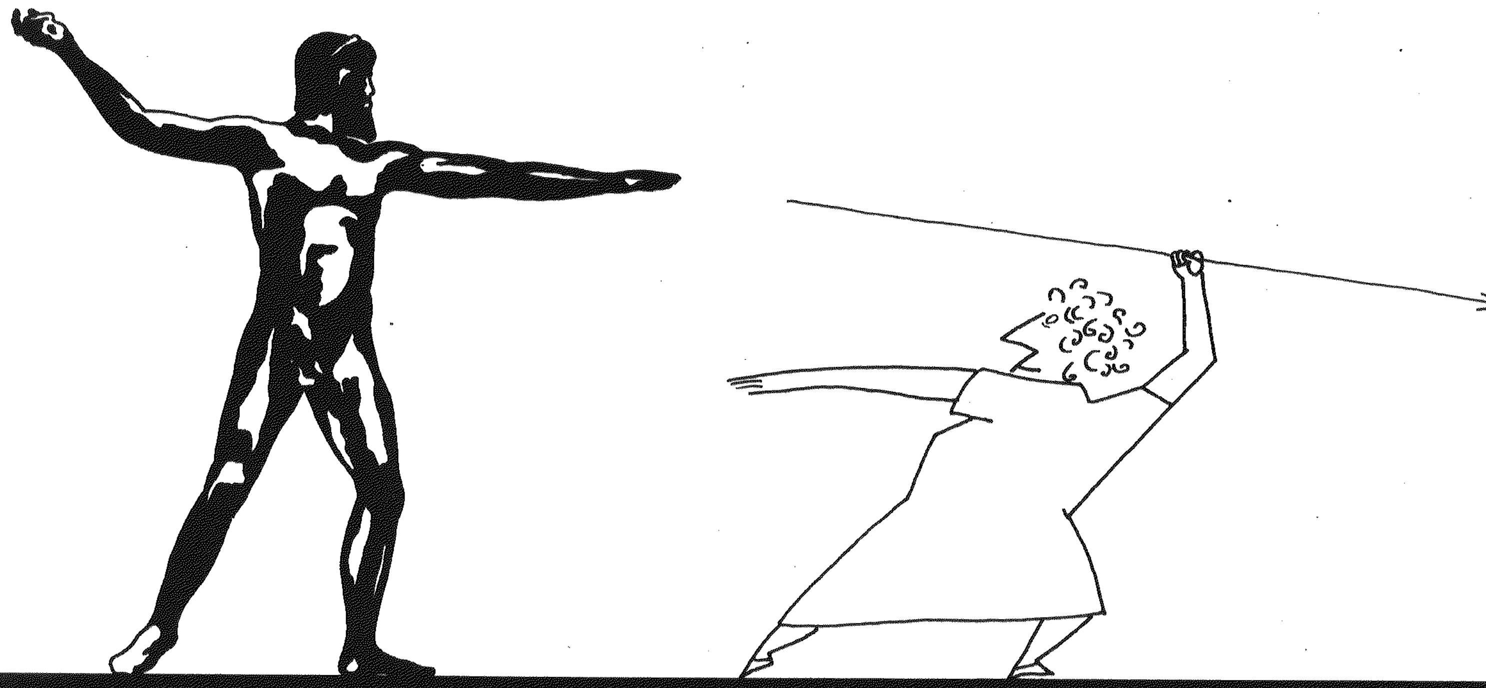
Q5 — Supondo que o piloto tivesse informado que o **sentido** do movimento do avião era de oeste para leste, localize no mapa o local mais provável em que ele aterrissou.

Dessa maneira, para assegurar a localização mais provável do avião, não é suficiente saber qual sua velocidade; é necessário saber também para onde ele se dirigia, isto é, a direção e o sentido de seu movimento.

Percebemos assim que, apesar de na linguagem cotidiana considerarmos as palavras **direção** e **sentido** como tendo o mesmo significado, elas na verdade se referem a coisas distintas.

Q6 — Quantas direções são possíveis numa reta? E quantos sentidos?

O exemplo do avião serviu para mostrar que não basta dar a velocidade de um corpo que se move para determinar onde ele poderá ser encontrado algum tempo mais



tarde. Ou seja, além do **valor** da velocidade, é também necessário saber sua **direção** e seu **sentido.** Dessa forma, a velocidade não fica completamente caracterizada apenas por seu valor numérico. Sua caracterização completa depende de três fatores: seu **valor numérico,** sua **direção** e seu **sentido.**

Essa nova maneira de encarar a velocidade permite, entre outras coisas, analisar corretamente um movimento cuja direção varia, como é o caso do movimento circular. De fato, como vimos no capítulo anterior, quando estudamos o movimento circular de um corpo levando em conta apenas o valor numérico da velocidade, chega-se a contradições, originadas exatamente pelo fato de não considerarmos nem a direção nem o sentido do movimento do corpo nesse estudo.

De agora em diante, sempre que falarmos em **velocidade,** estaremos nos referindo à velocidade com **direção** e **sentido;** representaremos a velocidade pelo símbolo $\vec{v}$.

O símbolo **v** sem a seta, assim como o símbolo $|\vec{v}|$, representa o valor ou **módulo** da velocidade.

Em matemática, o ente que se caracteriza por um valor numérico, uma direção

RESPOSTAS

R$_1$ -

R$_2$ -

R$_3$ -

R$_5$ -

R$_6$ -

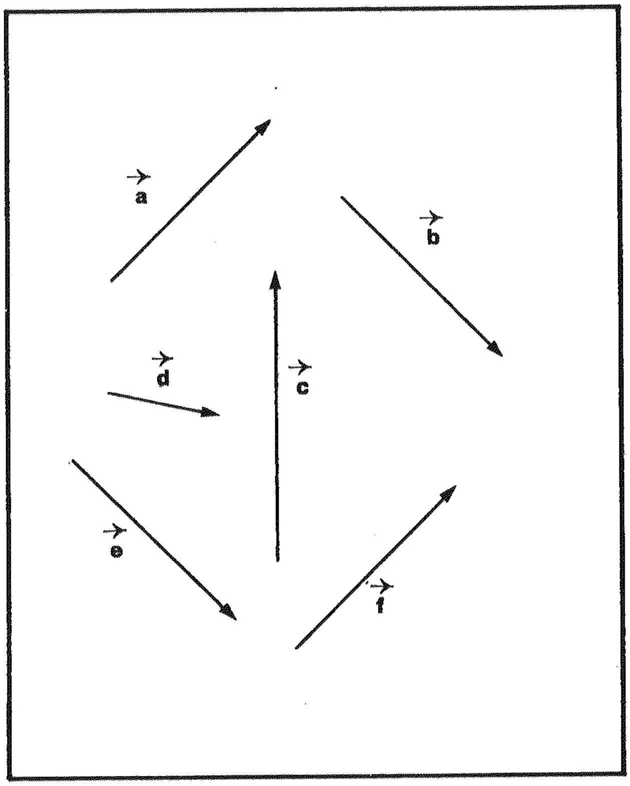


figura 2

e um sentido é chamado vetor. Assim, uma grandeza física desse tipo é denominada uma **grandeza vetorial.** Por sua vez, grandezas físicas caracterizadas apenas por um valor numérico e sua unidade são chamadas **grandezas escalares.**

Q7 — A temperatura é uma grandeza vetorial?

Q8 — A força com que a Terra atrai os corpos é uma grandeza vetorial?

Q9 — Qual a direção, e qual é o sentido da força com que a Terra atrai os corpos?

1. Representação de grandezas vetoriais

Uma maneira de representar o valor, a direção e o sentido de uma grandeza vetorial é desenhar um segmento orientado, cuja direção e sentido sejam iguais às da grandeza considerada e cujo comprimento represente em escala o valor da grandeza.

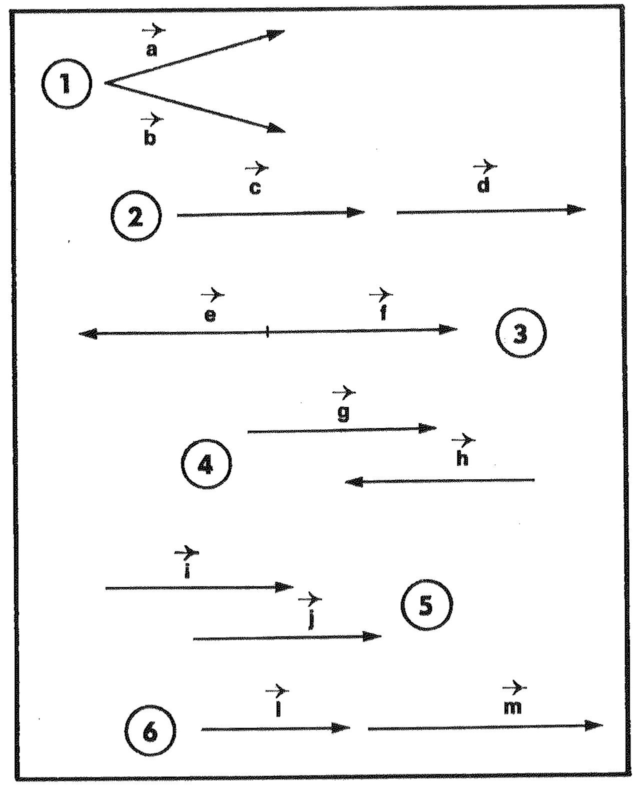


figura 3

Segmentos orientados que possuem a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo representam o mesmo vetor.

Q10 — Quais dos segmentos orientados da figura 2 representam o mesmo vetor?

Q11 — Quais dos pares de segmentos orientados da figura 3 representam o mesmo vetor?

Voltemos agora ao caso do avião. A representação de sua velocidade pode ser feita através de um segmento orientado, cuja direção e sentido coincidam com a direção e o sentido do movimento do avião. Para representar o valor da velocidade, devemos escolher uma escala; se escolhermos essa escala de modo que cada centímetro corresponda a 400km/h, o segmento orientado que representa a velocidade do avião (que é de 800km/h) terá 2cm de comprimento.

Dessa forma, caracterizamos perfeitamente a velocidade do avião através de um segmento orientado. Seu comprimento, de 2cm, indica que a velocidade é 800km/h; sua

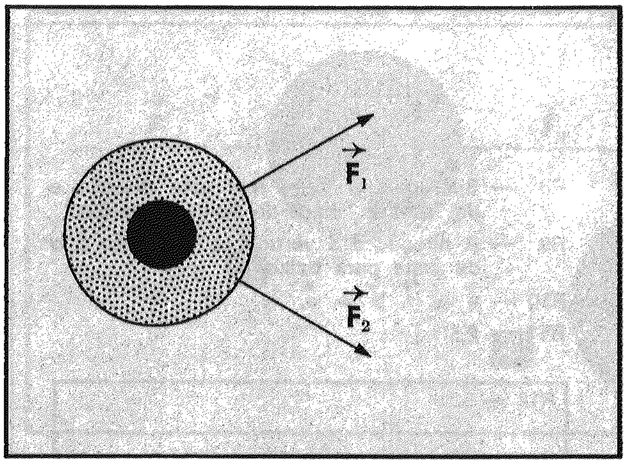


figura 4

R12 —

direção, dada pelo ângulo que forma com a linha do equador (0°), é a direção do movimento do avião; finalmente, seu sentido é de oeste para leste, que é o sentido em que o avião se movia.

Q12 — Utilizando a mesma escala (cada centímetro corresponde a 400km/h), represente no quadro acima a velocidade de um avião que se dirige para sudeste, numa direção que forma um ângulo de 30° com a direção leste-oeste, e que está se movendo a 600km/h.

As grandezas vetoriais desempenham um papel muito importante na Física; uma delas, por exemplo, é a força. A figura 4 é o esquema de um disco ao qual são aplicadas duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. A escala em que as forças estão representadas é a de 1cm: 1N.

Q13 — Essas forças são iguais?

Q14 — O que caracteriza uma grandeza vetorial?

Q15 — O que caracteriza uma grandeza escalar?

RESPOSTAS

R_7 -

R_8 -

R_9 -

R_{10} -

R_{11} -

R_{13} -

R_{14} -

R_{15} -

R1 — Não. O avião poderia ter caído em qualquer ponto de uma circunferência de 400km de raio.

R2 — O piloto deveria ter informado para onde se dirigia.

R3 — Não, pois mesmo sabendo-se que o avião voava paralelamente ao equador, não se teria nenhuma informação sobre se ele voava de leste para oeste ou de oeste para leste.

R4 — O avião poderia ser encontrado ao longo da reta leste-oeste que contém a confluência dos rios Tocantins e Araguaia, aproximadamente a 400km à direita ou à esquerda desse ponto.

R5 — O avião teria aterrissado a meio caminho entre Barra do Corda e Presidente Dutra.

R6 — Uma reta determina uma e uma só direção, ao passo que os sentidos possíveis são dois.

R7 — Não. Embora a temperatura apresente valores positivos e negativos, não há nenhuma direção do espaço que esteja associada a ela. Ela é, assim, uma grandeza escalar.

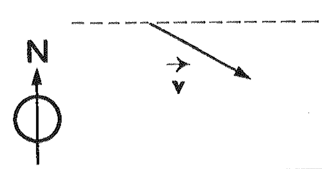
R8 — Sim, pois a força tem uma direção e um sentido, além do valor numérico.

R9 — A direção é a vertical, e o sentido é o de cima para baixo.

R10 — $\vec{a} = \vec{f}$, $\vec{b} = \vec{e}$.

R11 — 2,5

R12 —



R13 — Não; embora $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ tenham o mesmo módulo, suas direções são diferentes.

R14 — Uma grandeza vetorial é caracterizada por um valor numérico e sua unidade, uma direção e um sentido.

R15 — Uma grandeza escalar é caracterizada por um número e uma unidade.

2. Operações com grandezas vetoriais

Se lhe fosse perguntado quanto é 2 mais 2, você certamente não hesitaria em dar a resposta. A adição de grandezas escalares de mesma espécie também não apresenta dificuldade, pois pode ser efetuada exatamente como a adição de dois números. Por exemplo: 2 segundos + 2 segundos = 4 segundos, 10 gramas + 25 gramas = 35 gramas, e assim por diante. Os únicos cuidados a tomar são: nunca adicionar grandezas com unidades diferentes; e atribuir à soma a mesma unidade das parcelas (no caso de nossos exemplos, o segundo e o grama).

Quando se trata da adição de grandezas vetoriais, no entanto, as coisas são um pouco diferentes.

Para tornar o assunto mais concreto, vamos tratar inicialmente da grandeza vetorial mais familiar, a força. As conclusões a que chegarmos sobre operações com forças serão válidas para todas as outras grandezas vetoriais, respeitadas as respectivas unidades de medida.

Se aplicarmos simultaneamente a um corpo (por exemplo, um disco que se move sem atrito sobre uma mesa) duas forças de mesmo módulo, por exemplo 2N, o efeito sobre o corpo será o mesmo que se ele estivesse sujeito apenas à ação de uma força de 4N? Será que a direção e o sentido de cada uma das forças de 2N devem ser levados em conta para se conseguir chegar a uma conclusão?

No que segue, chamaremos de **resultante** à força que sozinha provoca o mesmo efeito que um conjunto de forças. Cada uma das forças do conjunto, por sua vez, é chamada de **componente.**

A figura 5 representa, em três situações distintas, um disco de gelo seco visto de cima, ao qual são aplicadas duas forças, $\vec{\mathbf{F}}_1$ e $\vec{\mathbf{F}}_2$, de mesmo módulo 2N. Você pode imaginar que as duas forças são aplicadas por duas molas iguais, esticadas de um mesmo comprimento.

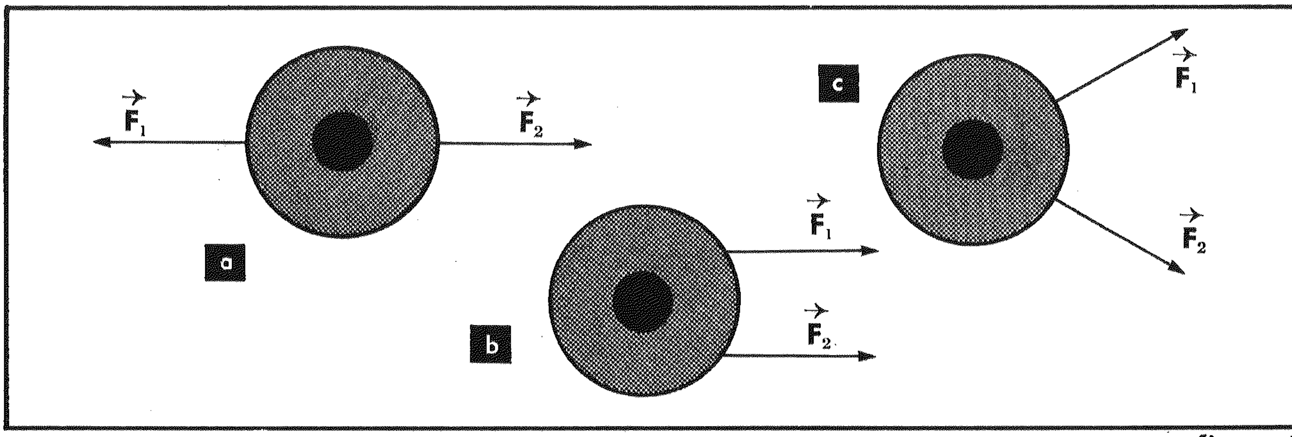


figura 5

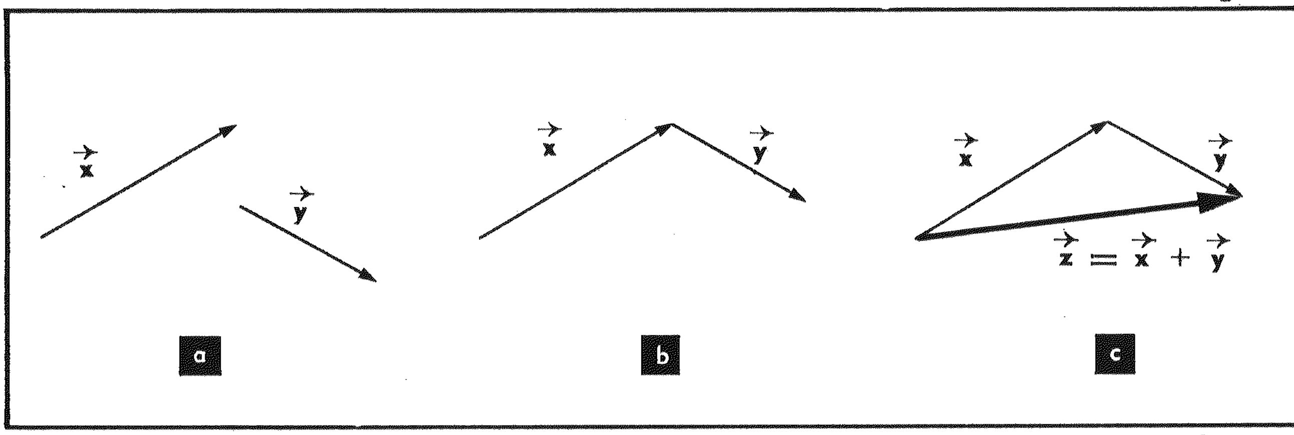


figura 6

No caso **a**, as duas forças se compensam, e a resultante é nula, isto é, seu módulo é igual a zero.

No caso **b**, não é difícil aceitar o fato de que a resultante das duas forças tem módulo 4N, e que sua direção e sentido coincidem com a direção e sentido de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

Assim, quando duas grandezas vetoriais possuem a **mesma direção** (casos **a** e **b**), precisamos apenas levar em conta os seus sentidos para determinar a resultante. Se as grandezas vetoriais têm o mesmo sentido, o módulo da resultante será a soma dos módulos das componentes (caso **b**); se as componentes têm sentidos opostos, o módulo da resultante é igual à diferença entre os módulos das componentes (caso **a**).

Ambos os casos, **a** e **b**, já sugerem que, ao adicionar grandezas vetoriais, devemos levar em conta não só o módulo dessas grandezas como também suas direções e sentidos. Nos dois casos que analisamos, no entanto, o fato de as forças componentes possuírem a mesma direção simplificou bastante nosso trabalho.

Quais serão, então, o módulo, o sentido e a direção da força componente no caso **c**? Descobri-los será nossa tarefa a seguir.

De modo geral, quando queremos adicionar grandezas vetoriais $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de mesma espécie, representadas por segmentos orientados (figura **6a**), fazemos a origem do segundo segmento, $\vec{y}$, coincidir com a extremidade do primeiro $\vec{x}$ (figura **6b**). Em seguida, traçamos o segmento orientado $\vec{z}$, que representa a soma das duas grandezas, como na figura **6c**. O segmento orientado $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ é a resultante, e tem por origem a origem do segmento $\vec{x}$ e por extremidade a extremidade do segmento $\vec{y}$.

Q16 — Determine graficamente a resultante das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ aplicadas ao disco no caso **c** da figura 5.

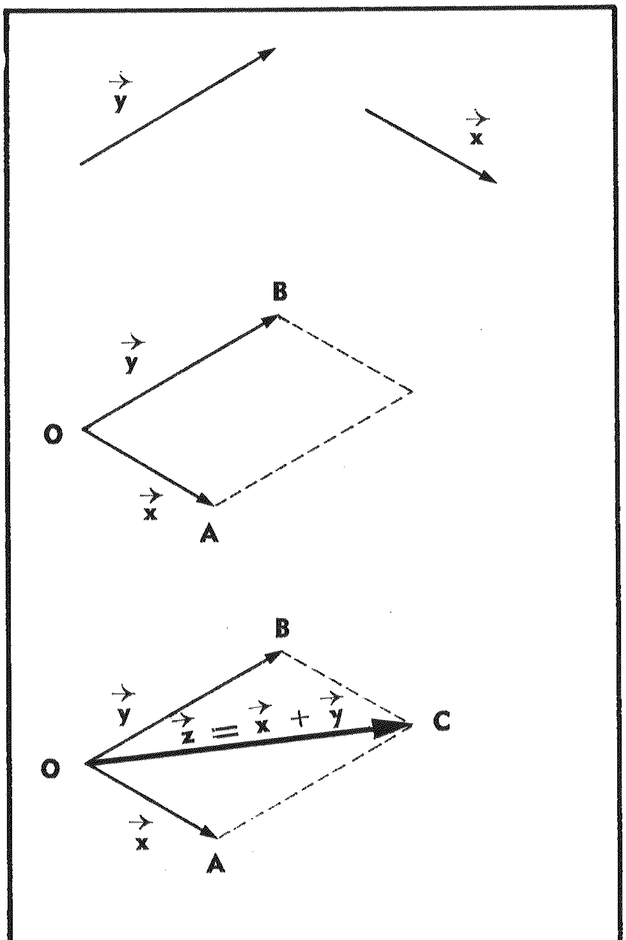


figura 7

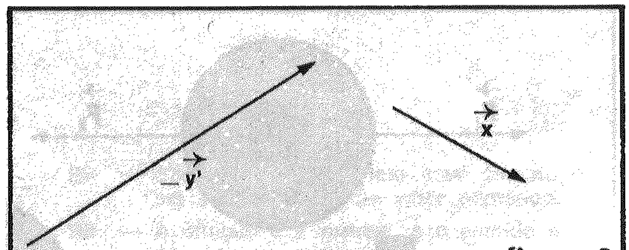


figura 8

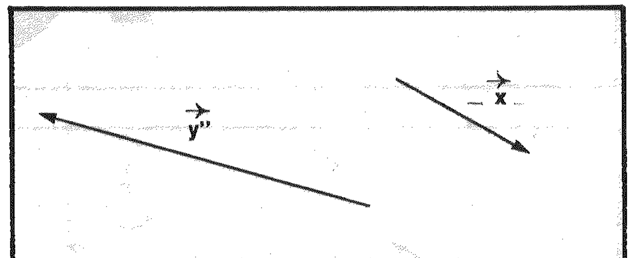


figura 9

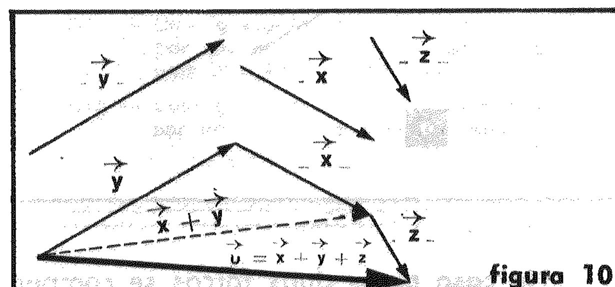


figura 10

Outra maneira de determinar graficamente a soma de duas grandezas vetoriais é a chamada "regra do paralelogramo". Para aplicá-la, devemos proceder da seguinte maneira: desenhamos, a partir de uma origem comum **O**, os segmentos orientados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ (figura 7), que representam, em escala, as duas grandezas vetoriais. A resultante é então dada pela diagonal $\overrightarrow{OC}$ do paralelogramo construído sobre $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. A regra do paralelogramo permite então determinar a direção, o sentido e o módulo da resultante da adição de duas grandezas vetoriais.

A figura 7 mostra que qualquer das duas regras leva ao mesmo resultado $\vec{x} + \vec{y}$.

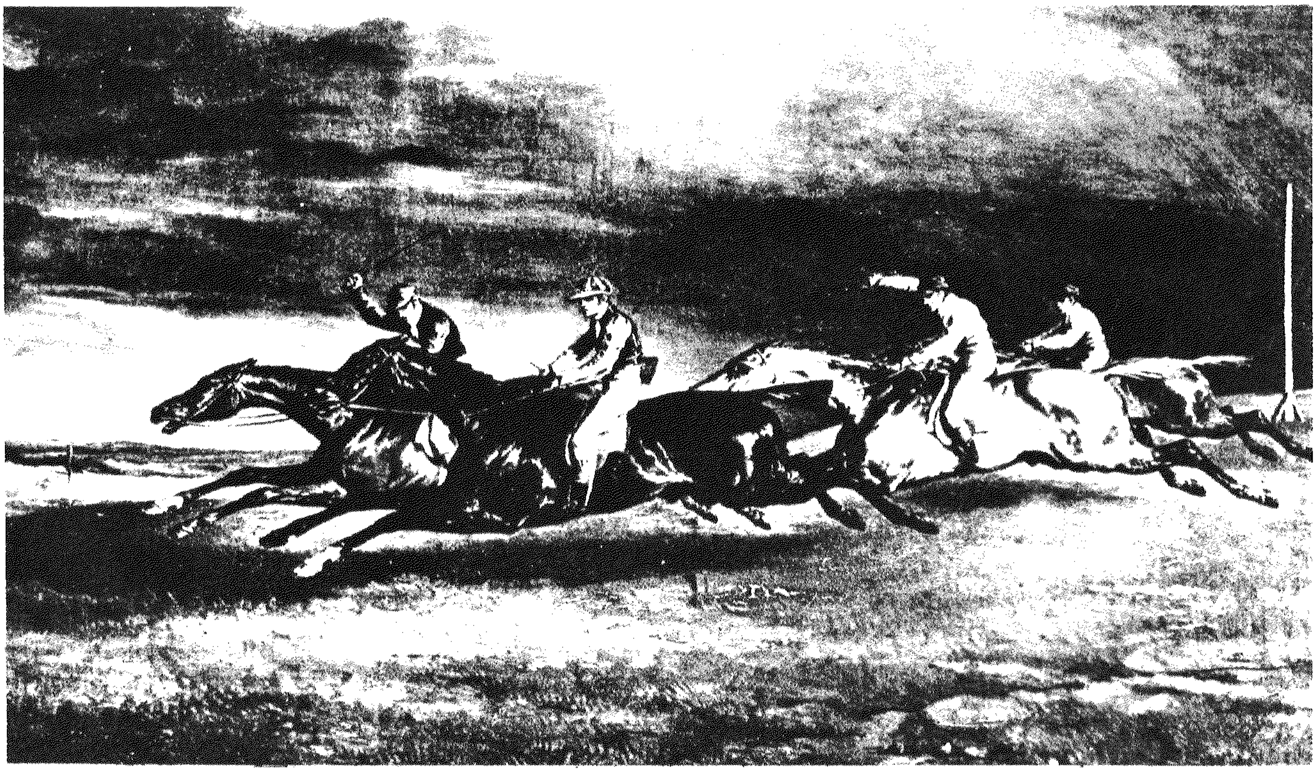
Q17 — Utilize a regra do paralelogramo para determinar graficamente a resultante das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ aplicadas ao disco no caso **c** da figura 5. Utilize a escala para determinar o módulo dessa resultante.

Q18 — A resultante tem direção, sentido ou módulo igual a $\vec{F}_1$ ou a $\vec{F}_2$? O módulo da resultante é igual à soma dos módulos das componentes?

Na figura 8 está representado o mesmo vetor $\vec{x}$ da figura 7, e um outro vetor $\vec{y}'$, de mesma direção e sentido que $\vec{y}$ mas de módulo 1,5 vez maior que este último.

Q19 — A direção do vetor $\vec{x} + \vec{y}'$ é a mesma de $\vec{x} + \vec{y}$?

Na figura 9, o vetor $\vec{y}'$ é substituído por outro, $\vec{y}''$, cujo módulo é igual ao de $\vec{y}'$, mas cuja direção é diferente da deste último.



O Derby de Epsom, de T. Gericault. Há diferentes modos de se apresentar o movimento, conforme o objetivo. Neste quadro o artista dá uma representação plástica do fenômeno. Em vez de usar entes abstratos como vetores para caracterizar o movimento — o que seria necessário para um estudo quantitativo —, o pintor joga com efeitos visuais para evidenciar a relação cavalo-movimento-tensão muscular. Assim, a direção do movimento é caracterizada pela disposição dos cavalos em um bloco horizontal e pelo tratamento do fundo do quadro, onde todas as sombras são alongadas segundo a horizontal. A intensidade do movimento é dada pela falta de contato entre os cascos e o solo.

Q20 — Determine a resultante $\vec{x} + \vec{y}''$; sua direção é a mesma de $\vec{x} + \vec{y}'$?

Assim, o módulo, a direção e o sentido da resultante $\vec{x} + \vec{y}$ da adição de dois vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dependem dos módulos, direções e sentidos de cada um desses vetores.

Quando se trata de efetuar a soma de mais de duas grandezas vetoriais, dispomos os segmentos orientados que as representam de modo que a origem de cada um deles coincida com a extremidade do anterior. Determinamos então a resultante da adição dos dois primeiros vetores; em seguida, determinamos a soma desta resultante com o terceiro vetor, e assim por diante. Dessa maneira, a soma da penúltima resultante com o último vetor corresponde à resultante da adição de todos os vetores. Percebemos, assim, que não é necessário determinar todas as resultantes intermediárias para achar a soma de vários vetores: basta unir a origem do primeiro segmento orientado com a extremidade do último (figura 10).

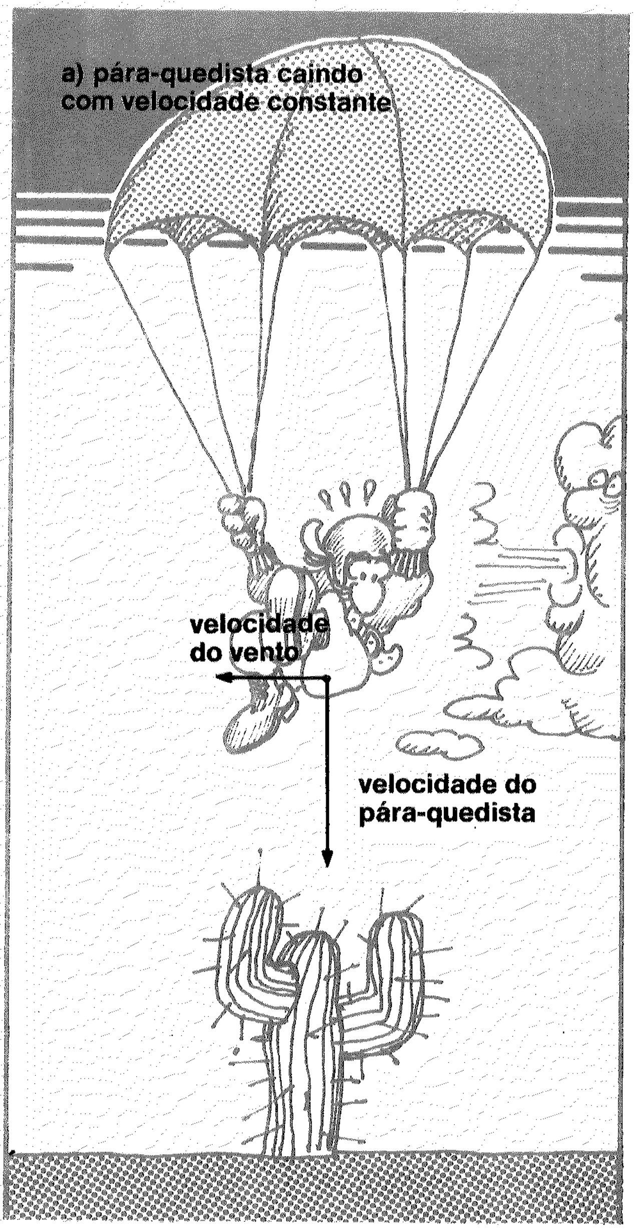
RESPOSTAS

R_{18} -

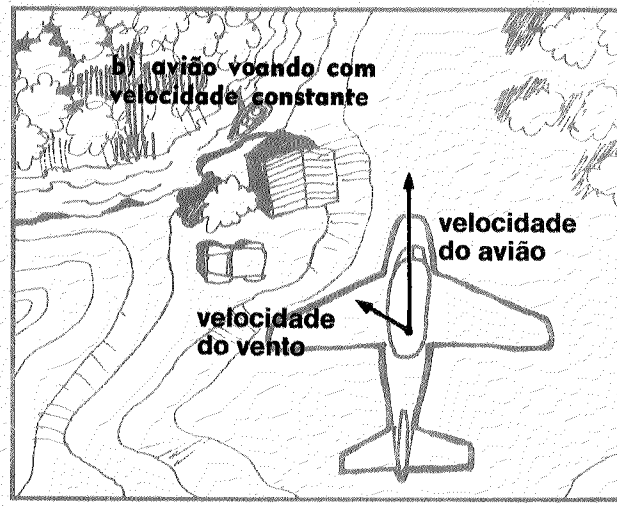
R_{19} -

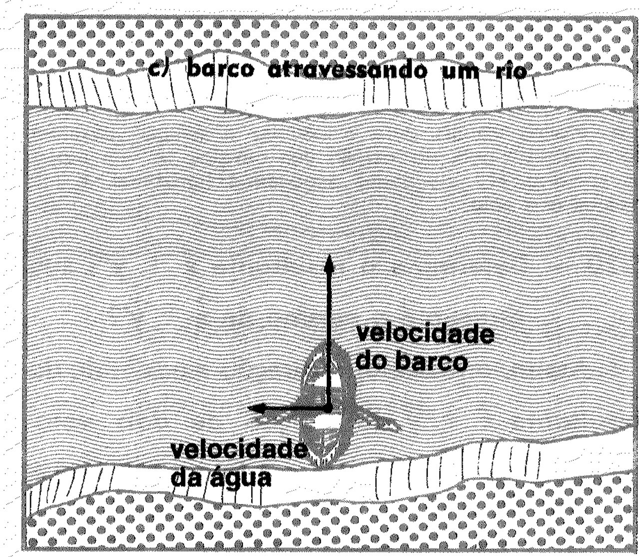
R_{20} -

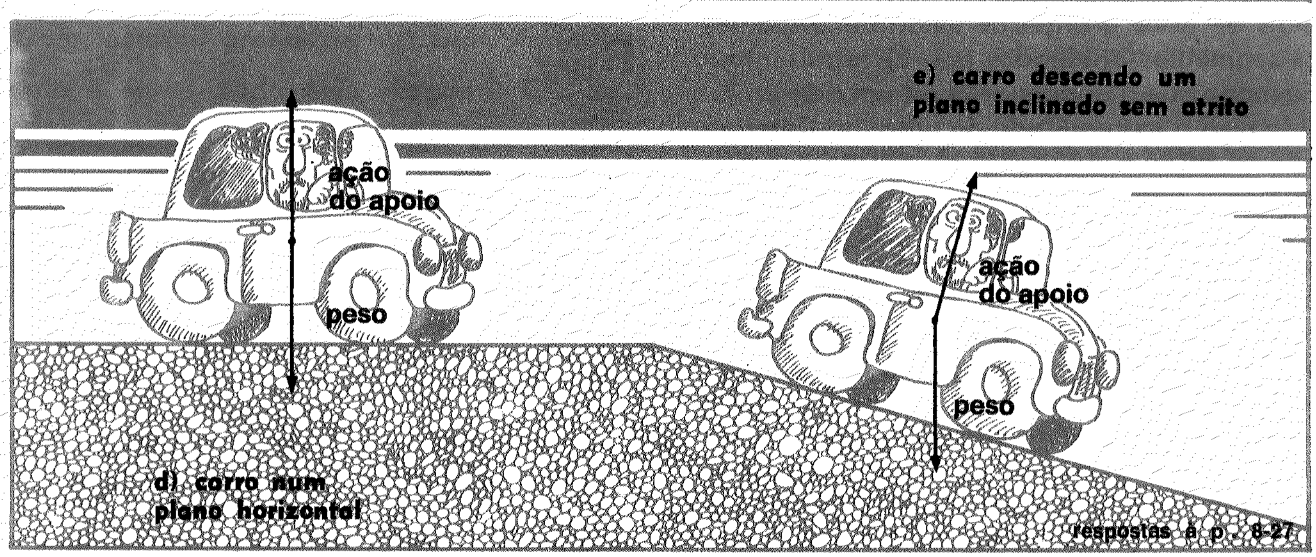
Exercícios: Determine a direção e o valor da resultante nos seguintes casos:



ESCALA
a) 1cm = 50km/h
b) 1cm = 300km/h
c) 1cm = 10km/h
d) 1cm = 1 000N
e) 1cm = 1 000N







respostas à p. 8-27

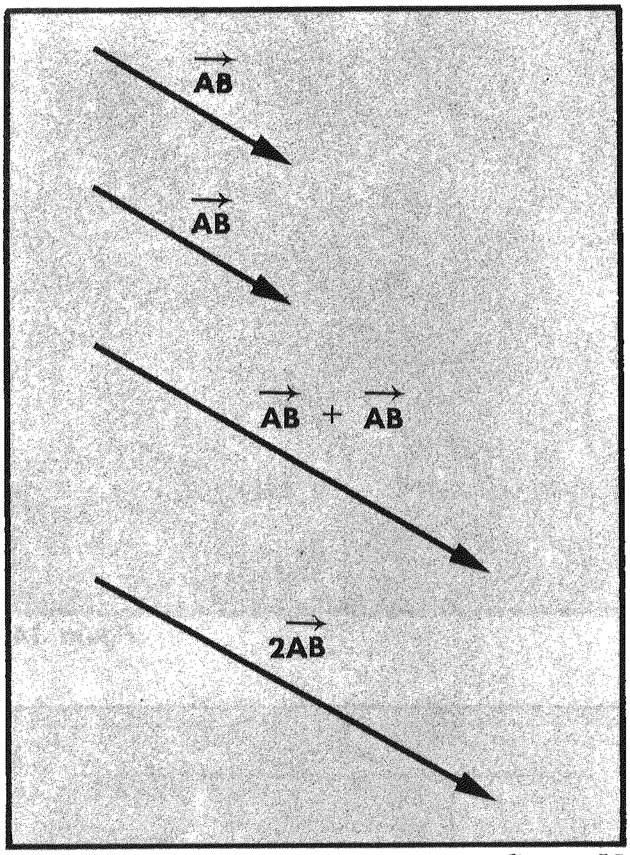


figura 11

3. Multiplicação e divisão de uma grandeza vetorial por um número

Existe uma operação bastante simples que se faz entre um **número** e um **vetor**: podemos multiplicar um vetor por um número. Essa multiplicação é bastante diferente das operações comuns, que existem entre números; ela se dá entre grandezas de natureza diversa.

Como sabemos, quando multiplicamos um **número** por outro, obtemos um terceiro **número**, que é o produto deles. Por outro lado, quando multiplicamos um **vetor** por um **número**, obtemos um outro **vetor**.

Assim, quando multiplicamos o número 2 pelo vetor $\overrightarrow{AB}$, obtemos o vetor $2\overrightarrow{AB}$, que corresponde à soma de dois vetores iguais a $\overrightarrow{AB}$, como mostra a figura 11.

Assim, $2\overrightarrow{AB}$ indica uma grandeza vetorial de mesma direção, mesmo sentido e módulo duas vezes maior que $\overrightarrow{AB}$.

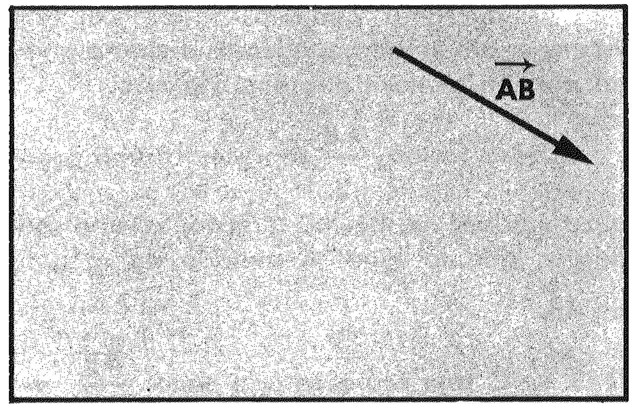


figura 12

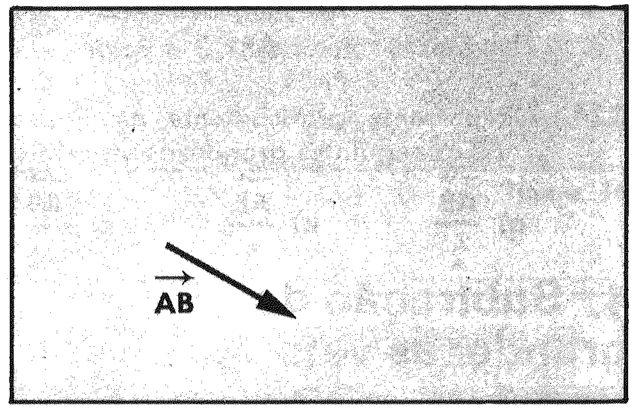


figura 13

De modo geral, se **n** é um número positivo, $n\overrightarrow{AB}$ é uma grandeza vetorial de mesma direção, mesmo sentido e módulo **n** vezes maior que $\overrightarrow{AB}$. Se o número **n** é negativo, $n\overrightarrow{AB}$ é uma grandeza vetorial de mesma direção, **sentido oposto** e módulo **n** vezes maior que $\overrightarrow{AB}$. Em particular, quando $n = -1$, o vetor $(-1) \times \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$ tem mesma direção, mesmo módulo e sentido oposto ao do vetor $\overrightarrow{AB}$; o vetor $-\overrightarrow{AB}$ é chamado **simétrico,** ou **oposto** de $\overrightarrow{AB}$.

Q21 — Represente graficamente, na figura 12, a grandeza vetorial simétrica a $\overrightarrow{AB}$.

Q22 — Represente graficamente, na figura 13, as grandezas vetoriais:

a) $2 . \overrightarrow{AB}$

b) $-2 . \overrightarrow{AB}$

Assim como podemos multiplicar um vetor por um número, podemos **dividir** um vetor por um número diferente de zero.

Dessa forma, $\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ representa uma grandeza vetorial de mesma direção, mesmo sentido e módulo igual à metade do módulo de $\overrightarrow{AB}$.

Q23 — O que representa o vetor $\frac{\overrightarrow{AB}}{4}$, em termos do vetor $\overrightarrow{AB}$? E o vetor $\frac{\overrightarrow{AB}}{-5}$?

Q24 — Represente graficamente na figura 14 as seguintes grandezas vetoriais:

a) $\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ b) $\frac{\overrightarrow{AB}}{3}$ c) $\frac{\overrightarrow{AB}}{-2}$

4. Subtração de grandezas vetoriais

Subtrair uma grandeza vetorial $\vec{y}$ de outra $\vec{x}$ é adicionar $\vec{x}$ à simétrica de $\vec{y}$. Assim,

$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$.

Uma maneira prática de obter a diferença entre duas grandezas vetoriais numa certa ordem — por exemplo, subtrair $\vec{y}$ de $\vec{x}$ — é traçar os segmentos orientados representativos de cada uma delas a partir de uma origem comum **O**, e depois traçar o segmento orientado que tem origem na extremidade do segmento $\vec{y}$ e extremidade na extremidade do segmento $\vec{x}$. Esse segmento orientado representa a diferença $\vec{x} - \vec{y}$ (figura 15).

A diferença entre dois vetores é, assim, o vetor que, adicionado ao segundo, dá como resultado o primeiro.

Q25 — Determine graficamente a diferença $\vec{a} - \vec{b}$ entre as duas grandezas vetoriais representadas na figura 16. Tente fazer a mesma coisa de duas maneiras diferentes.

Verifique que a diferença entre esses vetores é o vetor que adicionado ao segundo dá como resultado o primeiro.

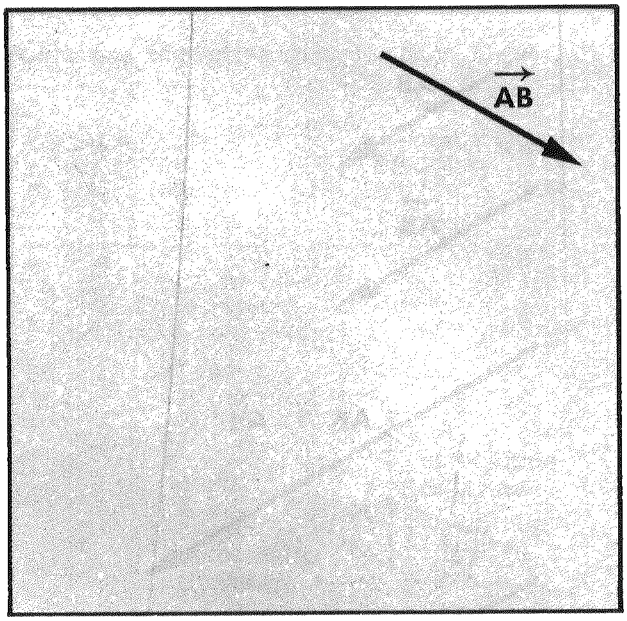


figura 14

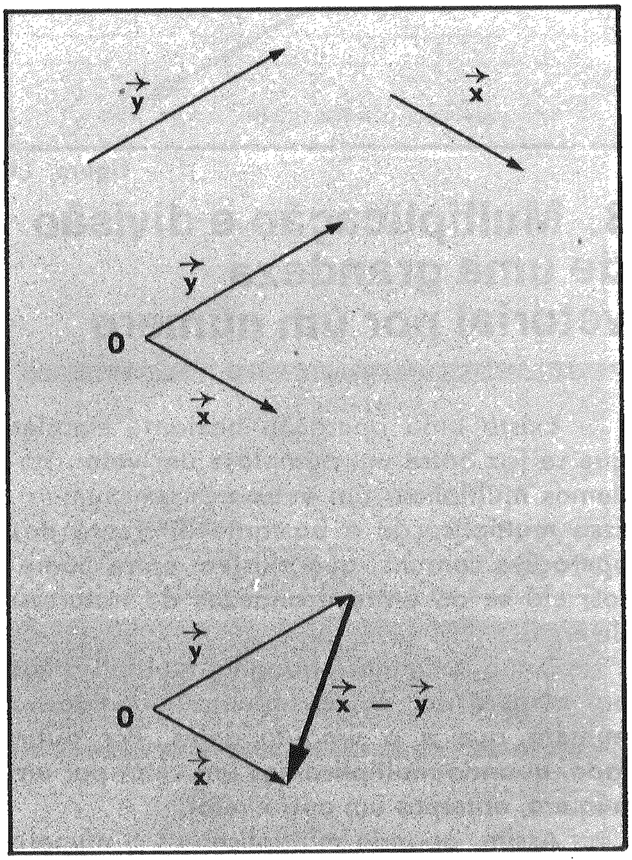


figura 15

RESPOSTAS

R$_{23}$ -

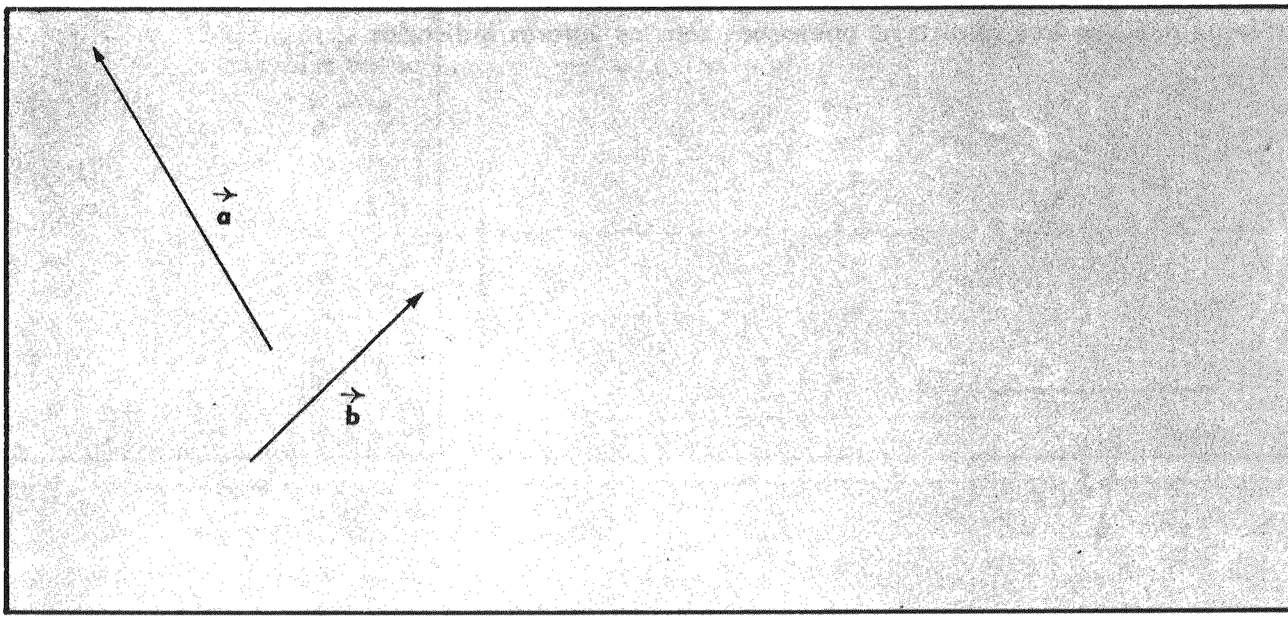
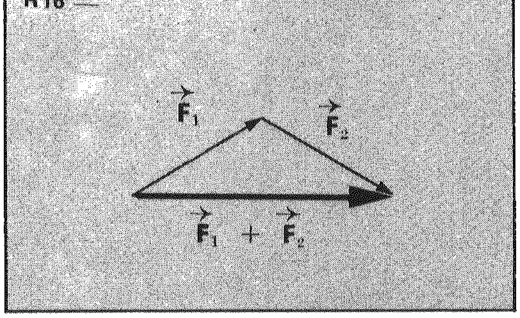
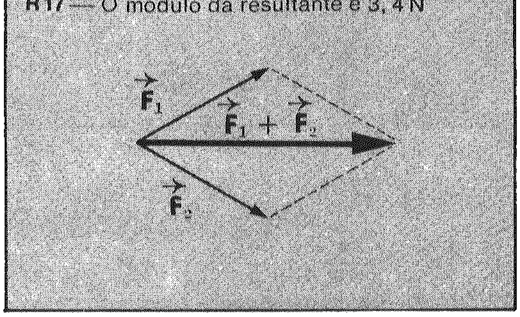


figura 16

R16 —



R17 — O módulo da resultante é 3, 4 N

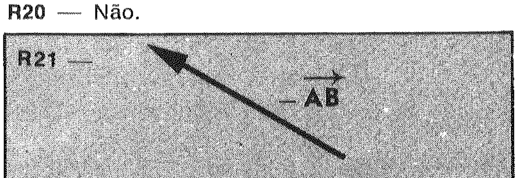


R18 — Não. Não.

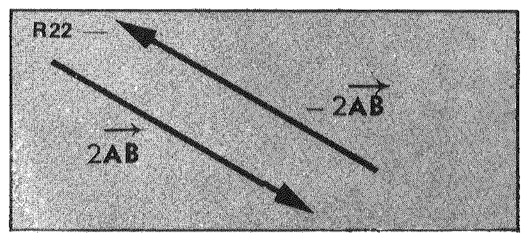
R19 — Não.

R20 — Não.

R21 —

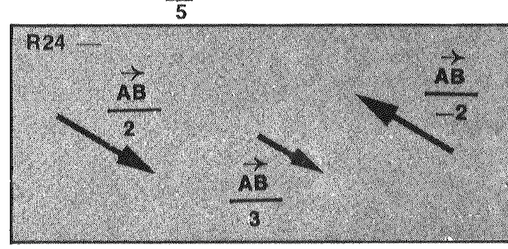


R22 —

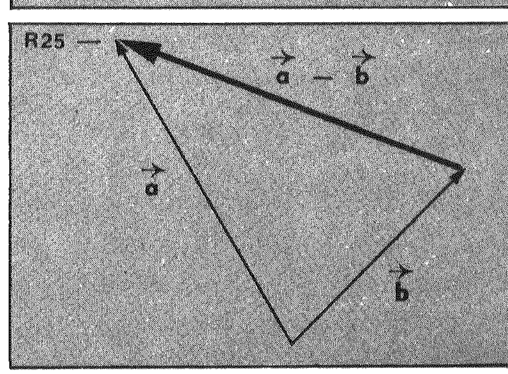


R23 — $\frac{\overrightarrow{AB}}{4}$ representa um vetor de mesma direção, mesmo sentido e módulo 4 vezes menor que o módulo de $\overrightarrow{AB}$. $\frac{\overrightarrow{AB}}{-5}$ é um vetor simétrico de $\frac{\overrightarrow{AB}}{5}$.

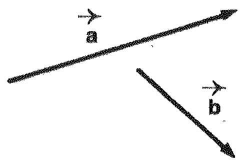
R24 —



R25 —

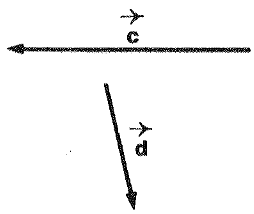


Efetue nos quadros abaixo as operações com os vetores indicados.



$\vec{a} + \vec{b}$

$\vec{a} - \vec{b}$

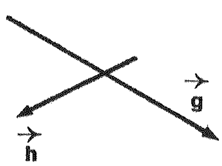


$\vec{c} + \vec{d}$

$\vec{c} - \vec{d}$

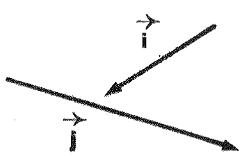
$\vec{e} + \vec{f}$

$\vec{e} - \vec{f}$



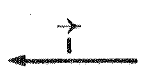
$\vec{g} + \vec{h}$

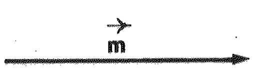
$\vec{g} - \vec{h}$



$\vec{i} + \vec{j}$

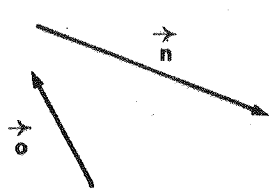
$\vec{i} - \vec{j}$





$-2\,\vec{l}$

$\frac{\vec{m}}{2}$



$-\vec{n}$

$\frac{\vec{o}}{2}$

respostas à p . 8-20

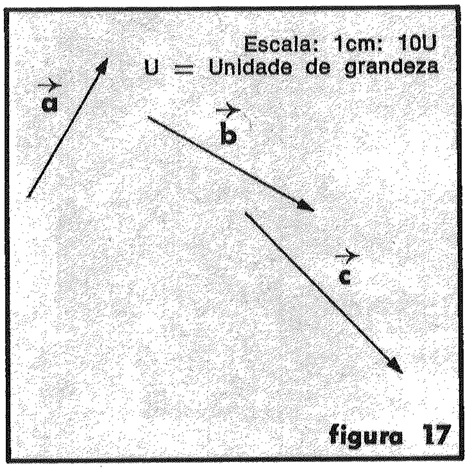


figura 17

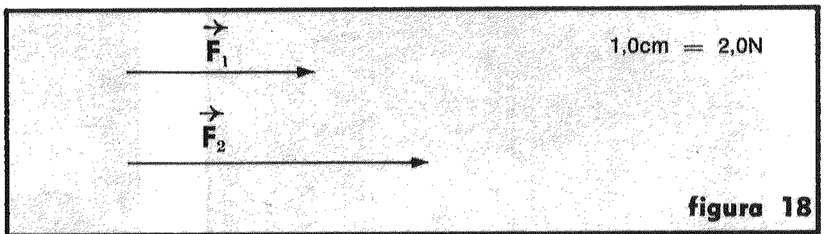


figura 18

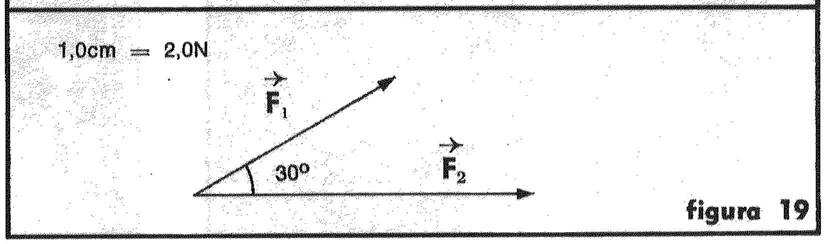


figura 19

figura 20

5. Exercícios de aplicação I

E1 — Dadas as grandezas vetoriais $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ representadas na figura 17 (escala 1cm: 10U onde U = unidade de grandeza), determine em escala a resultante de $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

E2 — Os segmentos da figura 18 representam as forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ que possuem a mesma direção e sentido. A escala é 1cm: 2N. Determine em escala:

a) A soma $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

b) A diferença $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$

E3 — Os segmentos da figura 19 representam em escala duas forças. Determine:

a) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

b) $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$.

E4 — Usando as informações da questão anterior, determine na figura 20:

a) $2\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

b) $2\vec{F}_2 - \vec{F}_1$.

figura 21

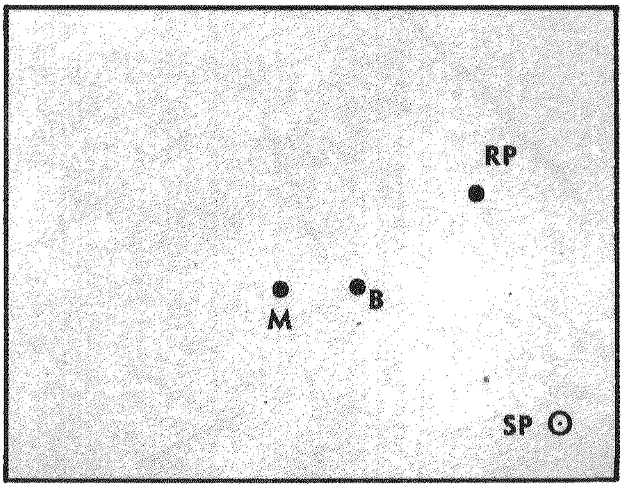


figura 23

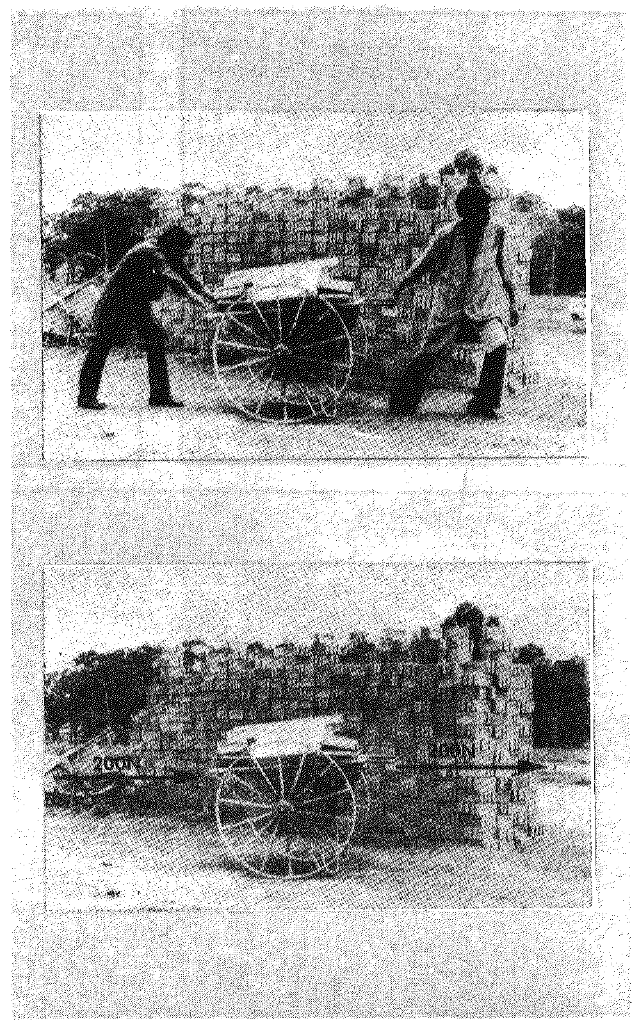


figura 22

Uma pedra está sujeita à ação de duas forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ de módulos 2N e 3N, respectivamente, formando entre si um ângulo de 60°.

E5 — Desenhe, em escala, os segmentos representativos das forças (fig. 21).

E6 — Qual a intensidade, direção e sentido da força resultante que age sobre a pedra?

E7 — Qual a direção seguida pela pedra?

E8 — Um carrinho, num plano horizontal, está sendo puxado por uma pessoa e empurrado por outra com forças de 200N cada uma, conforme mostra a figura 22. Qual é a força resultante?

E9 — Utilizando os dados fornecidos a seguir, represente, na figura 23, as velocidades de três aviões que voam a alturas diferentes sobre a cidade de Bauru. Faça cada centímetro corresponder a 100km/h.

1º avião: velocidade $\vec{v}_1$

Valor (módulo) da velocidade: $v_1 = 200$km/h.
Direção: da reta que liga Bauru a Marília.
Sentido: de Bauru para Marília.

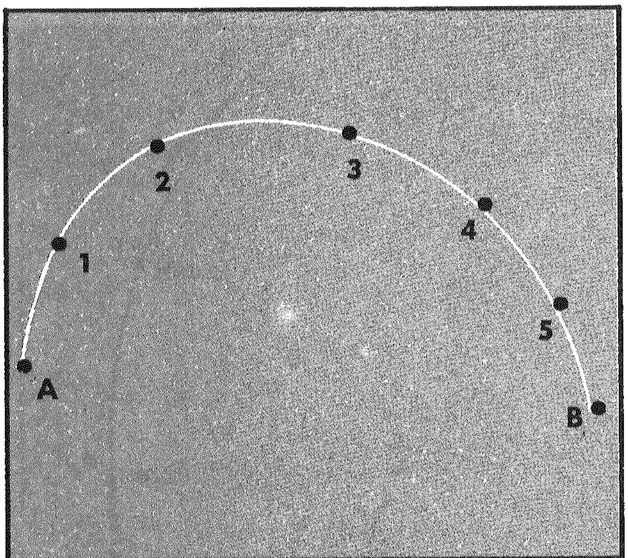
2º avião: velocidade $\vec{v}_2$

Valor da velocidade: $v_2 = 300$km/h.
Direção: da reta que liga Bauru a Ribeirão Preto.
Sentido: para sudoeste.

3º avião: velocidade $\vec{v}_3$

Valor da velocidade: $v_3 = 500$km/h.
Direção: da reta que liga Bauru a São Paulo.
Sentido: para noroeste.

A figura 24 representa a trajetória de um móvel que se desloca de **A** para **B**. Sabendo que a velocidade tem a direção da tangente em cada ponto da trajetória e o sentido do movimento, represente na figura 24 as velocidades do corpo nos pontos assinalados. Use uma escala de 1cm: 10cm/s e os dados da tabela.



POSIÇÃO	VELOCIDADE
1	$v = 20 \frac{cm}{s}$
2	$v = 20 \frac{cm}{s}$
3	$v = 25 \frac{cm}{s}$
4	$v = 20 \frac{cm}{s}$
5	$v = 10 \frac{cm}{s}$

figura 24

E10 — Quais das velocidades que você representou possuem o mesmo módulo?

E11 — Existe algum par de pontos em que a velocidade do corpo é a mesma?

E12 — Houve alguma variação na velocidade do corpo quando ele passou da posição 1 para a posição 2?

E13 — Qual a variação de velocidade do corpo quando passou da posição 2 para a posição 3 $(\vec{v}_3 - \vec{v}_2)$?

E14 — Uma caixa é amarrada a um balão de gás. A Terra atrai a caixa com uma força de 0,10N, enquanto que o balão exerce sobre a caixa uma força para cima de 0,15N (figura 25). Qual é a força resultante sobre a caixa?

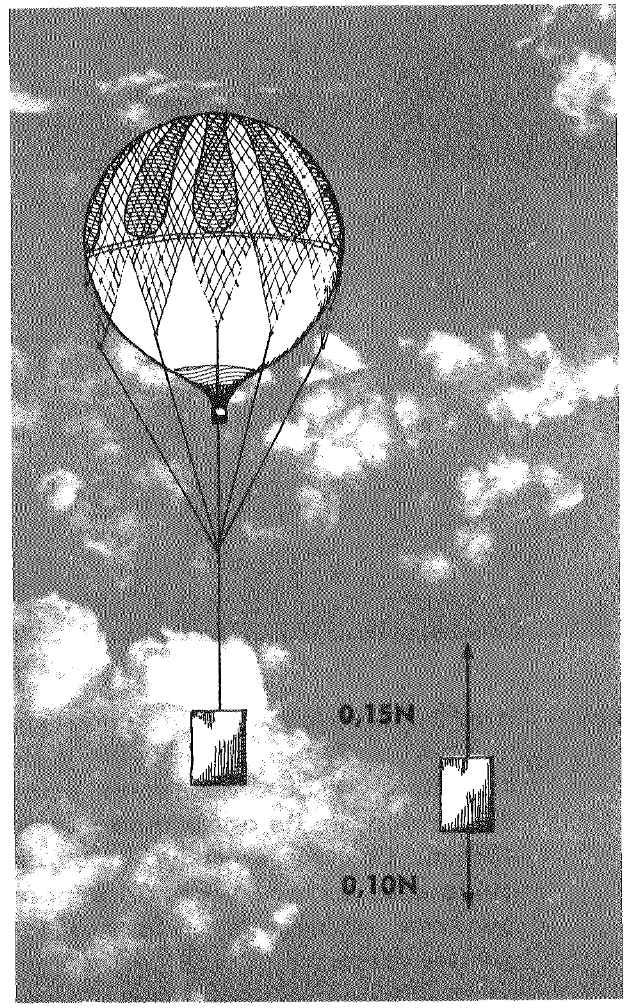


figura 25

RESPOSTAS DE EXERCÍCIOS

R_6 -

R_7 -

R_8 -

R_{10} -

R_{11} -

R_{12} -

R_{13} -

R_{14} -

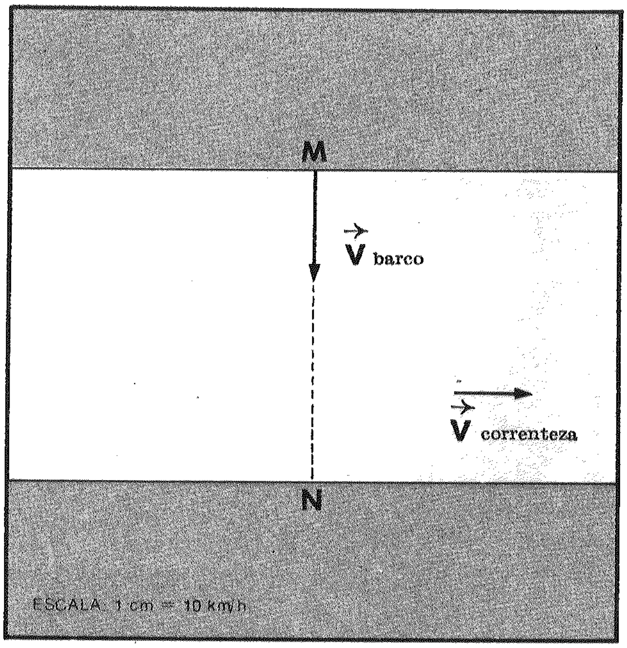


figura 26

E15 — A velocidade de cruzeiro de um avião que faz a rota São Paulo—Rio é de 400km/h. A distância entre essas duas cidades é de aproximadamente 400km. Calcular as velocidades do avião e os tempos necessários para percorrer aquela distância nos seguintes casos:

a) Com vento de cauda (isto é, com direção e sentido de São Paulo para o Rio) de 40km/h.

b) Com vento de proa (isto é, com direção e sentido do Rio para São Paulo) de 40km/h.

E16 — Um barco parte do ancoradouro **M** e atravessa o rio em linha reta (figura 26), atingindo a margem oposta no ponto N. Na figura estão representadas, em escala, a velocidade da correnteza e a velocidade resultante do barco. Determine a direção, o sentido e o módulo da velocidade própria do barco (velocidade do barco em água parada).

E17 — Um bloco de massa 8,0kg parte do repouso, sendo puxado sobre uma mesa horizontal por uma força $\vec{F}$ constante, de módulo 2,0N. Verifica-se que o bloco atinge a velocidade de 1,0m/s em 6,0s.

a) Qual é a aceleração do bloco, calculada pela fórmula $a = |\Delta\vec{v}/\Delta t|$?

b) Qual a razão (**F/m**) entre a força aplicada e a massa do bloco?

c) A diferença encontrada entre as acelerações calculadas nos itens **a** e **b** pode ser devida a alguma outra força, que não foi mencionada?

d) Qual é a direção, o sentido e o módulo dessa força?

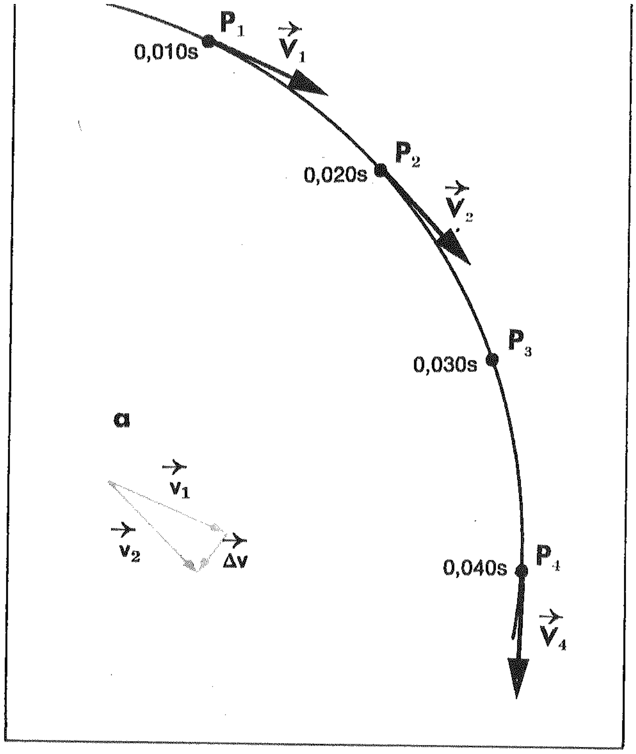


figura 27

6. Aceleração vetorial

A velocidade de um corpo é uma grandeza vetorial, cuja direção é, em cada instante, a da tangente à trajetória desse corpo. Portanto, se um móvel descreve uma trajetória curvilínea, sua velocidade varia, pelo menos em direção.

Considere a figura 27.

Q26 — As velocidades correspondentes às posições P_1, P_2 e P_4 possuem a mesma direção?

Q27 — As velocidades $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_4$ são iguais?

O móvel passa pela posição P_1 com velocidade $\vec{v}_1$, e pela posição P_2 com velocidade $\vec{v}_2$. Sendo $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$, a velocidade do corpo sofreu uma variação entre as posições P_1 e P_2.

figura 27 a

Chamando de $\Delta\vec{v}$ a variação da velocidade, podemos escrever

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v},$$

que é mostrado graficamente na figura.

Note que a variação da velocidade é também **uma grandeza vetorial,** pois $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

Q28 — Determine graficamente $\vec{v}_4 - \vec{v}_1$ e $\vec{v}_4 - \vec{v}_2$ (figura 27a).

Q29 — A escala da figura 27 é tal que 1cm corresponde a 10cm/s. Determine os **valores** das seguintes variações de velocidade:

a) $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$
b) $\vec{v}_4 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}_1$
c) $\vec{v}_4 - \vec{v}_2 = \Delta\vec{v}_2$

O móvel passou pela posição P_1 no instante t_1 e pela posição P_2 no instante t_2. O intervalo de tempo decorrido para ir da posição P_1 à posição P_2 é $\Delta t = t_2 - t_1$.

Q30 — Verifique na figura 27 qual foi o intervalo de tempo decorrido entre as passagens do corpo pelas posições

a) P_1 e P_2;
b) P_2 e P_4;
c) P_1 e P_4.

RESPOSTAS DE EXERCÍCIOS

R_{15}-a)

b)

R_{17}-a)

b)

c)

d)

RESPOSTAS

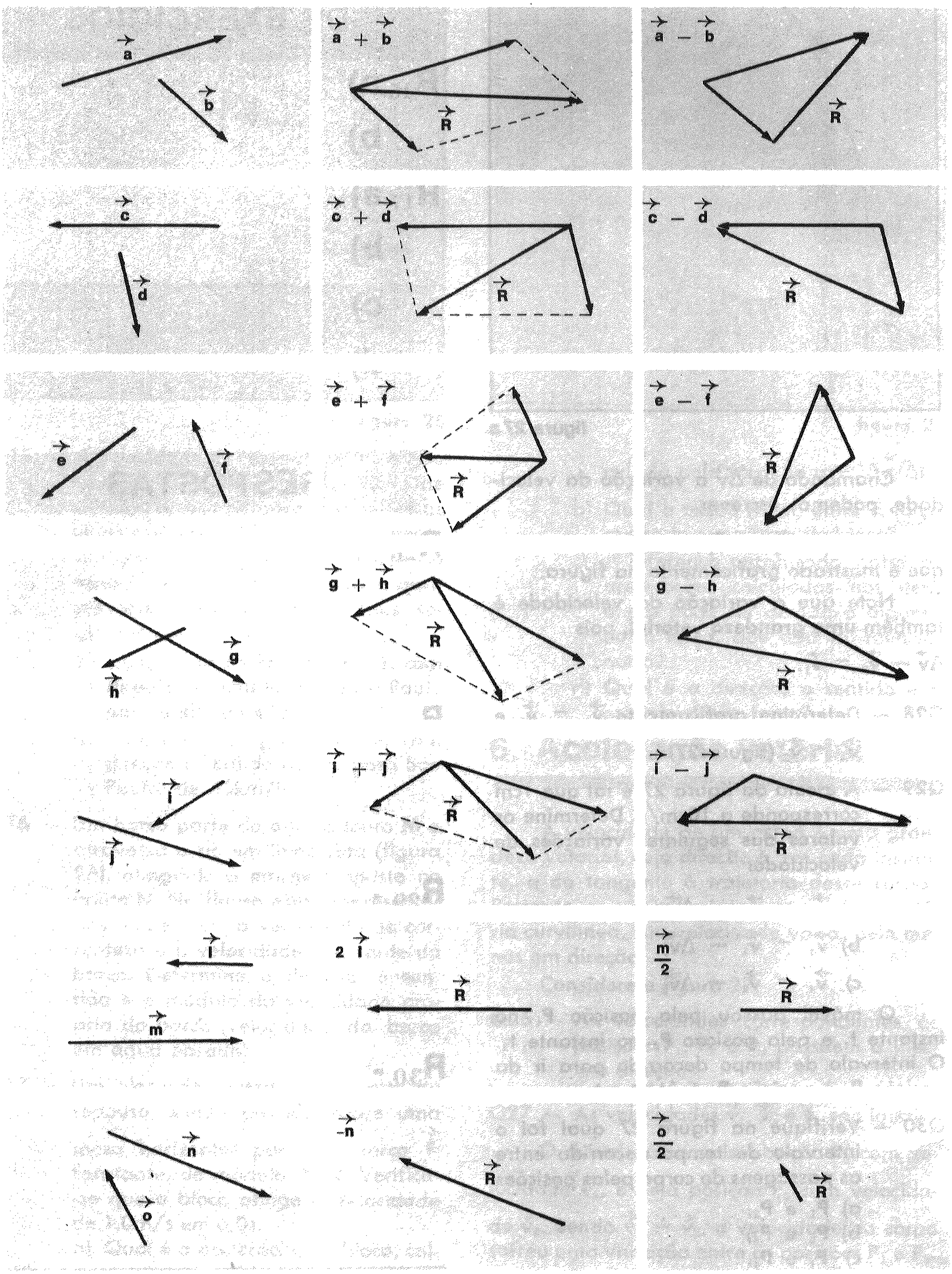
R_{26} -

R_{27} -

R_{29} -

R_{30} -

Respostas aos exercícios da página 8-14.



No intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ a velocidade sofreu uma variação $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Então, definimos a aceleração média do corpo no intervalo Δt como sendo:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

A aceleração média é o quociente entre a variação da velocidade $\Delta \vec{v}$ e o intervalo de tempo Δt durante o qual ocorreu a variação. Como Δt é sempre positivo, $\vec{a}_m$ é a grandeza vetorial que tem a direção e sentido de $\Delta \vec{v}$ e cujo módulo é o quociente do módulo de $\Delta \vec{v}$ por Δt. Simbolicamente:

$$|\vec{a}_m| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$$

Q31 — Qual é o módulo da aceleração vetorial média entre as posições P_1 e P_2; P_1 e P_4; P_2 e P_4?

Resta agora verificar como se determina a aceleração instantânea do corpo, isto é, a aceleração em um ponto da trajetória, por exemplo no ponto P_2 da figura. Para isso, fixamos um intervalo de tempo pequeno que contenha o instante correspondente à passagem do móvel pelo ponto P_2; calculamos a aceleração média nesse intervalo e assumimos que essa é a aceleração no ponto P_2.

Naturalmente, ao fazer isso, podemos estar cometendo um erro, pois o que determinamos foi uma aceleração média e não a aceleração no ponto P_2. Esse erro será tanto menor quanto menor for o intervalo considerado.

RESPOSTAS

R31 -

7. Forma vetorial da lei de Newton

No capítulo 7, estudamos a relação entre força e aceleração nos movimentos retilíneos; nos casos estudados, a natureza vetorial das grandezas não influía nos resultados. Vamos agora analisar o caso mais geral de movimentos não retilíneos, em que se faz necessário formular vetorialmente a segunda lei de Newton.

Pela lei da inércia, se a soma das forças (a resultante) que agem sobre o corpo for nula, sua velocidade não varia, isto é, ela não varia nem em direção nem em módulo. Assim, qualquer variação na velocidade indica que a resultante das forças que agem sobre o corpo não é nula. Foi usando essa idéia que Newton postulou sua segunda lei do movimento. Para ele, a força $\vec{F}$, que, num pequeno intervalo de tempo Δt, provoca uma variação $\Delta \vec{v}$ na velocidade de um corpo, é expressa por:

$$\vec{F} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t};$$

ou, se Δt é muito pequeno, por $\vec{F} = m\vec{a}$, onde **m** é a massa do corpo e $\vec{a}$ é a aceleração adquirida.

Essa lei permite determinar a resultante das forças que agem sobre um corpo, desde que se conheça sua massa e a aceleração que ele adquire. A aceleração tem direção e sentido iguais aos da resultante.

Reciprocamente, se conhecemos a resultante das forças que estão agindo e a massa do corpo, podemos determinar sua aceleração em cada instante.

8. Aplicação da lei de Newton ao movimento circular uniforme

Quando no capítulo 7 tentamos aplicar a lei de Newton (**F** = **ma**) a um movimento circular e uniforme, encontramos dificuldade, porque não sabíamos calcular a aceleração nesse movimento. Com os conhecimentos que dispomos agora, podemos retomar o problema.

A figura 28 mostra um disco em movimento circular. A força que age sobre ele é exercida pelo fio, tendo, portanto, a direção do mesmo, e é dirigida para o centro. A intensidade da força pode ser avaliada pela deformação do anel de borracha; observa-se que ela é constante no decorrer de todo o movimento. Note que a direção da força varia continuamente, pois a direção do fio está variando.

Sabemos que, apesar de a velocidade do disco ter valor constante durante o movimento circular uniforme, sua direção varia de ponto para ponto.

Determinemos graficamente a aceleração do disco numa posição qualquer de sua trajetória, como, por exemplo, na posição **C.** Para isso, devemos calcular a diferença das velocidades do disco nas posições **B** e **D**, $\Delta\vec{v} = \vec{v}_D - \vec{v}_B$, e dividir essa diferença pelo intervalo de tempo correspondente.

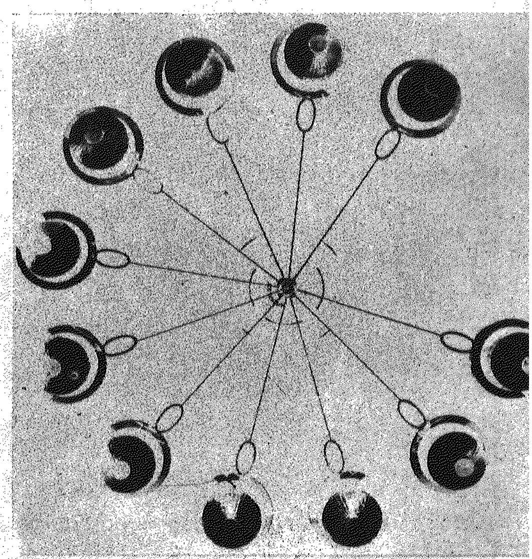
A velocidade $\vec{v}_B$ representada na figura 29 é tangente à trajetória em **B**; seu módulo é o comprimento do arco **AC**, dividido pelo tempo gasto pelo disco para percorrer esse arco. Na figura, **AC** = 5,1cm, que corresponde a 51cm do tamanho real, pois a escala é de 1:10. Como o intervalo de tempo entre dois instantâneos sucessivos é 0,40s, o arco **AC** foi percorrido em 0,80s, o módulo de $\vec{v}_B$ é:

$$|\vec{v}_B| = \frac{51\text{cm}}{0{,}80\text{s}} = 64\text{cm/s}.$$

Como o movimento é uniforme, isto é, o módulo da velocidade permanece constante, temos:

$$|\mathbf{v}_B| = |\mathbf{v}_D| = 64\text{cm/s}.$$

Para representar as velocidades $\vec{v}_B$ e $\vec{v}_D$ na figura 29, usamos a escala de 1cm para 20cm/s;



Um disco, em movimento circular, preso a ' barbante por meio de um anel de borracha que deforma quando sujeito a uma força. Como a def mação é constante, a força que o está puxan tem valor constante. À direita, uma ampliação esq mática. Os pontos **A**, **B**. . . representam o cen do disco.

figura 28

portanto, essas velocidades estão representadas por segmentos de 3,2cm.

Aplicando-se $\vec{v}_B$ e $\vec{v}_D$ num mesmo ponto, determinamos o segmento $\Delta\vec{v}$, que representa a diferença $\vec{v}_D - \vec{v}_B$. Isto é,

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_D - \vec{v}_B$$

Q32 — Quanto mede, em centímetros, o segmento que representa $\Delta\vec{v}$?

Q33 — Se a escala das velocidades é de 1cm : 20cm/s, qual o valor de $\Delta\vec{v}$?

O valor da aceleração média é calculado dividindo-se o valor de $\Delta\vec{v}$ pelo intervalo de tempo considerado.

Q34 — Qual o valor da aceleração média do disco no trecho **BD**?

Esse é o valor da aceleração **no ponto C.**

Como $\vec{a}_m = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, a direção e o sentido da $\vec{a}_m$ coincide com a direção e o sentido de $\Delta\vec{v}$, pois $\Delta t > 0$ (positivo).

Resta agora representar graficamente a aceleração no ponto **C.**

Trace pelo ponto **C** uma paralela ao segmento $\Delta\vec{v}$.

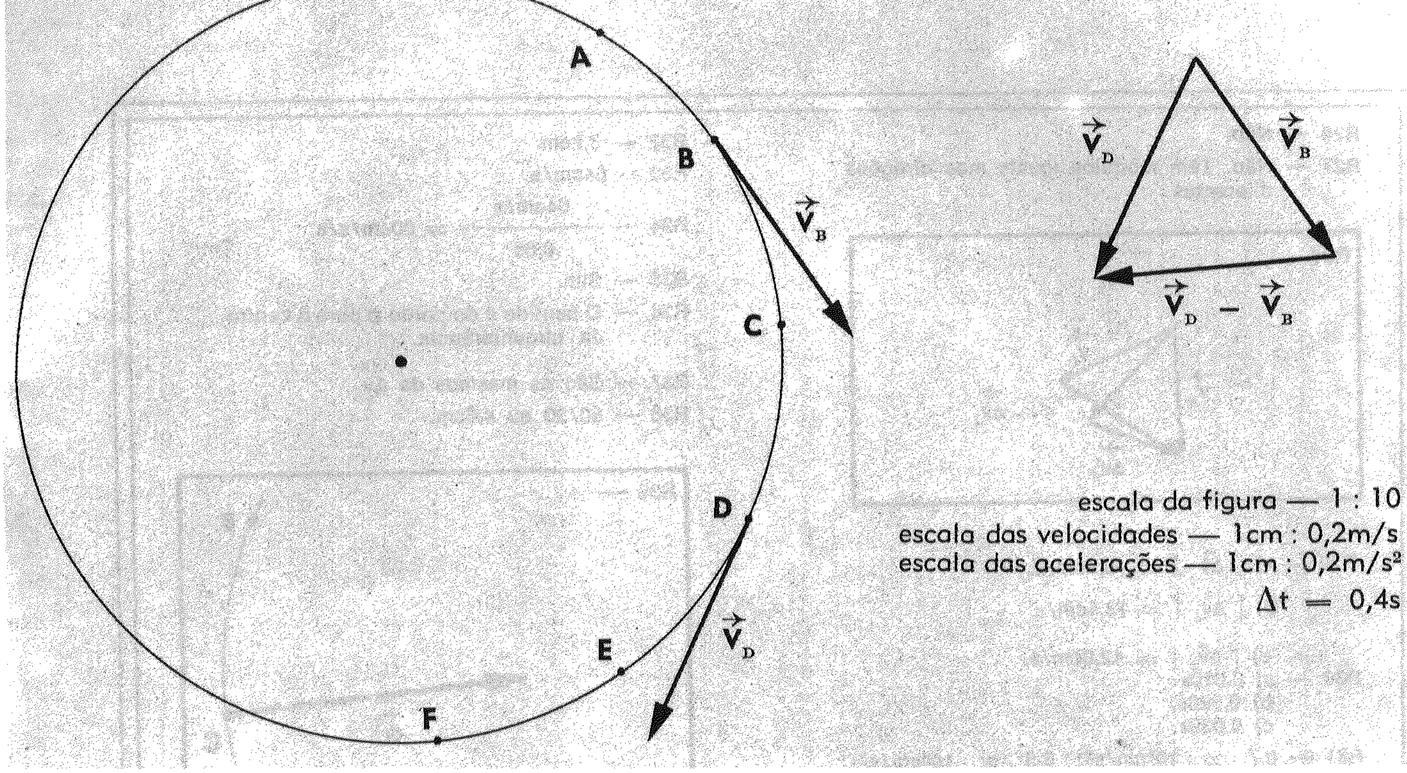


figura 29

Q35 — Essa paralela passa pelo centro da trajetória?

Q36 — Qual é o sentido de $\Delta\vec{v}$?

Q37 — Qual é então a direção e o sentido da **aceleração** no ponto **C**?

Para representar a aceleração na posição **C**, adotamos a escala de 1cm: 20cm/s^2.

Q38 — Qual é o comprimento do segmento que representa a aceleração na posição **C**?

Q39 — Represente a aceleração no ponto **C** na figura 29.

Concluímos então que a aceleração no ponto **C** tem a direção do raio da circunferência e é dirigida para seu centro; a direção e o sentido da aceleração coincidem com a direção e sentido da força que o fio exerce sobre o disco.

Sendo o ponto **C** um ponto qualquer da trajetória, concluímos que, em cada instante, a aceleração tem a mesma direção e sentido que a força; isto está de acordo com a segunda lei de Newton na forma vetorial, $\vec{F} = m\vec{a}$.

No movimento circular uniforme, a força é dirigida para o centro da trajetória e é chamada de **força centrípeta**; a aceleração correspondente é chamada de **aceleração centrípeta**.

Note que tanto a aceleração como a força variam de instante para instante; contudo, em cada instante a aceleração é paralela à força resultante sobre o disco.

RESPOSTAS

R$_{32}$ -

R$_{33}$ -

R$_{34}$ -

R$_{35}$ -

R$_{36}$-

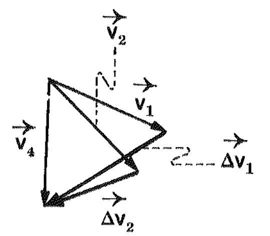
R$_{37}$ -

R$_{38}$ -

R26 — Não.

R27 — Não. Têm módulos iguais mas direções diferentes.

R28 —



R29 — a) $|\ \Delta\vec{v}\ | = 6{,}9\text{cm/s}$.

b) $|\ \Delta\vec{v}_1\ | = 18{,}5\text{cm/s}$.

c) $|\ \Delta\vec{v}_2\ | = 12{,}0\text{cm/s}$.

R30 — a) 0,010s.
b) 0,020s.
c) 0,030s.

R31 — $0{,}7 \times 10^3\text{cm/s}^2$; $6{,}3 \times 10^2\text{cm/s}^2$; $6{,}0 \times 10^2\text{cm/s}^2$.

R32 — 3,2cm.

R33 — 64cm/s.

R34 — $\dfrac{64\text{cm/s}}{0{,}8\text{s}} = 80\text{cm/s/s}$.

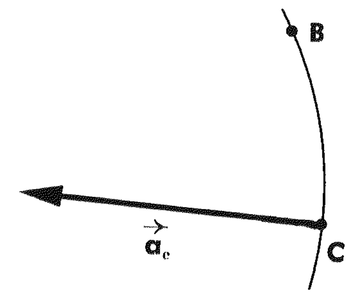
R35 — Sim.

R36 — O sentido é do ponto **C** para o centro da circunferência.

R37 — São os mesmos de $\Delta\vec{v}$.

R38 — 80/20 ou 4,0cm.

R39 —



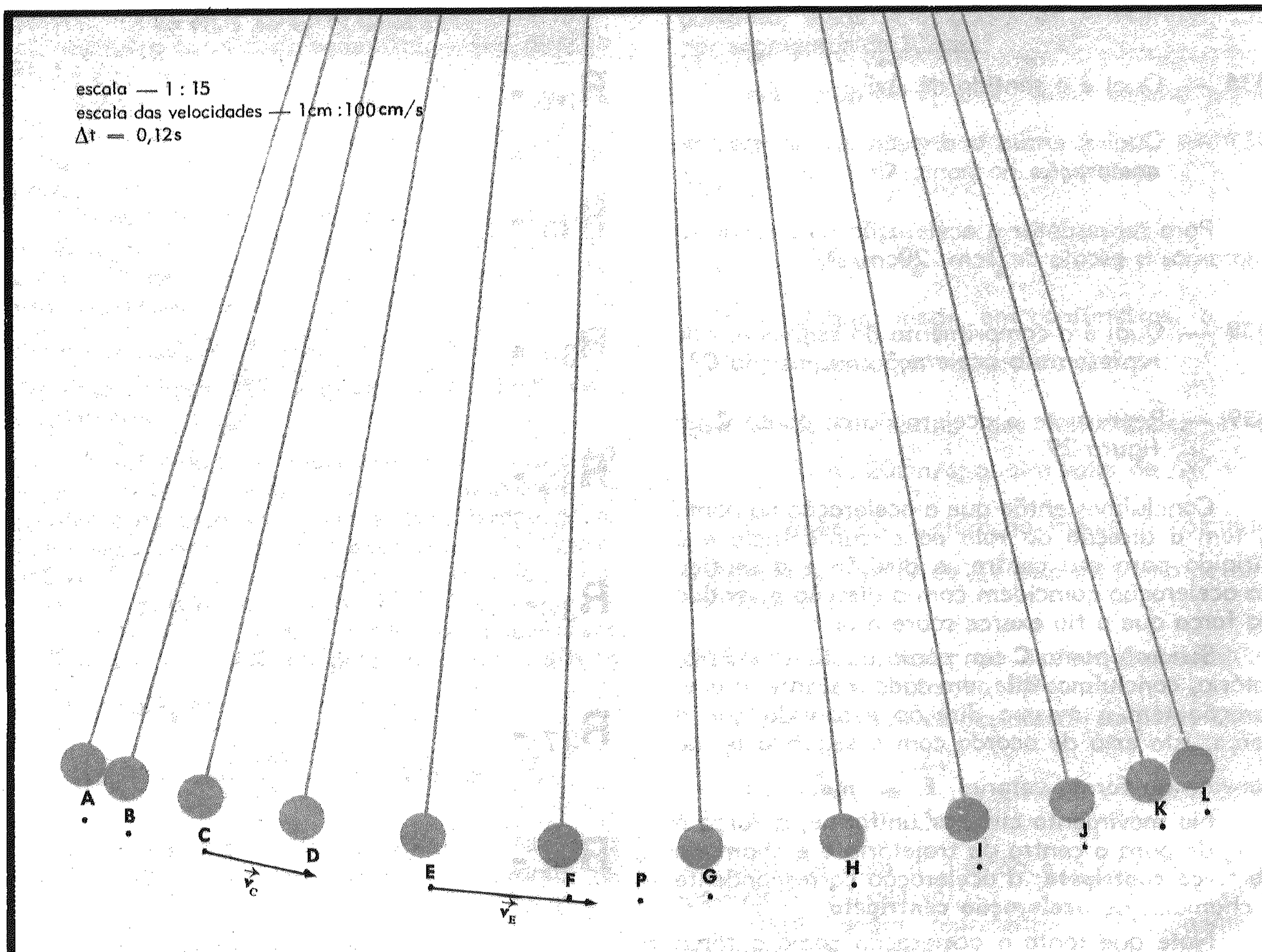


figura 30

9. Exercícios de aplicação II

E18 — A direção da velocidade de um corpo é sempre, em cada posição, tangente à sua trajetória? E a direção da aceleração?

E19 — Na foto estroboscópica da figura 30, temos um pêndulo oscilando e estão representadas as velocidades nas posições **C** e **E**. Utilizando os dados que constam da figura, calcule a aceleração do pêndulo na posição **D**. Represente essa aceleração na escala indicada.

E20 — **P** representa o ponto médio do arco **F** $\times$ **G**. Com os dados da figura, calcule a aceleração do pêndulo no instante de passagem por **P** e represente-a na figura.

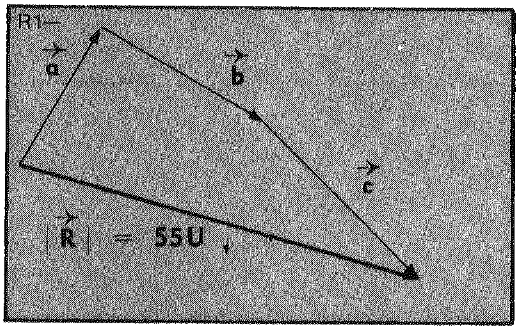
E21 — Em geral a aceleração não é tangente à trajetória do corpo, mas em certos movimentos pode ser. Como é a trajetória de um corpo que se move com aceleração que em cada instante é tangente à trajetória?

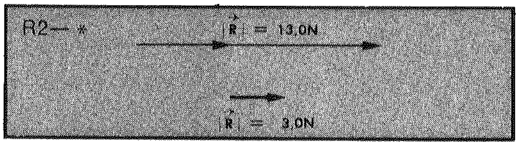
RESPOSTAS DE EXERCÍCIOS

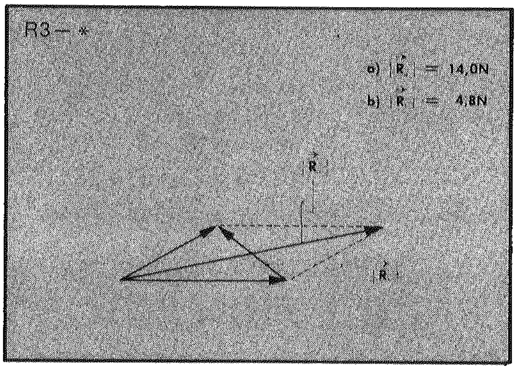
R_{18} -

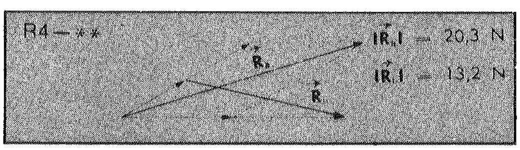
R_{19} -

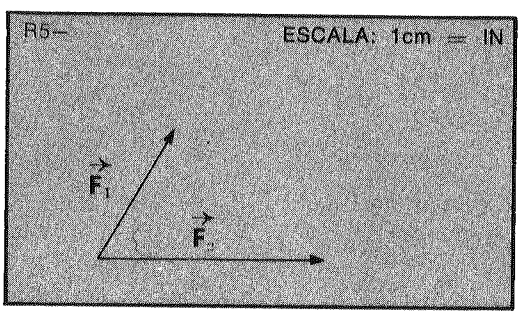
R_{21} -

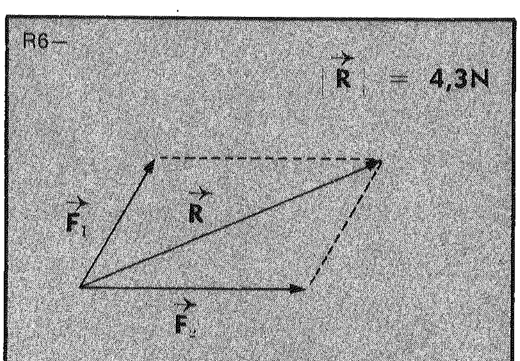






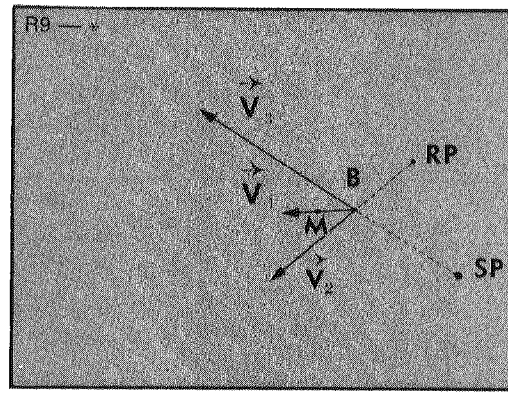






R7 — A direção da resultante.

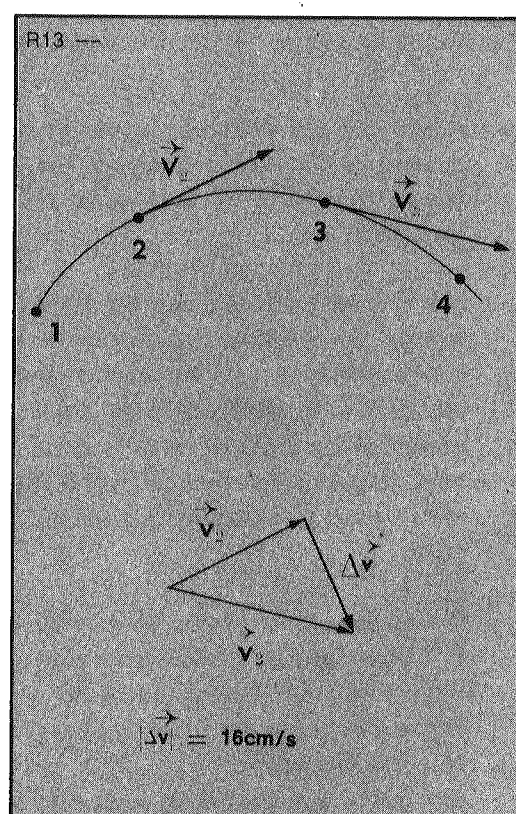
R8 — $|\vec{F}|$ = 400N.



R10 — $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_4$.

R11 — Não, pois apesar de algumas velocidades serem iguais em módulo, suas direções são diferentes.

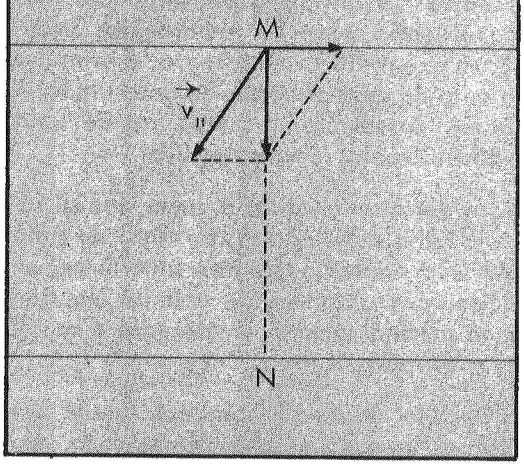
R12 — Sim, pois houve uma variação na direção da velocidade.



R14 — A resultante é uma força de 0,05N, com direção vertical e sentido para cima.

R15 — a) 440km/h; 0,9h.
b) 360km/h; 1,1h.

R16 — $|\vec{V}_v| = 18$ km/h

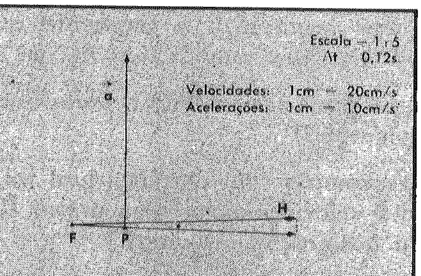


R17 — a) $1/6 m/s^2$.
b) $1/4 m/s^2$.
c) Sim.
d) Direção: a mesma de $\vec{F}$.
Sentido: opôsto ao de $\vec{F}$.
Módulo: 2/3N.

R18 — A direção da velocidade é sempre tangente à trajetória, mas a direção da aceleração não. Sua direção é a mesma que a da força que a provoca.

R19 — $313 cm/s^2$ — A direção e o sentido da aceleração em D são os mesmos de $\Delta\vec{V}$.

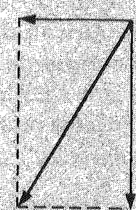
R20 —



R21 — Retilínea.

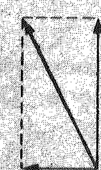
Observação: * figura reduzida à metade
** figura reduzida um terço

Respostas da p. 8-10:



a) $|\vec{R}| = 145$ km/h

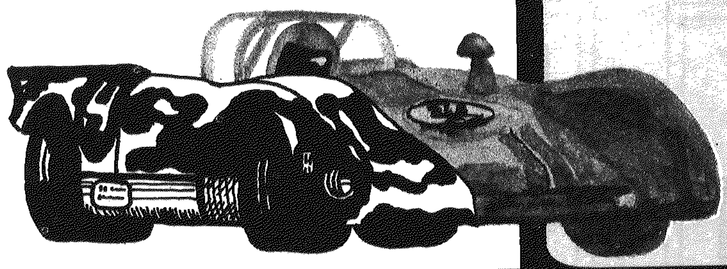
b) $|\vec{R}| = 750$ km/h



c) $|\vec{R}| = 23$ km/h

d) $|\vec{R}| = 0$

e) $|\vec{R}| = 550$N



GRANDE PRÊMIO

A figura ao lado é o resultado de uma partida de "Grande Prêmio", um jogo em que duas ou mais pessoas simulam uma corrida de automóveis. Para jogá-lo, desenha-se em uma folha de papel quadriculado uma "pista de corridas" suficientemente larga para acomodar um "carro" para cada jogador. O jogo torna-se mais interessante se a pista apresentar muitas curvas.

Cada jogador utiliza um lápis ou caneta de cor diferente. Em cada jogada, deve ser feita uma marcação no cruzamento das linhas do papel correspondente à posição do "carro".

A ordem de jogada pode ser determinada tirando-se a sorte. Os "carros" são então colocados na linha de partida.

Os movimentos de uma posição para outra são efetuados segundo regras que simulam aproximadamente o que ocorre em uma corrida real:

1) A nova posição e o segmento de reta correspondente à nova e à velha posição devem estar inteiramente dentro da pista.

2) Dois carros não podem ocupar **simultaneamente** a mesma posição; não são permitidas "colisões".

3) A aceleração, o freamento, a velocidade constante e a mudança de direção são simuladas da seguinte maneira: suponha que seu movimento anterior tenha sido **x** unidades horizontais e **y** unidades verticais e que seu movimento atual seja de **x'** horizontais e **y'** verticais, então, **x'** pode ser igual a **x** ou diferir de **x** de uma unidade: ou $x' = x$, ou $x' = x + 1$, ou $x' = x - 1$, e, analogamente, ou $y' = y$, ou $y' = y + 1$, ou $y' = y - 1$. Isto é, a **diferença** absoluta entre os dois movimentos horizontais deve ser 0 ou 1, o mesmo valendo para os movimentos verticais. Para exemplificar esta regra, o primeiro movimento do jogo pode ser de uma unidade horizontal, ou de uma vertical, ou de uma unidade horizontal e uma vertical.

4) É considerado vencedor o carro que ultrapassar a linha de chegada, ao final de uma rodada, sem violar as regras anteriores. Se dois jogadores ultrapassam a linha de chegada na mesma rodada, o vencedor é aquele que a ultrapassa mais.

"Grande Prêmio" também pode ser jogado por uma só pessoa. Nesse caso, seu objetivo é melhorar seu "tempo", isto é, terminar a "corrida" no menor número possível de jogadas.

Depois de jogar alguma vez "Grande Prêmio", discuta com seus colegas as seguintes questões:

— O que esse jogo tem a ver com esse capítulo?

— Como seriam definidas no jogo grandezas análogas a deslocamento, velocidade a aceleração?

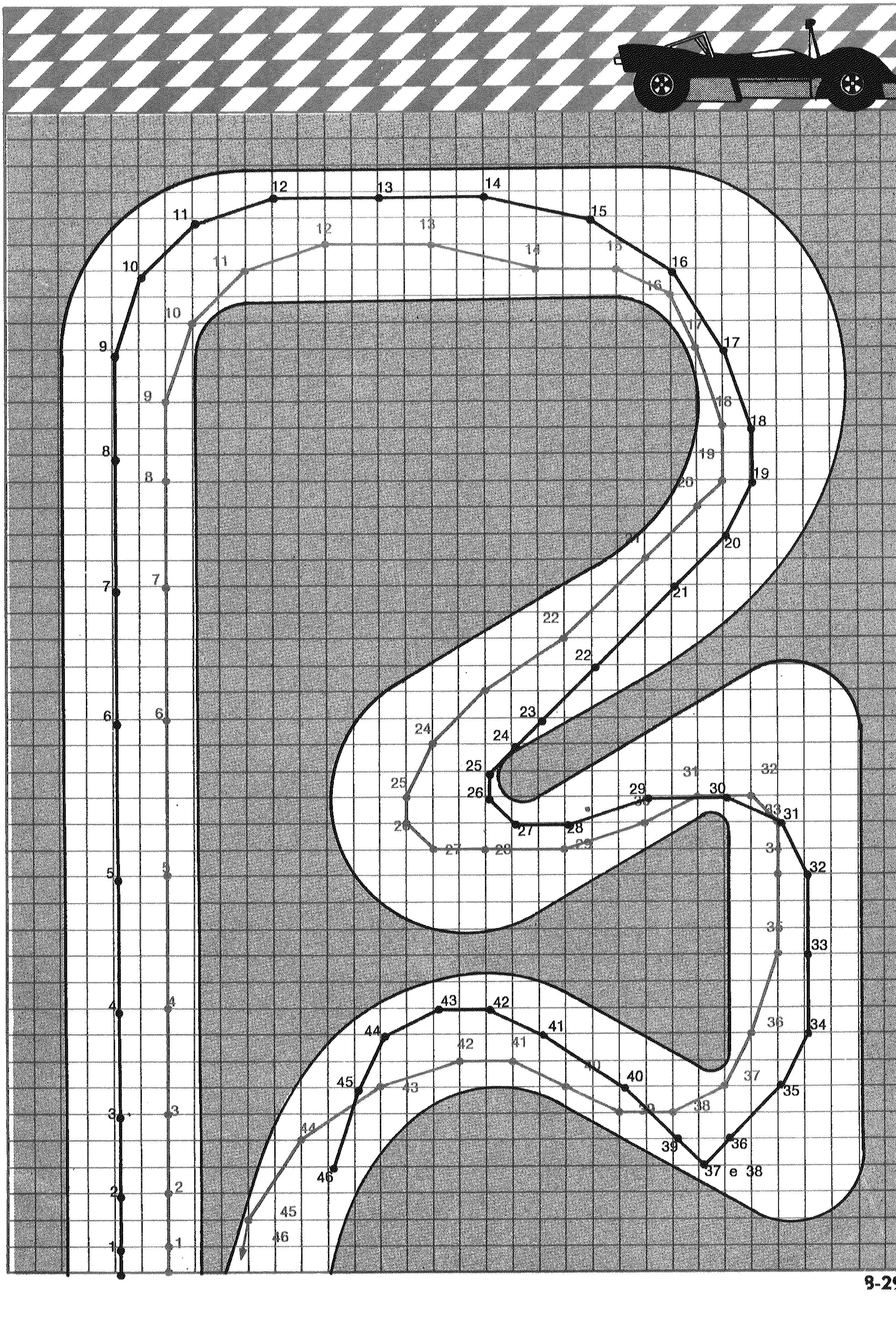
— Qual é a unidade de "tempo" utilizada?

— O que representa o segmento que une duas posições consecutivas de um carro?

— Como pode ser medida a velocidade? E a aceleração?

— No exemplo considerado, qual foi a máxima velocidade do carro preto? Qual foi sua aceleração máxima?

— Um jogador pode imprimir ao seu carro qualquer aceleração?


37 e 38

Esta obra foi impressa pela
EDITORA DO BRASIL S/A.
Av. Mal. Humberto de Alencar Castelo Branco, 368
Fone: 913-4141 — Guarulhos — SP
para a
FAE — Fundação de Assistência ao Estudante
Rua Miguel Ângelo, 96 — Maria da Graça
Rio de Janeiro — RJ — República Federativa do Brasil
em 1984.

ISBN 85-222-0161-7