Física IV

Teoria da Relatividade

Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva

Transformações de Lorentz

Transformações
de Galileu

Posições:

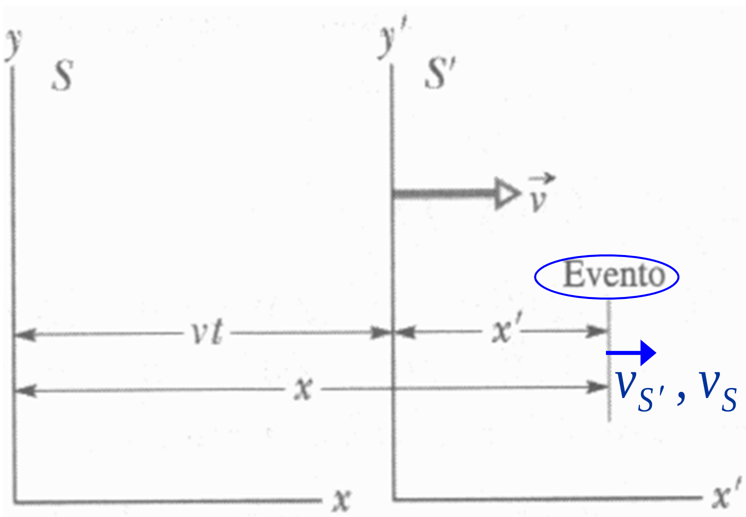
$$x = x' + ut$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

Descreve muito bem a realidade para u tendendo a 0.



$$x = x' + ut$$

x' se contrai

$$x = \frac{x'}{\gamma} + ut$$

$$x' = (x - ut)\gamma$$

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

- O Princípio da relatividade exige que as transformações de S para S' tenham a mesma forma das transformações de S' para S.

Então, a única mudança deve ser no sinal da velocidade relativa *u*.

$$x = \frac{x'}{\gamma} + ut \longrightarrow x' = \frac{x}{\gamma} - ut'$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= (x - ut)\gamma \\ x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{aligned}}$$

$$(x - ut)\gamma = \frac{x}{\gamma} - ut'$$

Evidenciando *t'*, tem-se:

$$\boxed{t' = \frac{t - u\, x/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}$$

Transformações de Lorentz

Posições:

$$x' = \gamma(x - ut)$$

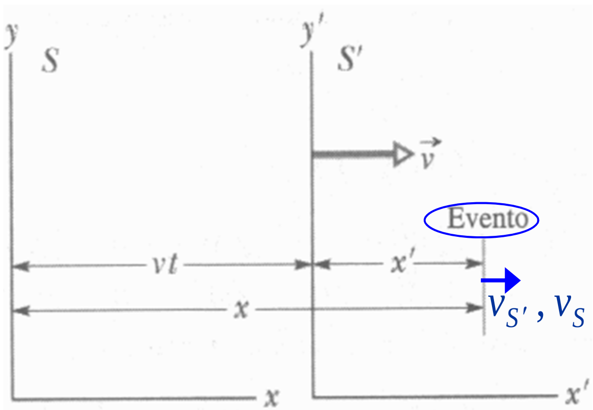
$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right)$$

O espaço e tempo tornam-se interligados. Não podemos mais dizer que o espaço e o tempo possuem significados absolutos independentes do sistema de referência.

Quatro dimensões espaço-tempo, que são as **coordenadas do espaço-tempo** de um evento.



Transformações de Lorentz para a velocidade

Transformações de Lorentz

Posições:

$$x' = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right)$$

$$dx' = \gamma(dx - udt)$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{udx}{c^2}\right)$$

Divide-se membro a membro as equações anteriores e, depois divide-se o numerador e o denominador por *dt*, então tem-se:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}} \longrightarrow v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

(Transformações de Lorentz para a velocidade)

Fazendo-se a conversão de referêncial, entre S e S’, tem-se:

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \frac{uv_x'}{c^2}}$$

(Transformações de Lorentz para a velocidade)

- A velocidade será sempre menor que *c*.
- Nenhuma partícula material pode se deslocar com velocidade igual ou superior a *c*.

Exemplo:

Velocidades relativas

a) Uma espaçonave que se afasta da Terra com uma velocidade igual a 0,90c dispara uma sonda espacial com um robô com uma velocidade igual 0,7000c em relação à espaçonave na mesma direção e no mesmo sentido da velocidade da espaçonave. Qual é a velocidade da sonda espacial em relação à Terra? b) Um ônibus espacial tenta alcançar a espaçonave se deslocando com velocidade igual a 0,950c em relação à Terra. Qual é a velocidade do ônibus em relação à espaçonave?

Exemplo:

Um sinal pode ser percebido antes de ser enviado?

Tendo vencido uma competição interestelar, Mavis pilota sua espaçonave e atravessa a linha final de chegada com uma velocidade igual a 0,600c em relação a essa linha. Um sinal de "vitória" é enviado da parte traseira de sua espaçonave (evento 2) no instante em que (no sistema de referência de Mavis) a parte dianteira da espaçonave atravessa a linha final de chegada (evento 1). Ela verifica que o comprimento da espaçonave é 300 m. Staley está em repouso no local da linha de chegada. Quando e onde os eventos 1 e 2 ocorrem para Staley?

Momento linear relativístico

As leis de Newton apresentam a mesma forma em todos os sistemas de referenciais inerciais.

O ***princípio da conservação do momento linear*** *afirma que, quando dois corpos interagem, o momento linear total permanece constante, desde que a força externa resultante que atua sobre os corpos no sistema de referencial inercial seja igual a zero.*
Exemplo: quando eles formam um sistema isolado e existe apenas força de interação entre os dois corpos.

Para que a conservação do momento linear seja uma lei física correta, ela deve ser válida em todos os sistemas de referência inercial.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Momento linear relativístico

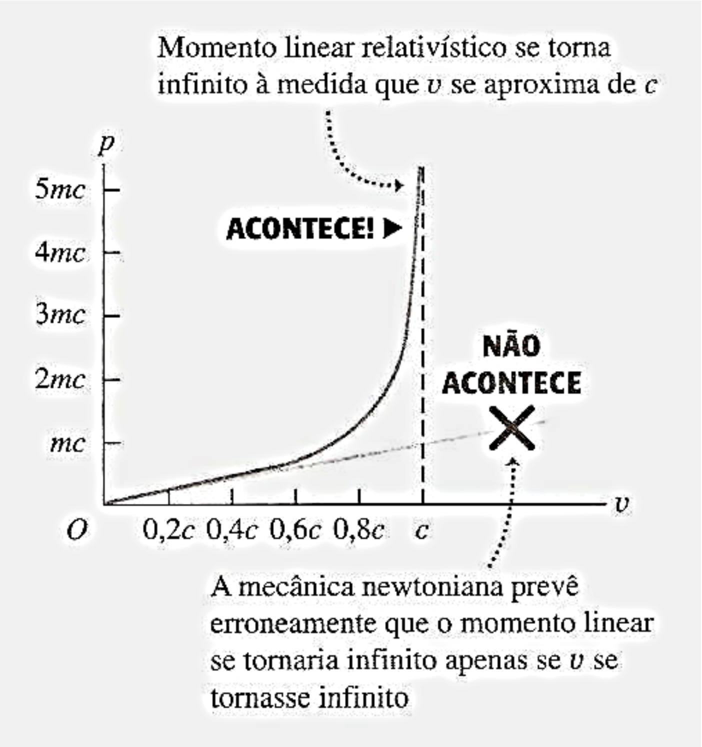
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Usando as transformações de Lorentz, para obter as coordenadas em um segundo referencial inercial, vê-se que *o momento linear não é conservado no segundo sistema de referência*.

Momento linear relativístico:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

onde, *m* é a massa de repouso



A segunda lei de Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Aplicando o momento linear relativístico, tem-se:

Ao longo do eixo *Ox:*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{F = \dfrac{m}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} a} \\ \boxed{a = \dfrac{F}{m}\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \end{array} \right.$$

$$F = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} a$$

$$a = \frac{F}{m}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

- Uma força constante não produz uma aceleração constante.
- Quando a velocidade tende ao valor de *c*, a aceleração tende a zero, por maior que seja o valor da força aplicada.
- Portanto, é impossível acelerar uma partícula com massa de repouso diferente de zero até que ela atinja uma velocidade igual ou superior a *c*.

A velocidade da luz no vácuo é algumas vezes chamada de "*velocidade limite*".

Momento linear relativístico:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

- Pode-se, muitas vezes, afirmar que uma partícula ao mover-se com velocidade elevada ela sofre um aumento de massa.

Se, *m* é a massa em repouso, então a **massa relativística** será:

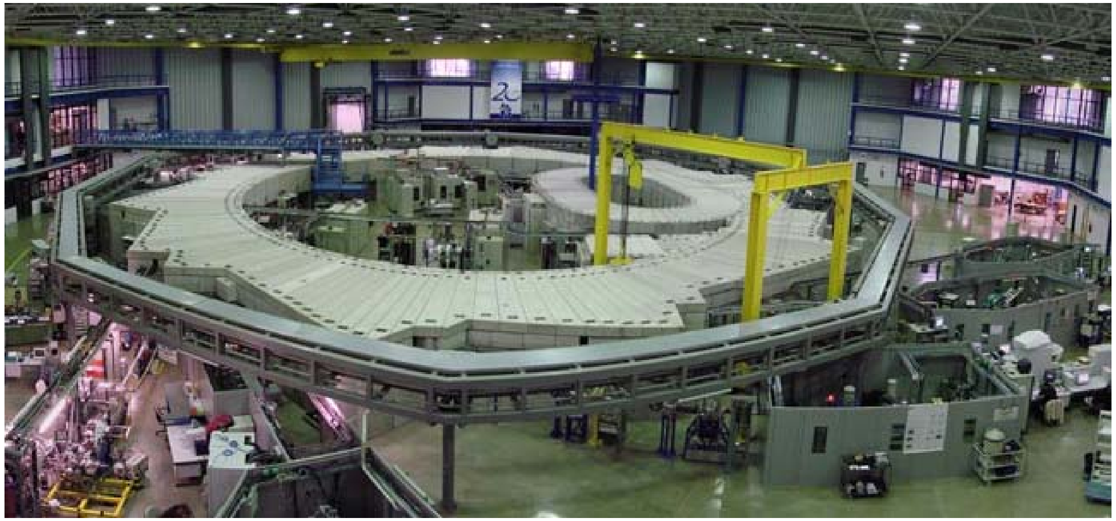
$$m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ $\rightarrow$ Momento linear relativístico

$F = \gamma^3 ma$ $\rightarrow$ (Força e velocidade ao longo da mesma linha)

Laboratório Nacional de Luz Síncroton (LNLS) Campinas, SP



Esquema de um Síncroton

$$F = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} a = \gamma^3 ma$$

Acelerador linear
(Força e velocidade ao longo da mesma linha)

$$F = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} a = \gamma ma$$

Acelerador circular
(Força e velocidade perpendiculares)

Exemplo

Dinâmica relativística de um elétron

Um elétron (massa de repouso igual a 9,11 x 10^{-31} kg, carga -1,60 x 10^{-19} C) move-se em sentido oposto ao de um campo elétrico com módulo E = 5,0 x 10^{5} N/C. Todas as outras forças são desprezíveis em comparação com a força elétrica. a) Determine o módulo do momento linear e da aceleração quando v = 0,010c, 0,90c e 0,99c. b) Calcule a aceleração correspondente considerando uma força com módulo igual ao do item anterior perpendicular à velocidade.

Trabalho e energia na relatividade

Quando a força resultante e o deslocamento estão na mesma direção, o trabalho realizado por essa força é dado por:

Trabalho $\longrightarrow$ $$W = \int F dx$$

$$F = \gamma^3 ma$$ (Força e velocidade ao longo da mesma linha)

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ma}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}} dx$$

Energia cinética de uma partícula

A energia cinética de uma partícula é igual ao trabalho realizado para desloca-la desde o repouso até uma velocidade *v*:

$$K = W$$

Velocidade no ponto $x_1 = 0$

Velocidade no ponto $x_2 = v$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ma}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{3/2}} dx$$

$$adx = \frac{dv_x}{dt} dx = dx \frac{dv_x}{dt} = \frac{dx}{dt} dv_x = v_x dv_x$$

$$adx = v_x dv_x$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ma}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} dx$$

$$K = W = \int_0^v \frac{m v_x dv_x}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

$$a dx = v_x dv_x$$

Fazendo uma mudança de variável, o resultado é:

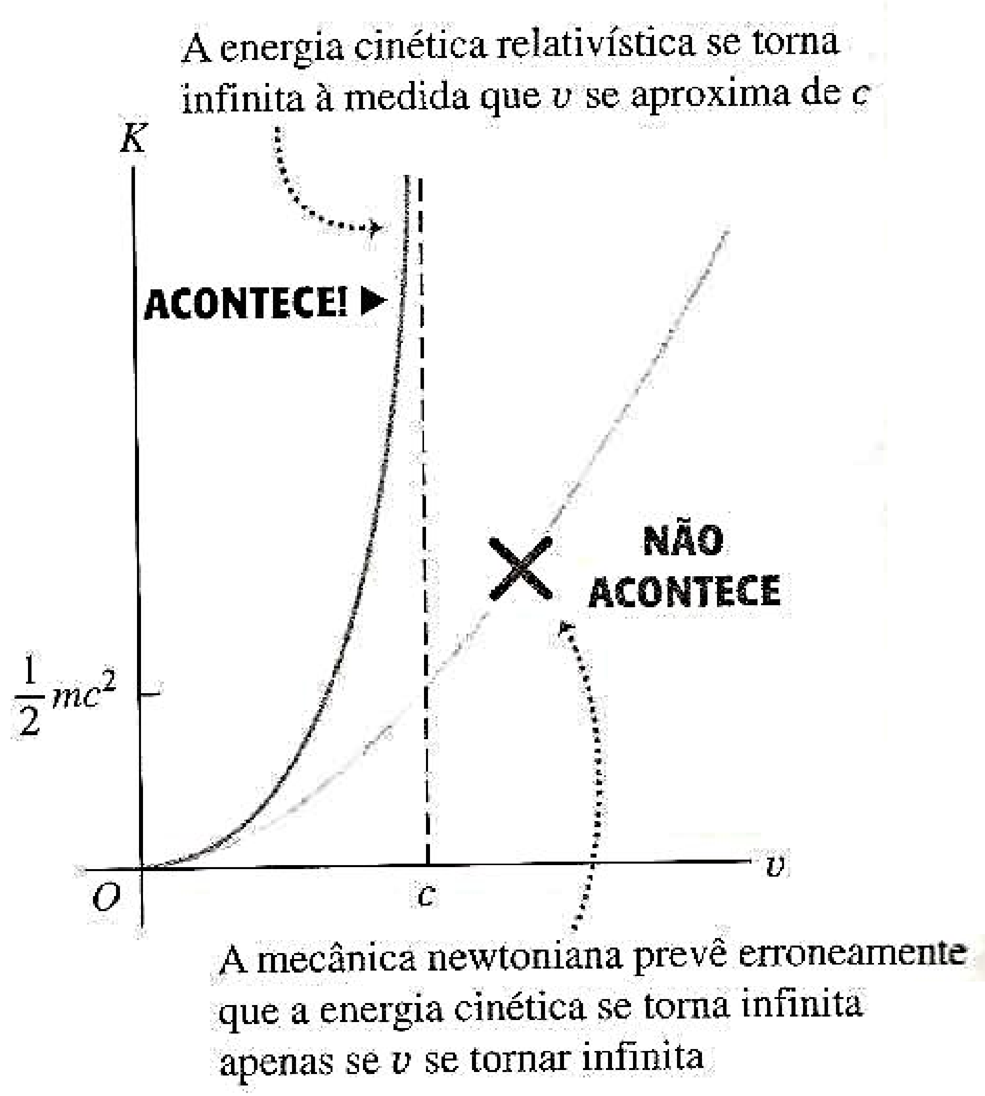
$$\boxed{K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2}$$

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$$

$v \to c$ A energia se aproxima do infinito

$v \ll c$ $K = \frac{1}{2}mv^2$

(Expressão newtoniana)



Energia de repouso

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$$

Não depende do movimento da partícula

Depende do movimento da partícula

Logo notamos que a energia cinética da partícula é a diferença entre uma energia total *E* e uma energia mc^2 que existe sempre, mesmo quando o corpo está em repouso.

$$E = K + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma mc^2$$

$$E = K + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mc^2$$

Para uma partícula em repouso ($K = 0$), vemos que $E = mc^2$

$$\boxed{E = mc^2 \longrightarrow \text{Energia de repouso da partícula}}$$

Podemos relacionar diretamente a energia total E de uma partícula (energia de repouso mais energia cinética) com seu momento linear:

$$E = \gamma mc^2 \qquad\qquad p = \gamma mv$$

Elevando ao quadrado as duas expressões e subtraindo uma da outra, podemos eliminar *v*. O resultado é:

$$\boxed{E^2 = \left(mc^2\right)^2 + \left(pc\right)^2 \quad \text{(energia total, energia de repouso e momento linear)}}$$

Esta equação sugere que uma partícula pode ter energia e momento linear mesmo quando ela não possui massa de repouso.

$$\boxed{E = pc \quad \text{(massa de repouso igual a zero)}}$$

Partículas com massa de repouso igual a zero existem, e se deslocam sempre com velocidade *c*. Um exemplo é o fóton, o quantum da radiação eletromagnética.

Exemplo:

Elétrons com energias elevadas

a) Calcule a energia de repouso de um elétron (m = 9,109 x 10^{-31} kg, q = -e = -1,60 x 10^{-19} C) em joules e em elétrons-volt. b) Determine a velocidade de um elétron que foi acelerado por um campo elétrico, a partir do repouso, com diferença de potencial igual a 20 kV (típica em um cinescópio de TV) ou 5,0 MV (comum em um tubo de raios X com alta voltagem).

Exemplo:

Uma colisão relativística

Dois prótons (cada um com $M = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) estão se movendo inicialmente com velocidades de módulo iguais e sentidos opostos. Depois da colisão eles continuam a existir, porém, ocorre a produção de um píon neutro de massa $m = 2{,}40 \times 10^{-28}$ kg. Sabendo que os prótons e píon permanecem em repouso depois da colisão, calcule a velocidade inicial dos prótons. A energia é conservada na colisão.