

Instituto de Física
USP

Física V - Aula 7

Professora: Mazé Bechara

Nas disciplinas...

Não basta ser aluno, é preciso participar!

***Analisar, Refletir, Avaliar,
Compartilhar, Inteferir...***

como na vida!

Aula 07 – Distribuição espacial na atmosfera e distribuição de energia de constituintes dos sólidos.

1. **Completando a Aplicação (com valores numéricos): gases da atmosfera a 300K, desprezando a interação com a gravidade terrestre.**
2. **Medidas experimentais dos módulos de velocidade – a validação experimental direta da distribuição.**
3. **A distribuição espacial dos gases da atmosfera: (a) desprezando a força da gravidade; (b) considerando a força da gravidade constante.**
4. **O experimento de Perrin.**
5. **Um sistema de N constituintes em movimento MHS unidimensional.**
 - i. **A distribuição de energia (Atenção cuidado!) de um sistema MHS unidimensional;**
 - ii. **O valor médio da energia e o c_v .**
 - iii. **O valor média da energia e o c_v no caso do movimento MHS-tridimensional - modelo de sólidos.**

Aplicação – MEXA-SE!

Na atmosfera terrestre há moléculas de H_2 , O_2 entre outras. Despreze a interação com a gravidade terrestre.

e) ...**determine numericamente:** o módulo de velocidade mais provável, o módulo de velocidade menos provável e a média do módulo da velocidade de cada um dos gases a **300K**.

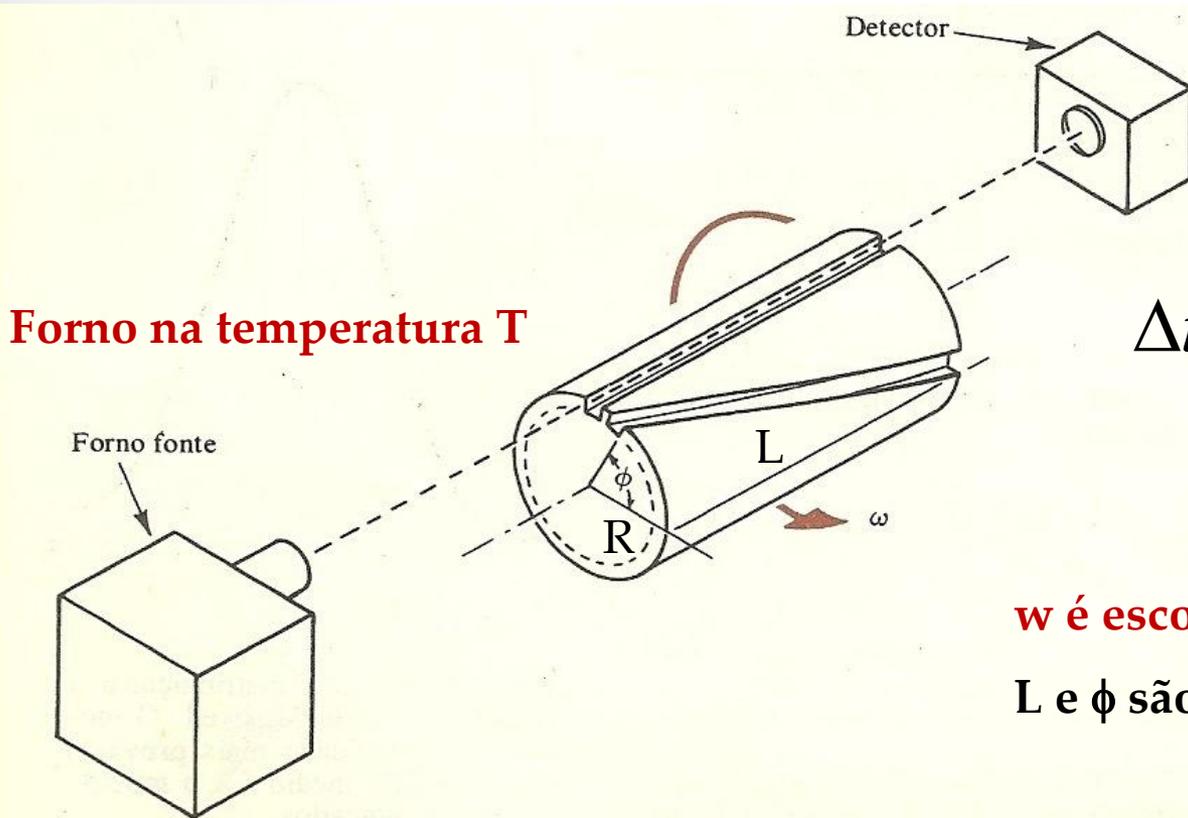
Reposta numérica (refaça!): módulo de velocidade mais provável: **1579,8m/s=5687km/h para H_2 e 394,9m/s para O_2** ; módulo de velocidade menos provável: **zero**; a média do módulo de velocidade: **1579,8m/s=5687km/h para H_2 e 394,9m/s para O_2** .

f) Qual destes resultados poderia ser arrogado para o fato de haver menos moléculas de H_2 , do que de O_2 na atmosfera terrestre?

g) E se for levada em conta a interação das moléculas com a gravidade terrestre, os seus resultados às questões anteriores **mudariam**? Justifique.

Medida direta da distribuição de módulos de velocidades (temperatura T).

Esquema de equipamento para medir distribuição de módulos de Moléculas. R.C. Miller e P. Kusch, Phys. Rev. 99, 1314 (1955)



Chegam ao detector as moléculas que levam Δt para percorrer a distância L

$$\Delta t = \frac{\phi}{w} = \frac{L}{v} \Rightarrow v = \frac{Lw}{\phi}$$

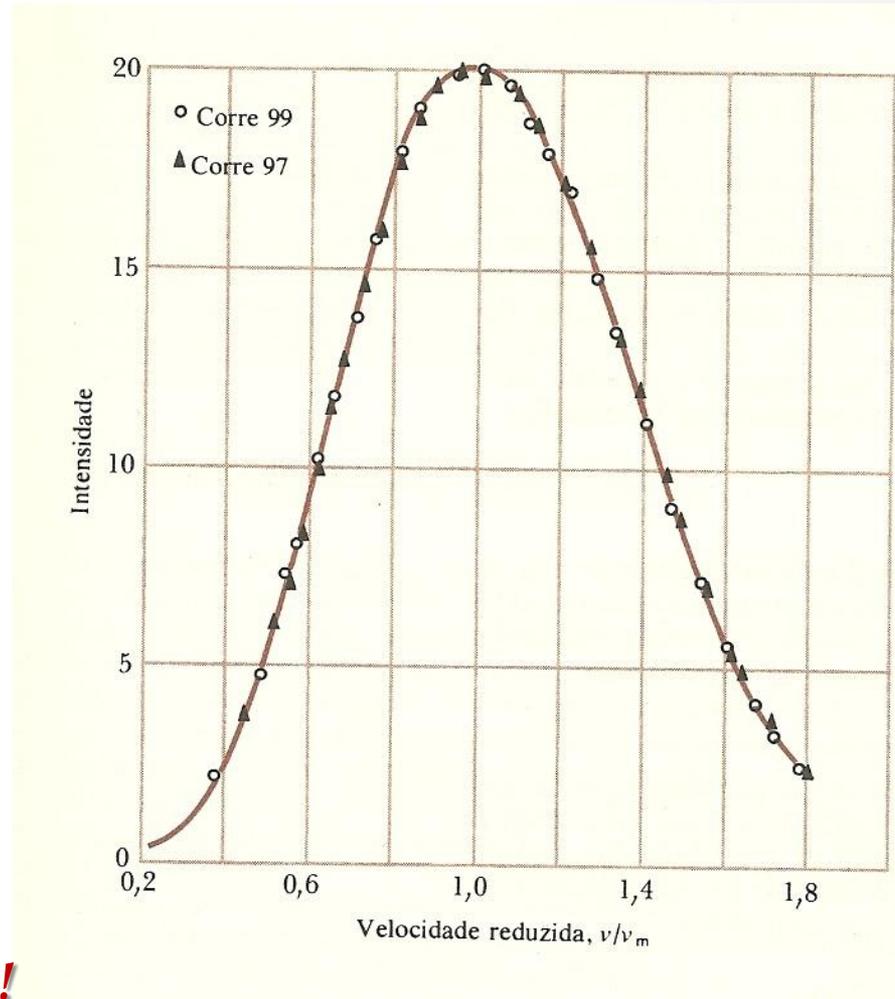
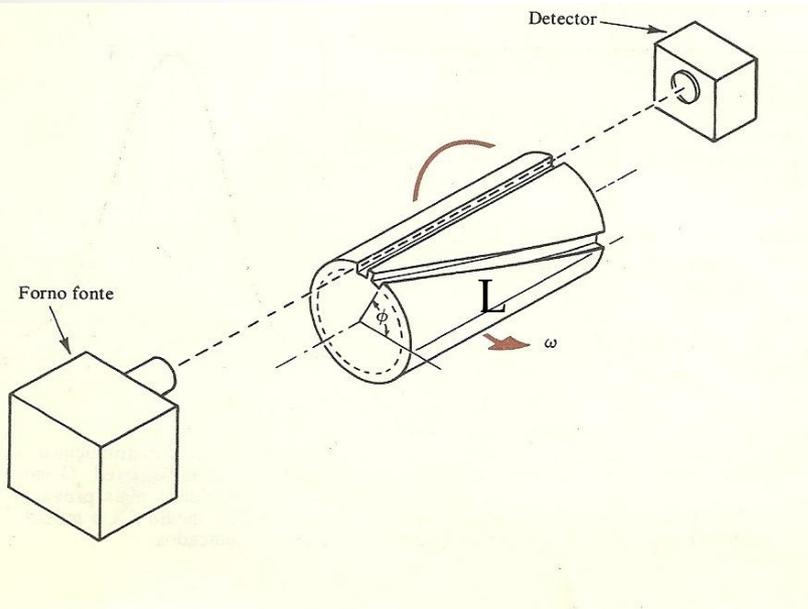
seletor de velocidades

w é escolhido para selecionar v

L e ϕ são definidos na construção

Medida direta da distribuição de módulos de velocidades (temperatura T).

Esquema de equipamento para medir distribuição de módulos de Moléculas. R.C. Miller e P. Kusch, Phys. Rev. 99, 1314 (1955)



Viva Boltzmann e Maxwell!
Sem o aval experimental, os modelos e teorias iriam ao lixo!

Aplicação

Na atmosfera terrestre há moléculas de H_2 (poucas), O_2 , He, N_2 , entre outras.

a) Determine, a partir da distribuição de Boltzmann, **a distribuição espacial normalizada** desprezando o efeito da gravidade.

b) Idem **considerando a gravidade da Terra constante**, ou seja, para uma distância h em relação à superfície da Terra. Discuta as condições para esta ser uma boa aproximação da realidade.

c) Determine o valor mais provável e o valor médio da altura h em relação à superfície levando em conta a gravidade. **(Para casa: Faça o cálculo numérico do valor médio da distância à superfície da Terra para algum gás da atmosfera. Comente a limitação dos resultados, se houver).**

d) Determine **o valor médio da energia potencial gravitacional** das moléculas da atmosfera. **Compare com o resultado da equipartição de energia e comente.**

e) Como é a **distribuição espacial das moléculas nesta sala de aula?**

f) As distribuições de módulo de velocidade são as mesmas ou diferentes para os diversos gases da atmosfera **quando se considera a gravidade? E a distribuição de energia cinética? E a distribuição de energia?** Justifique.

Aplicação

Na atmosfera terrestre há moléculas de H_2 (poucas), O_2 , He, N_2 , entre outras.

a) Determine, a partir da distribuição de Boltzmann, **a distribuição espacial normalizada** desprezando o efeito da gravidade.

b) Idem **considerando a gravidade da Terra constante**, ou seja, para uma distância h em relação à superfície da Terra. Discuta as condições para esta ser uma boa aproximação da realidade.

c) Determine o valor mais provável e o valor médio da altura h em relação à superfície levando em conta a gravidade. **(Para casa: Faça o cálculo numérico do valor médio da distância à superfície da Terra para algum gás da atmosfera. Comente a limitação dos resultados, se houver).**

d) Determine **o valor médio da energia potencial gravitacional** das moléculas da atmosfera. **Compare com o resultado da equipartição de energia e comente.**

e) Como é a **distribuição espacial das moléculas nesta sala de aula?**

f) As distribuições de módulo de velocidade são as mesmas ou diferentes para os diversos gases da atmosfera **quando se considera a gravidade? E a distribuição de energia cinética? E a distribuição de energia?** Justifique.

Distribuição espacial normalizada: moléculas na temperatura T e gravidade constante - **FAÇA!**

- **Resultado:**

$$f(h) = \frac{dN(h)}{Ndh} = \frac{mg}{kT[1 - e^{-\frac{mgH}{kT}}]} e^{-\frac{mgh}{kT}} \cong \frac{mg}{kT} e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

- $0 \leq h \leq H$

- A última expressão é aproximadamente válida para $mgH \gg kT$.

- **Determinação direta da constante k de Boltzmann. Como R pode ser determinada independentemente em outro experimento, esta é uma determinação direta de N_0 .**

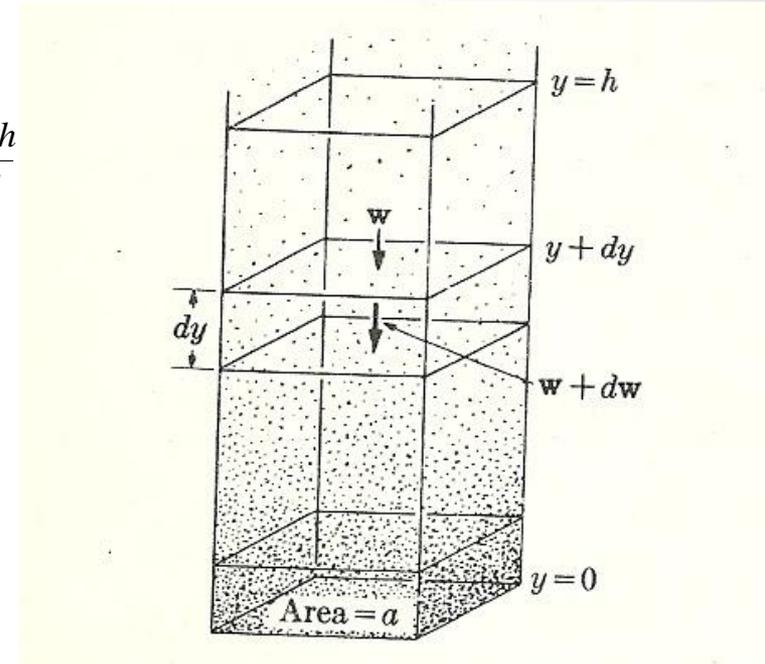


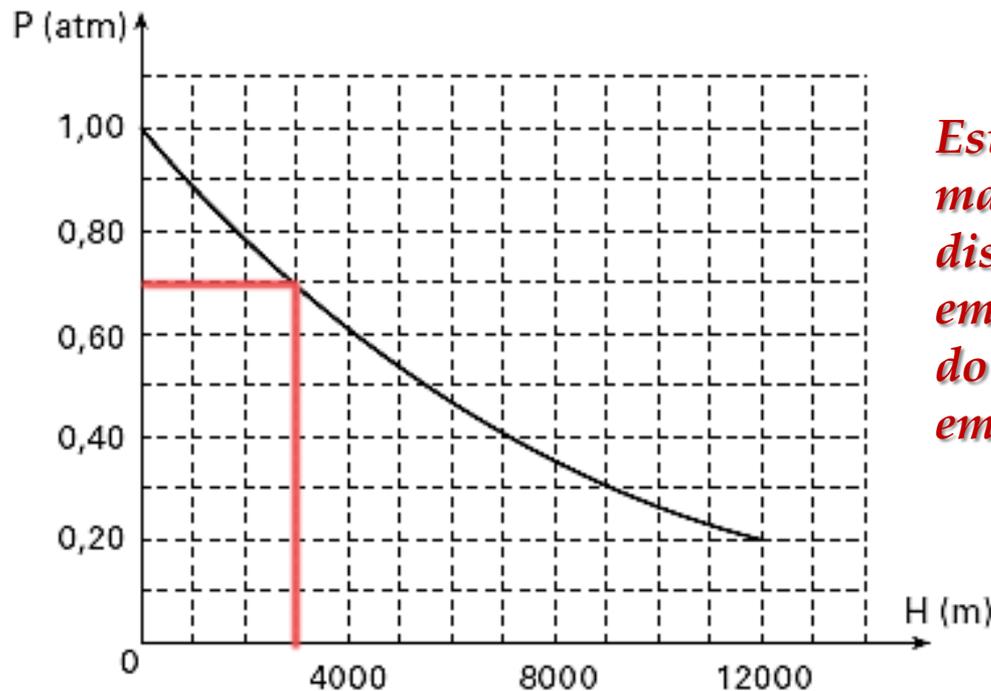
Figura do Enge, Wehr, Richards.

Estimativas de grandezas relevantes: $H \rightarrow \infty$ e gravidade constante

- **Valores numéricos das aproximações:** (quando $mgH \gg kT$ e $H \ll R_T$).
- Na temperatura ambiente (300K): $kT = 4,0 \times 10^{-21} \text{ J}$
- **Na atmosfera Terrestre:**
- **as moléculas tem $2Zm_H$ de massa:** $Zm(H_2)g = Z \times 2 \times 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg} \times 10 \text{ m/s}^2 = Z \times 3,4 \times 10^{-26} \text{ J}$
- $\Rightarrow mg/kT \sim 5 \times 10^4$ para moléculas O_2 e N_2 .
- Assim, a altura máxima $H \sim 10^5 \text{ m}$ observa os dois limites: **$mgH \gg kT$ ($H \rightarrow \infty$) e $H \ll R_T = 6 \times 10^6 \text{ m}$** , que é a condição para gravidade constante.
- **No experimento de Perrin:**
- **Com massas muito maiores se atinge o limite $mgH \gg kT$ para H da ordem de centímetros. E certamente $H \ll R_T$**

Gráfico da distribuição espacial normalizada: moléculas na temperatura T e gravidade constante

$$f(h) = \frac{dN(h)}{Ndh} \cong \frac{mg}{kT} e^{-\frac{mgh}{kT}}$$



Estabeleça a relação matemática entre a distribuição de altura em relação à superfície do Planeta, e a pressão em função desta altura!

Experimento de Perrin – 1908

Jean Baptiste Perrin, nascido na Bélgica, viveu de 1870 a 1942 e ganhou o prêmio Nobel de Física em 1926.



- **Objetivo:** medir /observar o movimento browniano (**aprenda mais sobre ele**) que Perrin mostrou ser efeito do modelo cinético, como proposto por Einstein em 1905.
- **A idéia:** *colocar em suspensão em um fluido partículas suficientemente grandes para serem observadas, mas suficientemente leves e pequenas para se comportarem como os constituintes naturais do fluido.*
- **O Método:** para serem “constituintes” do fluido, no contexto dos modelos de matéria clássica, as partículas precisam ter dimensões/massas idênticas e uniformes.
- Perrin **centrifugou resina de borracha e gerou partículas uniformes e leves. Mediu (quantitativamente) a distribuição das partículas em suspensão em diferentes soluções,** e determinou o número de Avogadro, pela primeira vez, diretamente de uma medida experimental (e não indiretamente).
- **Obs. O cálculo é idêntico ao da distribuição de partículas do ar, acrescentando a força de empuxo sobre as “partículas” de resina de borracha.**

Resultado de Perrin considerando a força de empuxo nas bolinhas quando em soluções

- **Resultado:**

$$f(h) = \frac{dN(h)}{Ndh} = \frac{mg(1 - \frac{\rho}{\rho_{liq}})}{kT} e^{-\frac{mg(1 - \frac{\rho}{\rho_{liq}})h}{kT}}$$

- Levando em conta o empuxo das bolinhas nas soluções.

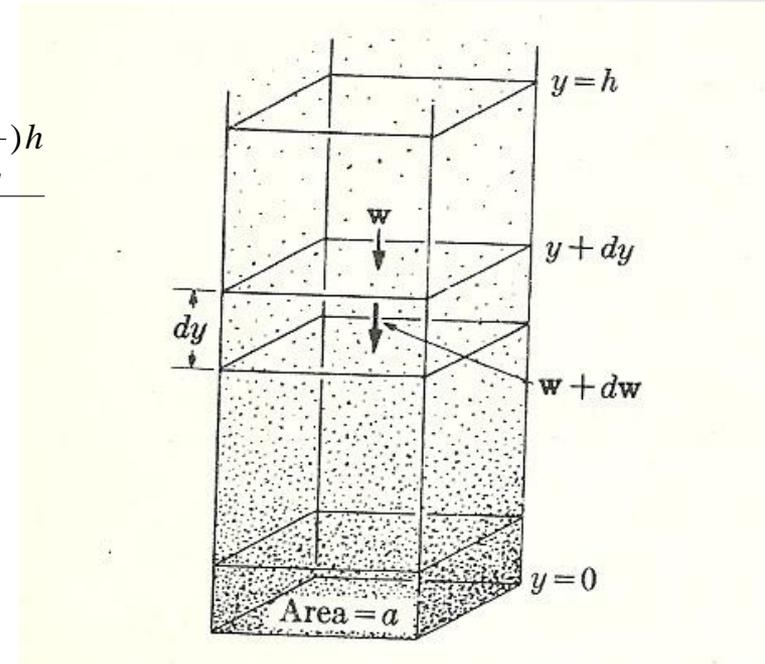


Figura do Enge, Wehr, Richards.

Resultados da distribuição espacial de moléculas no equilíbrio térmico e gravidade constante (solução em aula)

- $\langle h \rangle = kT/mg$
- depende da massa das Moléculas.
- $\langle U_G \rangle = \langle mgh \rangle = kT$
- Depende só da temperatura

- **Vejam que não se aplica a equipartição da energia para a média da energia potencial de interação gravitacional já que o resultado não é $kT/2$. Entenda!**

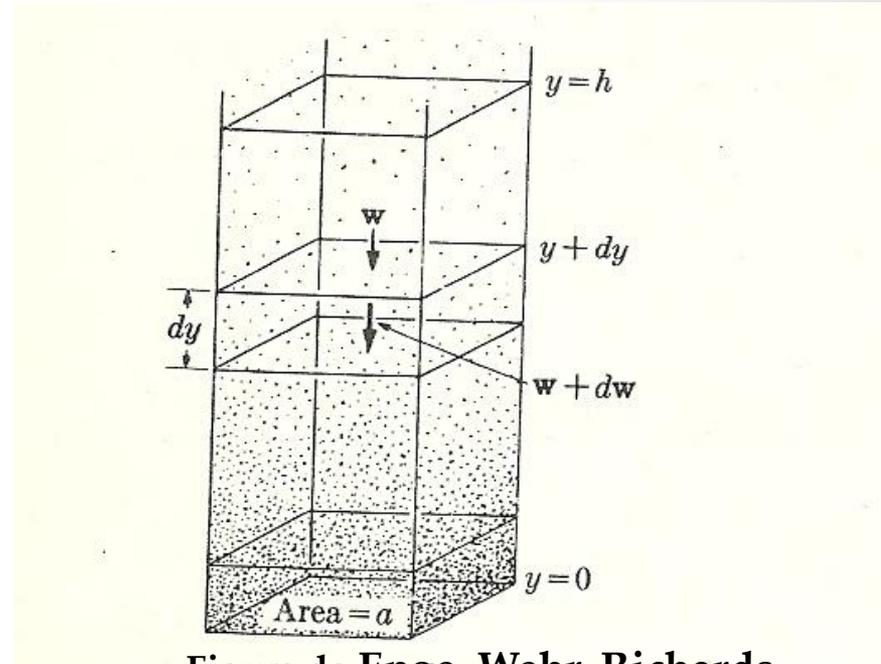


Figura do Enge, Wehr, Richards.

Distribuição de energia - MHS unidimensional

dedução em aula

- Energia de um constituinte:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 + U_{\text{vibr}} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}k_x x^2$$

- Usando a distribuição de Boltzmann:

$$f(x, v_x) = \frac{dN(x, v_x)}{N dx dv_x} = A e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} e^{-\frac{k_x x^2}{2kT}}$$

- Reescrevendo a energia: $\varepsilon = V_x^2 + X^2 = R^2$

$$f(X, V_x) = \frac{dN(X, V_x)}{N dX dV_x} = B e^{-\frac{V_x^2}{kT}} e^{-\frac{X^2}{kT}}$$

Distribuição de energia - MHS unidimensional

- Assim, a fração de partículas nas “novas” variáveis:

$$\frac{dN(X, V_x)}{N} = B dX dV_x e^{-\frac{V_x^2}{kT}} e^{-\frac{X^2}{kT}} = B R dR d\theta e^{-\frac{R^2}{kT}} = \frac{dN(R, \theta)}{N}$$

$$\Rightarrow \frac{dN(R)}{N dR} = f(R) = B R e^{-\frac{R^2}{kT}} \int_0^{2\pi} d\theta = C R e^{-\frac{R^2}{kT}}$$

$$f(\varepsilon) = f(R) \frac{dR}{d\varepsilon} = C \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} = D e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

- Resultado da distribuição de energias depois da normalização. **CUIDADO!!! Só para MHS unidimensional.**

$$f(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{N d\varepsilon} = \frac{1}{kT} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$$

MHS unidimensional – Energia interna e calor específico molar a volume constante

- **Energia média dos constituintes:**

$$\langle \varepsilon \rangle = kT$$

- **Energia Interna de N constituintes:**

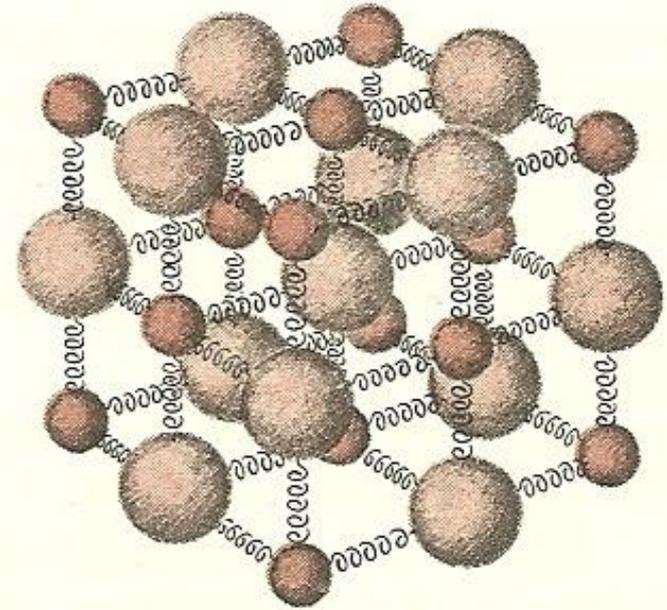
$$U = N \langle \varepsilon \rangle = NkT$$

- **Calor Específico Molar a volume constante:**

$$c_V = \frac{\partial U_{Vcte}^{1mol}}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} N_o \langle \varepsilon \rangle = \frac{\partial}{\partial T} N_o kT = R$$

Modelo mecânico de matéria sólida cristalina

- **Constituintes dos Sólidos (não amorfos ou cristalinos)**
 - Constituintes (átomos) iguais ou diferentes interagindo com vizinhos como se fossem osciladores harmônicos tridimensionais.



Energias de cada constituinte do sólido em torno de sua posição de equilíbrio (0,0,0):

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 + U_{vibr} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_z z^2$$

Sólido: MHS tridimensional

- **Energia média dos constituintes:**

$$\langle \varepsilon \rangle = 3kT$$

- **Energia Interna de N constituintes:**

$$U = N \langle \varepsilon \rangle = N3kT$$

- **Calor Específico Molar a volume constante:**

$$c_V = \frac{\partial U_{Vcte}^{1mol}}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} N_o \langle \varepsilon \rangle = \frac{\partial}{\partial T} N_o 3kT = 3R$$

- **Observe: energia interna é proporcional à temperatura e calor específico molar é constante!**

c_v experimental na matéria sólida – atinge o valor constante em temperatura que depende do sólido

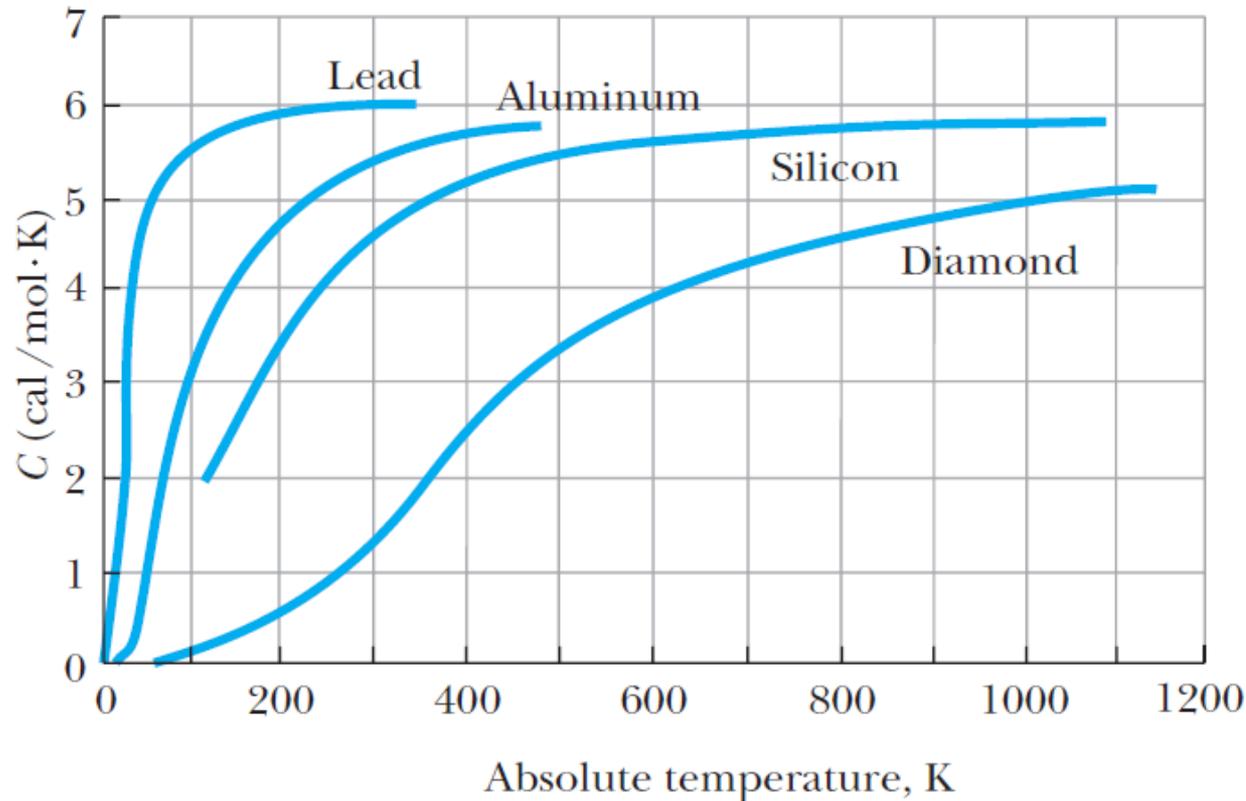


Figure 10.9 The dependence of specific heat on temperature for several solid elements.

Haveria alguma solução na Mecânica estatística clássica para resolver esta dependência com a temperatura? Aguardem a próxima aula!