Experimento 5 – Viscosidade

Determinar a viscosidade de uma substância a partir de medidas da velocidade limite de esferas em queda através de um recipiente preenchido com essa substância.

Introdução

Fluidos são substâncias capazes de tomar a forma dos recipientes que os contêm. *Quando em equilíbrio* (hidrostático), *fluidos não causam forças tangenciais* (ou de cisalhamento). Fluidos podem ser líquidos ou gasosos e são, todos, compressíveis em maior ou menor grau. Líquidos são pouco compressíveis e, muitas vezes, podem ser tratados como incompressíveis, ao contrário dos gases, que, em geral, têm que ser tratados como compressíveis (um gás só pode ser tratado como incompressível quando houver pouca variação na pressão). Líquidos ocupam volumes definidos e apresentam uma superfície bem delimitada, enquanto que um gás se expande até ocupar *todo* o volume do recipiente que o contém. A camada de um fluido que toca a superfície de um sólido (tubo, esfera, obstáculo, etc.) está em repouso em relação ao sólido. Quando as velocidades são pequenas, o escoamento de um fluido pode ser descrito como um deslizamento de camadas – o fluido adere à superfície e tem um perfil de velocidades que varia continuamente à medida que se afasta dela. Esse tipo de escoamento é denominado **escoamento laminar**. No caso de velocidades altas, essas camadas tendem a se desfazer, e o movimento do fluido fica complicado, com redemoinhos (também chamados turbilhões ou vórtices): é o **escoamento turbulento**.

Modelo

Viscosidade

A viscosidade pode ser interpretada como a resistência ao movimento de um fluido, que dificulta seu escoamento. Em um escoamento laminar, a viscosidade pode ser definida a partir da força necessária para manter duas camadas próximas em movimento relativo com velocidade constante.

A viscosidade depende da temperatura. Para líquidos em geral, a viscosidade diminui com o aumento da temperatura e, nos gases, ao contrário do que se poderia esperar, a viscosidade cresce com a temperatura. No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade do coeficiente de viscosidade é o N·s/m^2, frequentemente escrito como Pa·s (pascal vezes segundo). Na prática, usa-se muito o poise (1 P = 1 g/cm·s).

Lei de Stokes

Ela descreve o movimento de uma esfera de raio *r* em um volume infinito de fluido, cuja viscosidade é η, quando o escoamento do fluido em torno da esfera é laminar. Nessa situação, a força de atrito, quando *v* é a velocidade da esfera, é dada por:

$$\vec{F}_{a,\infty} = -6\pi\ \eta\ r\vec{v} \tag{1}$$

O sinal negativo indica que a força é contrária à velocidade, como toda força de atrito. Essa equação é conhecida como *fórmula de Stokes* ou *Lei de Stokes*. A Figura 6.1 ilustra o diagrama de corpo livre da esfera em queda dentro do fluido.

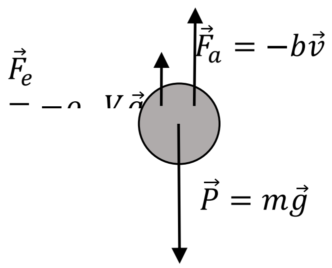

Figura 1:. Forças sobre uma esfera de massa *m* e volume *V*, que se move para baixo em um meio viscoso de densidade ρ_m, em um lugar onde a aceleração local da gravidade é *g*. F_e, F_a e *P* são as forças de empuxo, de atrito e peso, respectivamente. A grandeza *b* é o coeficiente de atrito viscoso.

<u>Queda de esferas em meio viscoso</u>

A equação de movimento de um corpo em queda num meio viscoso, quando a força viscosa é dada pela Lei de Stokes, é:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - F_e - F_a = m^* g - bv \qquad (2)$$

onde *b* é o coeficiente de proporcionalidade da força de atrito viscoso (ver Equação 1) e definiu-se

$$m^* = (\rho_c - \rho_m) V \qquad (3)$$

é a *massa aparente* do corpo com volume *V* e densidade ρ_c num meio com densidade ρ_m. Esta é uma equação diferencial *não* homogênea, cuja solução vamos escrever como a soma das soluções da equação *homogênea* com a solução particular

$$v(t) = \text{constante} = v_\infty = \frac{m^* g}{b} \qquad (4)$$

A solução da equação homogênea $m\frac{dv}{dt} + bv = 0$ é:

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{b}{m}t\right) \qquad (5)$$

A solução geral da equação (2) é, então, a soma das anteriores:

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{b}{m}t\right) + \frac{m^* g}{b} \qquad (6)$$

Da condição inicial, *v*(*t* = 0) = 0, resulta:

$$v_0 = -\frac{m^* g}{b} \qquad (7)$$

Combinando (6.6) e (6.7), temos:

$$v = \frac{m^* g}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right) \qquad (8)$$

Para tempos longos, isto é, no limite $t \to \infty$, essa expressão fica

$$v_\infty = \frac{m^* g}{b} \qquad (9)$$

onde $b = 6\pi\eta r$, conforme a equação (1).

Resulta que:

$$v_\infty = (\rho_C - \rho_m)\frac{2}{9}\frac{r^2 g}{\eta} \qquad (10)$$

Assim, para uma esfera com raio *r*, densidade ρ_c e velocidade terminal v_∞, temos:

$$\eta = \frac{2}{9}(\rho_c - \rho_m)\frac{r^2 g}{v_\infty} \qquad (11)$$

<u>A correção para meios finitos</u>

No interior de recipientes, a fórmula (6.1) deve ser corrigida, para dar conta da influência das paredes do recipiente no movimento.
Para um recipiente cilíndrico de raio *R*, escreve-se

$$F_a = (1+C)F_{a,\infty}, \qquad (12)$$

onde

$$C = \alpha\frac{r}{R} + \left(\alpha\frac{r}{R}\right)^2 \qquad (13)$$

conhecida como correção de Ladenburg. Na literatura, encontram-se valores diferentes de α, mas em todos os casos $\alpha \approx 2,4$.
A velocidade limite é aquela em que a força de atrito, proporcional à velocidade, iguala a força peso, descontado o empuxo. Assim, a correção da força de atrito das fórmulas (12) e (13) acima se reflete diretamente na velocidade limite real, ou seja,

$$v_{limite} = \frac{v_\infty}{(1+C)} \qquad (14)$$

onde v_{limite} é a velocidade que observamos no tubo real e v_∞ o parâmetro que entra no cálculo da viscosidade na fórmula (11).
A correção para o comprimento finito do tubo é similar e depende da razão *r*/*h*, que neste experimento é bem menor que 0,01 para todas as esferas usadas. Assim, esta correção muda os resultados muito menos que as incertezas experimentais, de modo que pode ser ignorada.

Procedimento Experimental

Este experimento destina-se a determinar a viscosidade do óleo (o parâmetro η) a partir da velocidade limite de esferas de diferentes raios em queda num tubo preenchido com essa substância. Estima-se a velocidade limite pelo tempo que a esfera demora em atingir o fim do tubo, obtida com um cronômetro manual, e o comprimento do percurso no tubo, medido com uma escala milimetrada. Note que a equação (10) relaciona viscosidade com a velocidade limite em um recipiente de raio infinito, o que não é o caso do tubo deste experimento, de modo que a velocidade limite *precisa* ser corrigida pelo fator de Ladenburg.
Observe que v_∞ da equação (9) corresponde ao tempo infinito. Como isso não é realizável, na prática se avalia quando o corpo alcança 99% da velocidade limite e usa-se essa posição, ou um pouco além, para iniciar a medição, o que acarreta um erro ainda menor que 1% na medida porque, como a esfera continua acelerando, ela fará a maior parte do percurso até o fundo do tubo a uma velocidade acima de 99% da velocidade limite.

1) Meça a temperatura e a densidade do óleo[1] e o raio interno do tubo no início do experimento. Nivele o aparelho, de modo que o fio de prumo aponte para a referência presa na base do aparelho.
2) Marque dois níveis de referência no tubo, um entre 10 e 25 cm da superfície do óleo[2] e outro a uma distância do fundo de 10 cm, um pouco mais ou um pouco menos. A fim de ter uma boa leitura dessas posições, certifique-se que a régua esteja colocada no suporte de modo que a escala encoste no tubo. Cuidado com o erro de paralaxe.
3) Escolha uma esfera, meça seu diâmetro com o micrômetro algumas vezes (6 repetições são suficientes) e verifique que ela é quase perfeita. Daqui para frente, trabalhe com a hipótese de que todas as esferas que vai usar são perfeitas, o que lhe permite medir somente uma vez o diâmetro e *usar a precisão do micrômetro como desvio-padrão do diâmetro*.
4) Começando pela menor esfera, meça o seu diâmetro (*uma única medição do diâmetro*, uma vez que são praticamente esféricas), segure-a com a pinça[3], abandone-a na boca do tubo e meça o tempo de queda entre as duas marcas; para reduzir a incerteza na cronometragem, os dois membros da equipe devem efetuar a medição simultaneamente, quando possível. Você pode misturar dados de esferas cujos diâmetros diferem entre si de, no máximo, 2 centésimos de mm, mas descarte as esferas com diferenças maiores que essa.
5) Repita a operação do passo anterior com as esferas de todos os diâmetros disponíveis pelo menos 7 cronometragens.
6) Meça novamente a temperatura do óleo, de modo a dispor desse dado tanto no início como no final do experimento.

Análise dos dados

1. Determinar o valor médio e respectiva incerteza para o tempo de queda de cada esfera: usar o tempo médio das várias cronometragens e seu desvio-padrão da média.
2. Fazer o gráfico da velocidade limite em função de r^2 e verificar que essas duas grandezas não são diretamente proporcionais, apesar dessa ser a previsão da equação (10).
3. Calcular v_∞ para cada raio de esfera, bem como o respectivo desvio-padrão, a partir da velocidade limite real (fórmula 13) com a correção de Ladenburg (fórmula 12) no cálculo.
4. Fazer o gráfico da velocidade infinita em função de r^2 e deste gráfico ache o η através do coeficiente angular.
5. ATENÇÃO: SOBREPONHA OS DOIS GRÁFICO PEDIDOS NOS ITENS 2 E 4 PARA COMPARAÇÃO.

---

[1] Ao medir a densidade do óleo, evite mexer no densímetro, a fim de evitar que algum óleo fique grudado na parte exposta da haste, o que muda o peso do densímetro e descalibra o instrumento. A leitura correta exige que o densímetro esteja mergulhado no óleo há um bom tempo, sem se mover.

[2] Procure posicionar o marcador de modo que consiga visualizar bem a passagem da esfera pelo anel, sem fazer grandes malabarismos, que podem comprometer a cronometragem; você precisa sim esticar-se para ver bem a passagem pelo anel de cima e agachar-se, para marcar a passagem pelo anel de baixo.

[3] Manter a esfera na mão pode aquecer o metal e alterar o resultado, uma vez que a viscosidade depende bastante da temperatura. Assim, use a pinça para levá-la à boca do tubo e não a mantenha na palma da mão ou entre os dedos.

6. Calcular $\eta = \frac{2}{9}(\rho_c - \rho_m)\frac{r^2 g}{v_\infty}$ para cada raio de esfera; no cálculo do desvio-padrão, desprezar a contribuição da incerteza de *r* na correção de Ladenburg.
7. Calcular o valor médio da viscosidade η; como cada valor tem um desvio-padrão diferente, usar a média ponderada dos dados, onde o peso de cada dado é igual ao *inverso* do quadrado do desvio-padrão (fórmula 3.2, do experimento do pêndulo simples). Faça o gráfico de η x r.
8. Comparar o resultado experimental obtido para a viscosidade do óleo, *η*, com o valor nominal esperado, lembrando de considerar a temperatura.

Relatório

A ênfase deste relatório está em discutir a validade das leis físicas e das aproximações necessárias ao experimento a partir de dados experimentais e sua análise.
Você deve apresentar um relatório completo: resumo (dizer o que se procurava, como se procedeu e o que se achou, em 200 palavras ou menos); introdução teórica; descrição do procedimento experimental e da análise de dados; apresentação dos dados e dos resultados (inclusive as incertezas) em forma de gráficos e tabelas; discussão do experimento, baseada nos **SEUS** resultados, à luz dos modelos aplicáveis ao fenômeno, que devem estar explicados na introdução teórica, e uma conclusão.
Os pontos principais que você deve abordar a partir dos **SEUS** resultados são:

- Agora que você dispõe dos valores *experimentais* da velocidade limite, verifique se a avaliação do tempo necessário para que a esfera alcance 99% da velocidade limite estava correta e se a escolha de 10 cm abaixo da superfície do fluido foi adequada.
- Apresente uma tabela com os diâmetros das esferas e a velocidade limite atingida, com a correção de Ladenburg, e o valor da viscosidade do óleo (□) considerando cada esfera (eq. 11).
- Apresente o valor médio da viscosidade do óleo, calculado como a média ponderada dos valores obtidos com as esferas de diâmetros diferentes, e compare esse valor com o valor nominal esperado.
- Apresente o gráfico da velocidade em função de r^2 e verifique, a partir dos seus resultados, que ele não é uma reta.
- Apresente a função ajustada pelo método dos mínimos quadrados, discutindo se todos os pontos se adequão à correção.

A partir desses resultados, discuta se esse experimento permite verificar a adequação da correção de Ladenburg. Essa correção é suficiente?