



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #26

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

25/11/2025



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Tensão crítica de Euler e limite de validade (11.3);
2. Exemplos para outras condições de apoio (11.4);
3. Comprimento efetivo de flambagem (11.4);
4. Efeito de excentricidades no carregamento (11.5);
5. Fórmula da secante (11.6).



1. Tensão crítica de Euler e limite de validade da fórmula (11.3)

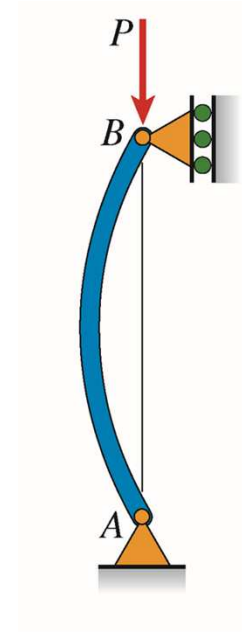
Vimos que a carga crítica para uma coluna biapoada (caso fundamental de flambagem) é dada por:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Desta forma, a tensão normal existente na coluna na iminência de ocorrer a flambagem é:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E r^2}{L^2} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

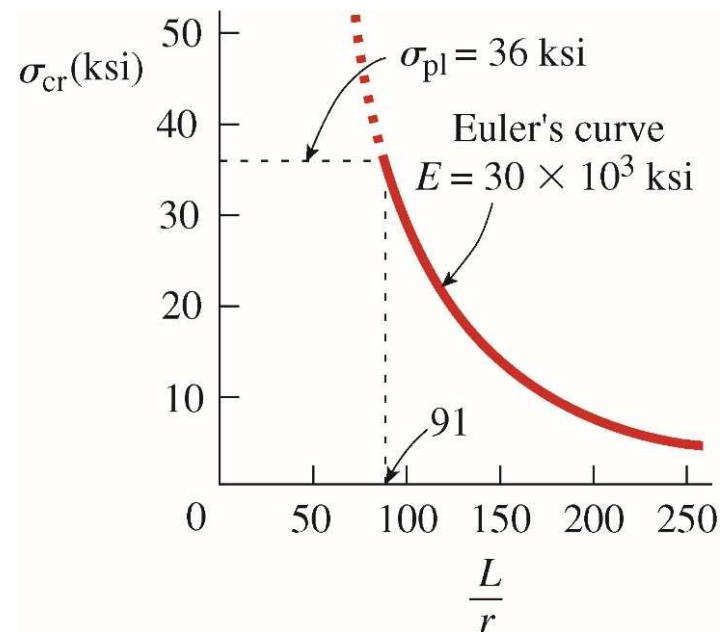
Onde, $\lambda = L/r$ é denominada razão de esbeltez.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Limite de validade das fórmulas:



Obs:

36 ksi = 248 MPa

30.000 ksi = 207 GPa

FIG. 11-10 Graph of Euler's curve (from Eq. 11-16) for structural steel with $E = 30 \times 10^3$ ksi and $\sigma_{pl} = 36$ ksi



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Impondo que:
$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{pl}$$

Encontramos:
$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}}} = \lambda_{lim}$$

No caso do aço A36:
$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}}} = \pi \sqrt{\frac{30000}{36}} \cong 91$$

Assim:

- Para colunas com $\lambda > \lambda_{lim}$: a flambagem, se ocorrer, ocorre no regime elástico linear e vale a fórmula de Euler;
- Para colunas com $\lambda < \lambda_{lim}$: a flambagem, se ocorrer, ocorre no regime elasto-plástico e não vale a fórmula de Euler.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2. Exemplos para outras condições de apoio (11.4)

Vimos que, para barras com extremidades biapoiadas, os modos de flambagem são da forma:

$$v(x) = A_4 \text{sen}(kx)$$

E as cargas críticas são obtidas por meio da equação característica que, nesse caso, é dada por:

$$\text{sen}(kL) = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

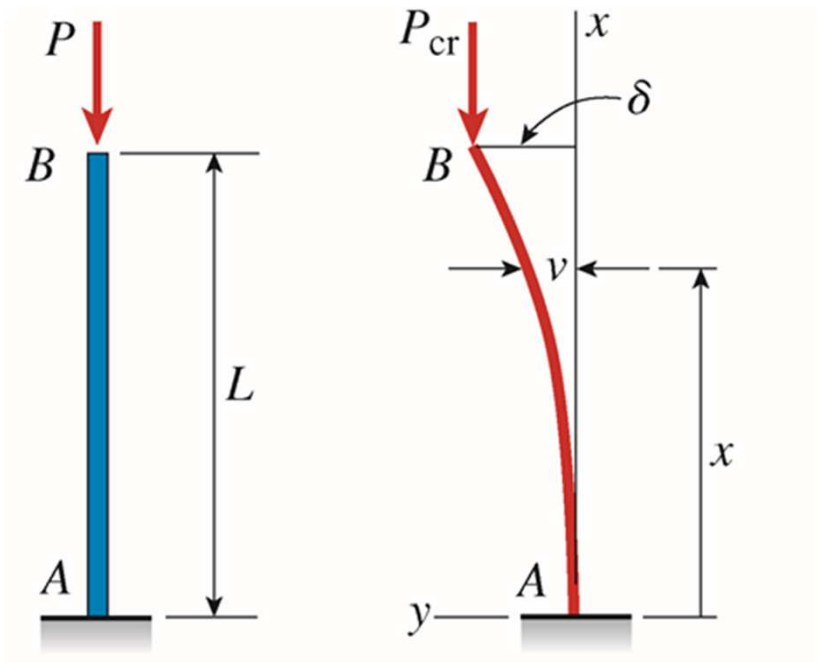
$$k^2 = \frac{P}{EI} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \Leftrightarrow P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad P_{cr,1} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Nesta aula veremos as condições de contorno associadas a vigas-coluna com outras condições de apoio...



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2.1. Viga-Coluna Engastada-Livre



C. Contorno:

$$v(0) = 0$$

$$v'(0) = 0$$

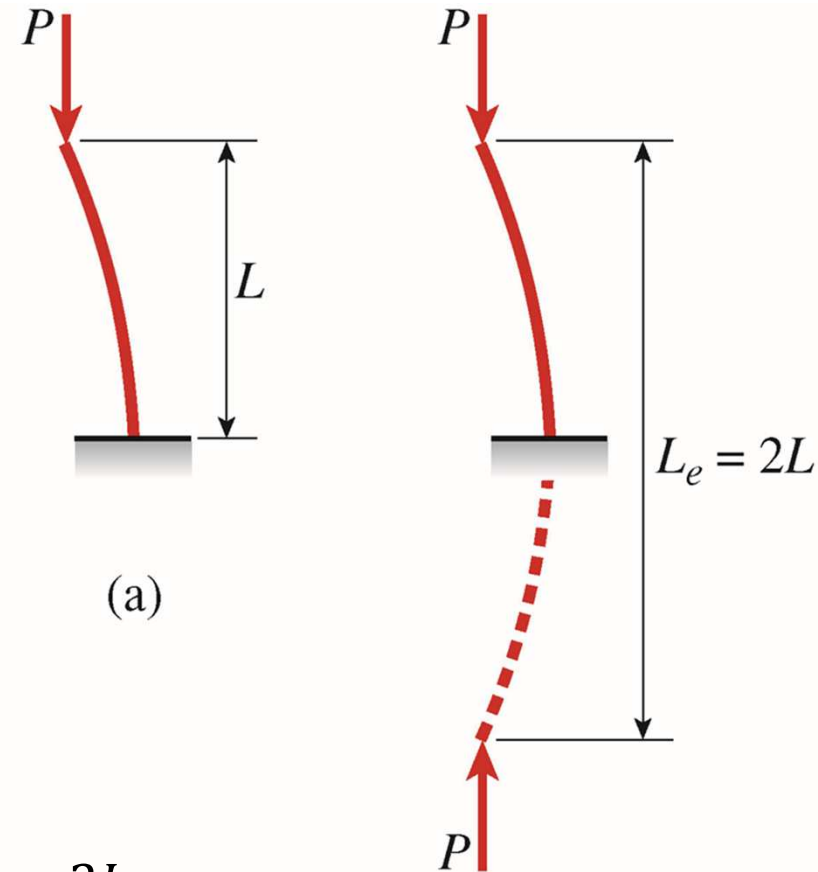
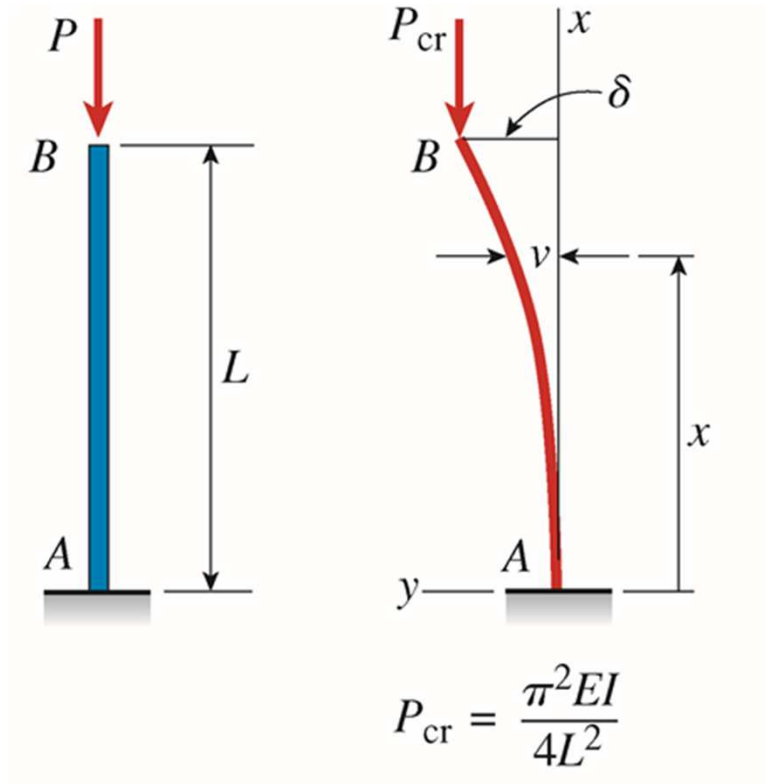
$$v''(L) = 0$$

$$v'''(L) + k^2 v'(L) = 0$$

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} + P \frac{dv(x)}{dx} = EI v'''(x) + P v'(x) = EI (v'''(x) + k^2 v'(x))$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

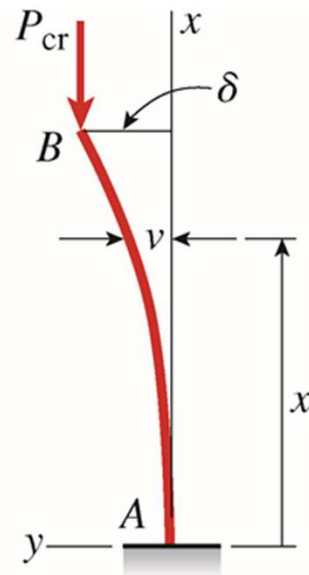


$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \Rightarrow L_e = 2L$$



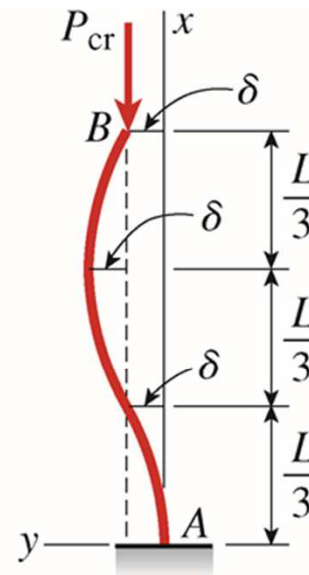
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Embora o conceito de comprimento efetivo seja geralmente aplicado para o 1º modo de flambagem (que fornece a menor carga crítica), podemos utilizar a mesma ideia para outros modos:



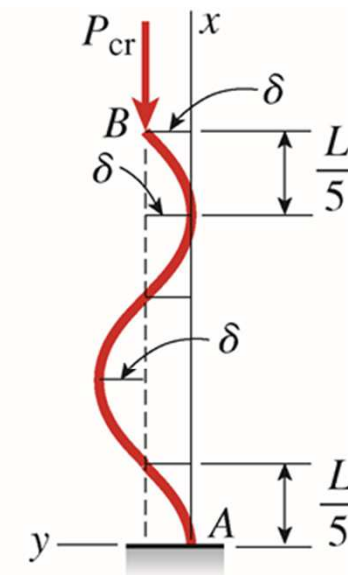
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

$$L_{e1} = 2L$$



$$P_{cr} = \frac{9\pi^2 EI}{4L^2}$$

$$L_{e2} = 2L/3$$

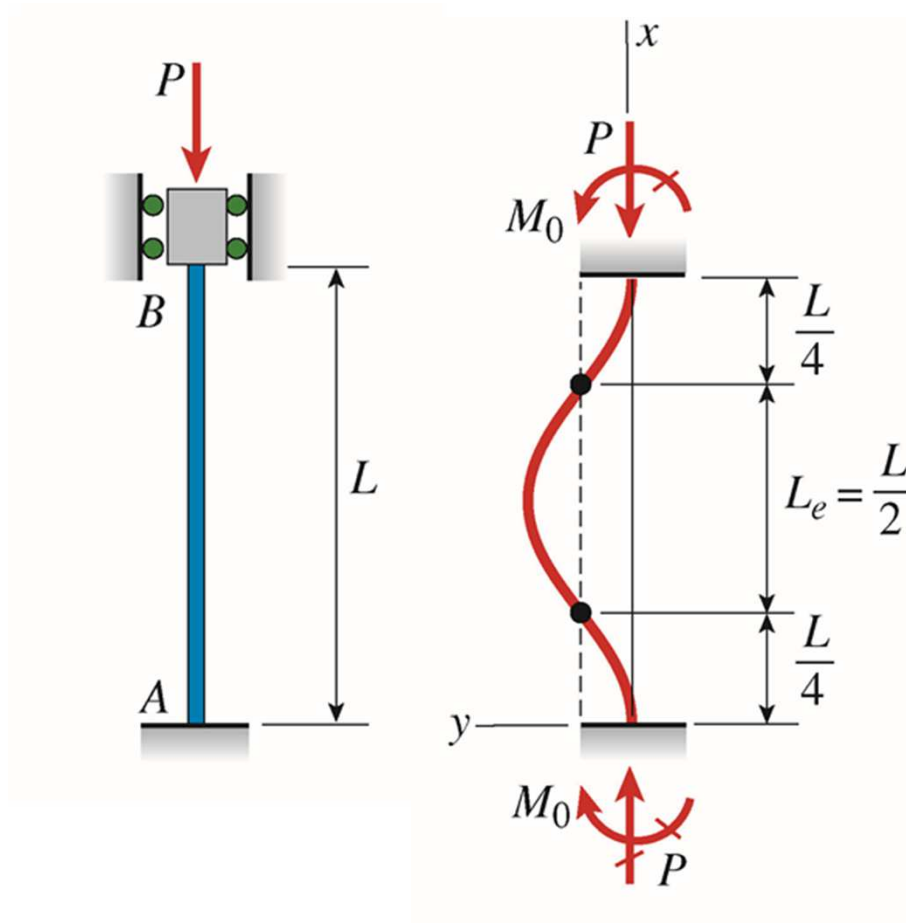


$$P_{cr} = \frac{25\pi^2 EI}{4L^2}$$

$$L_{e3} = 2L/5$$



2.2. Viga-Coluna Bi-Engastada



C. Contorno:

$$v(0) = 0$$

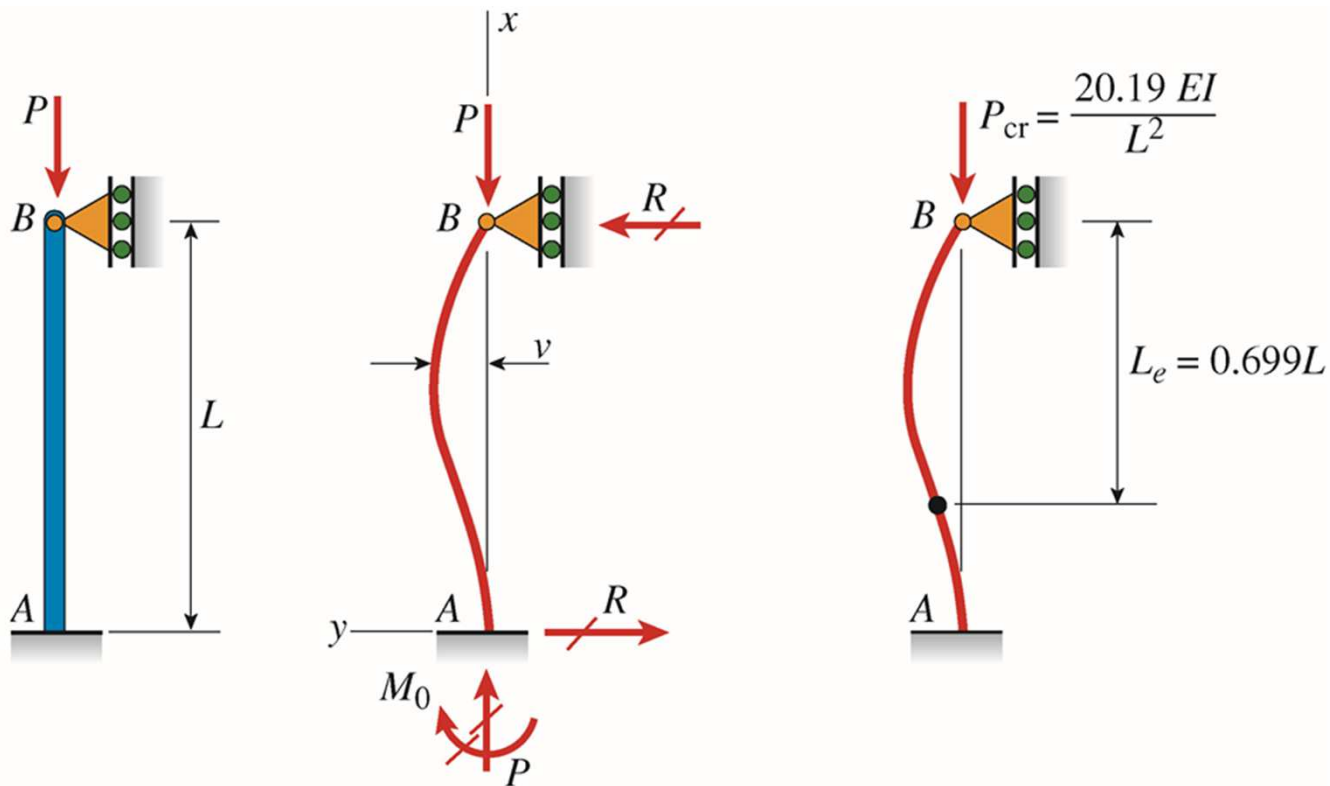
$$v'(0) = 0$$

$$v(L) = 0$$

$$v'(L) = 0$$



2.3. Viga-Coluna Engastada-Apoiada



C. Contorno:

$$v(0) = 0$$

$$v'(0) = 0$$

$$v(L) = 0$$

$$v''(L) = 0$$



3. Comprimento efetivo de flambagem (11.4)

Como vimos dos exemplos anteriores, a fórmula de Euler também pode ser utilizada para outras condições de apoio, desde que seja utilizado o comprimento efetivo de flambagem ao invés do comprimento da viga-coluna propriamente dito. Assim:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

Onde:

L_e = comprimento efetivo = distância entre pontos de curvatura nula.



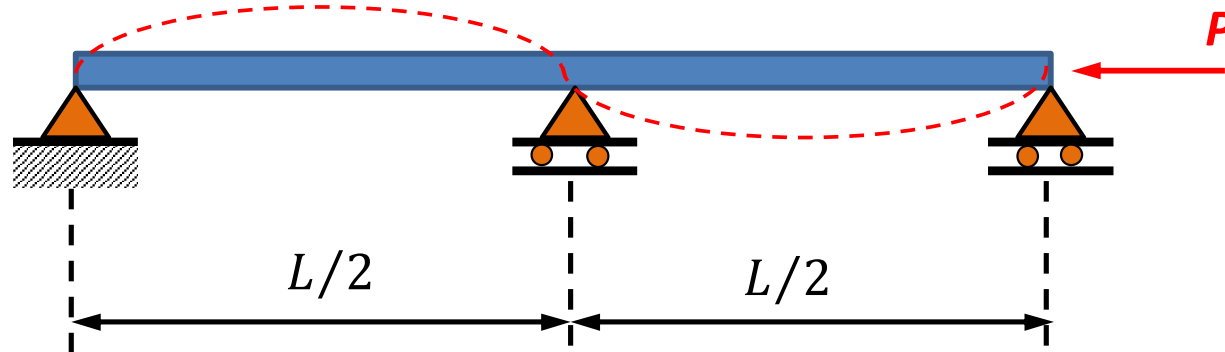
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

(a) Pinned-pinned column	(b) Fixed-free column	(c) Fixed-fixed column	(d) Fixed-pinned column
$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$	$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr} = \frac{2.046 \pi^2 EI}{L^2}$
$L_e = L$	$L_e = 2L$	$L_e = 0.5L$	$L_e = 0.699L$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Qual seria a carga crítica da viga contínua com três apoios, de comprimento total L , indicada abaixo?



Resp.:
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

(corresponde a 2ª carga crítica, e ao 2º modo de flambagem, de uma viga simplesmente apoiada e de comprimento L).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

4. Efeito de excentricidades no carregamento (11.5)

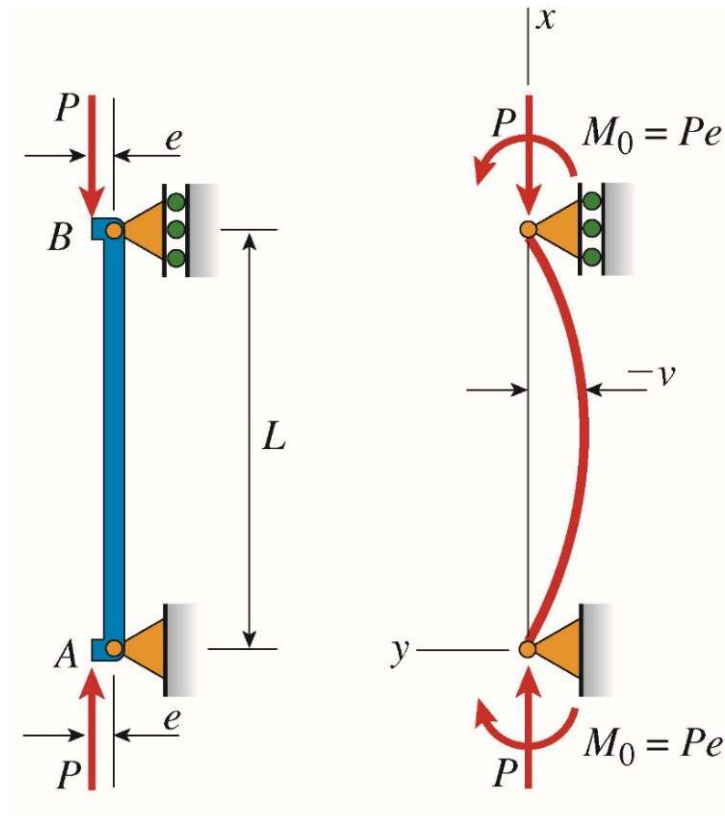
Até o momento analisamos vigas-coluna em condições “ideais” em que a linha de ação do carregamento axial de compressão passa exatamente pelos centroides das seções transversais, de forma que as colunas permanecem retas até que os carregamentos críticos sejam atingidos.

Na prática, esta situação “ideal” não existe, pois sempre existe algum tipo de excentricidade ou de imperfeição da estrutura. Veremos, agora, qual é o efeito de uma possível excentricidade na aplicação da carga axial de compressão no comportamento da estrutura.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução pela Relação Momento Fletor \times Curvatura:



$$M(x) = EIv''(x) = M_0 + P(-v(x))$$

$$EIv''(x) = Pe - Pv(x)$$

$$v''(x) + \frac{P}{EI}v(x) = \frac{Pe}{EI}$$

$$v''(x) + k^2v(x) = k^2e$$

Onde: $k^2 = \frac{P}{EI}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$v''(x) + k^2v(x) = k^2e$$

A solução da E.D.O. acima é dada por: $v(x) = v_h(x) + v_p(x)$

Onde:
$$\left[\begin{array}{l} v_h(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) \\ v_p(x) = e \end{array} \right.$$

Logo:
$$v(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) + e$$

Cond. Contorno:

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow B + e = 0$$

$$v(L) = 0 \Leftrightarrow A\sin(kL) + B\cos(kL) + e = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resultam:

$$B = -e$$

$$A = -e \frac{(1 - \cos(kL))}{\text{sen}(kL)} = -e \frac{\left(1 - \cos^2\left(\frac{kL}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{kL}{2}\right)\right)}{2\text{sen}\left(\frac{kL}{2}\right)\cos\left(\frac{kL}{2}\right)} = -e \cdot \tan\left(\frac{kL}{2}\right)$$

$$v(x) = A\text{sen}(kx) + B\cos(kx) + e$$

$$v(x) = -e \left[\tan\left(\frac{kL}{2}\right)\text{sen}(kx) + \cos(kx) - 1 \right]$$

Assim, para uma coluna com carga axial de compressão (P) e excentricidade (e) conhecidas, podemos determinar a deflexão em qualquer ponto do eixo central.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Deflexão máxima: para o 1º modo de flambagem, a deflexão máxima irá ocorrer a meio vão (em $x = L/2$) e será dada, em valor absoluto, por:

$$\delta = -v(L/2) = e \left[\tan\left(\frac{kL}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{kL}{2}\right) + \cos\left(\frac{kL}{2}\right) - 1 \right]$$

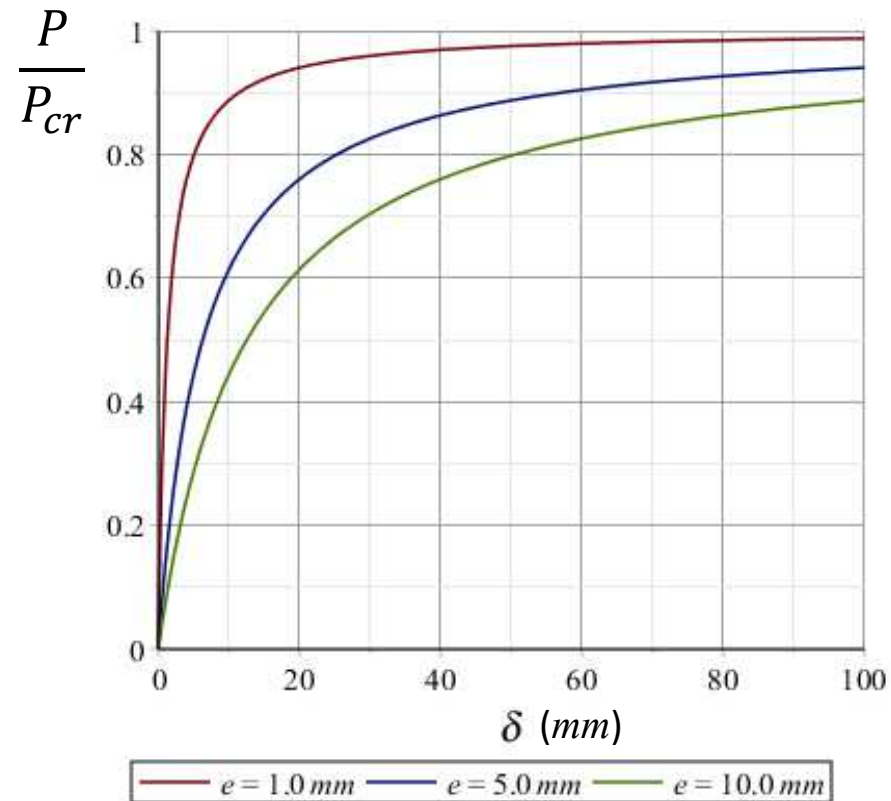
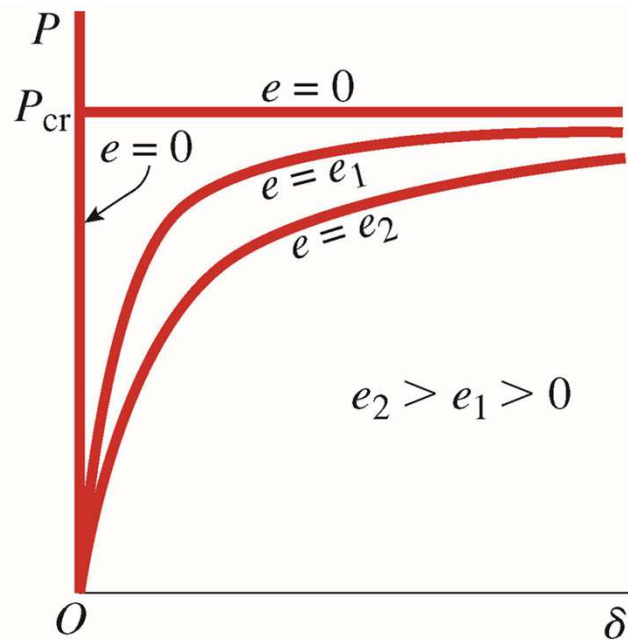
$$\delta = e \left[\sec\left(\frac{kL}{2}\right) - 1 \right]$$

Mas: $k = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \sqrt{\frac{P\pi^2}{P_{cr}L^2}} = \frac{\pi}{L} \sqrt{P/P_{cr}} \Rightarrow kL = \pi \sqrt{P/P_{cr}}$

$$\delta = e \left[\sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{P/P_{cr}}\right) - 1 \right] \Leftrightarrow \frac{P}{P_{cr}} = \left[\frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{e}{e + \delta}\right) \right]^2$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

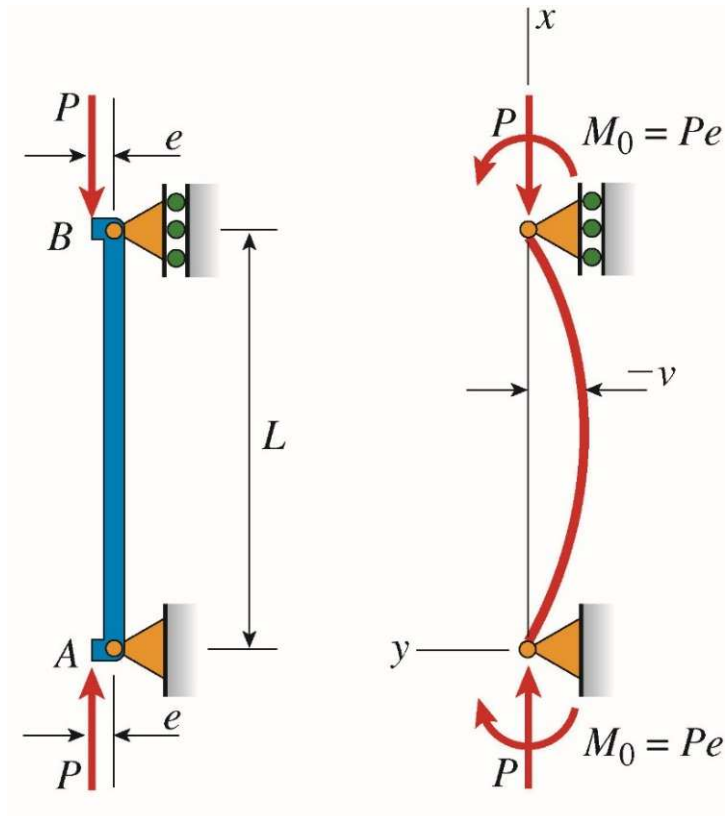


Note que a deflexão máxima aumenta à medida que P aumenta, mas a relação Força \times Deflexão não é linear. Desta forma, não é possível usar o Princípio da Superposição para calcular deflexões causadas por mais de um carregamento.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

O momento fletor máximo atuante na viga-coluna (no caso em tela) será:



$$M_{m\acute{a}x} = P(e + \delta)$$

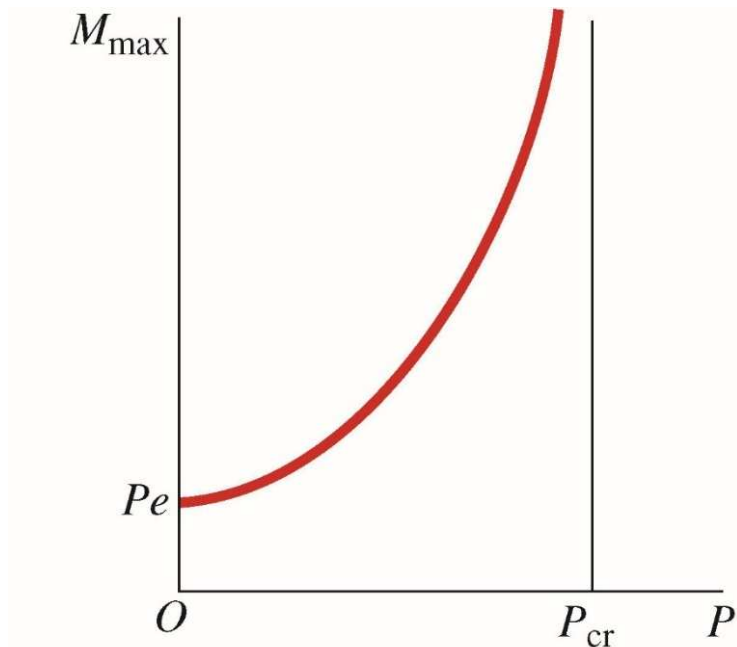
$$M_{m\acute{a}x} = Pe \left[\sec \left(\frac{kL}{2} \right) \right]$$

Como: $\frac{kL}{2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{P/P_{cr}}$

Virá: $M_{m\acute{a}x} = Pe \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right]$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$M_{m\acute{a}x} = Pe \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right]$$

Notas:

1. Para $P/P_{cr} \ll 1$, o momento máximo é praticamente igual a Pe e o efeito das deflexões é desprezível;
2. À medida que P aumenta, o momento fletor máximo aumenta de forma não linear com o aumento de P e, teoricamente, tende a “infinito” quando $P \rightarrow P_{cr}$;
3. Devemos, lembrar, contudo que as equações foram deduzidas para pequenas deflexões (por conta da linearização da curvatura), e começam a apresentar desvios quando $P \rightarrow P_{cr}$, não podendo ser empregadas nestes casos (embora o comportamento geral seja similar).

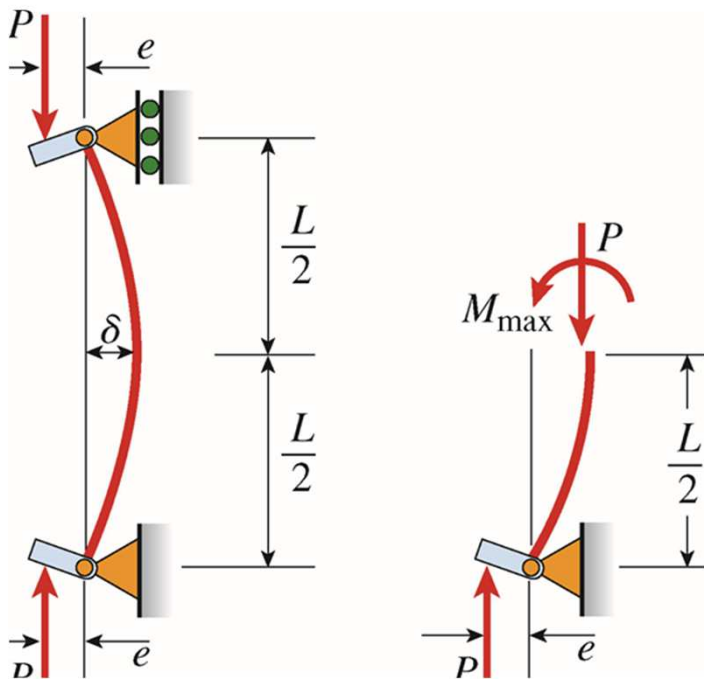


5. Fórmula da Secante (11.6)

A máxima tensão de compressão que atua em uma viga-coluna submetida a uma carga excêntrica é (em valor absoluto):

$$|\sigma_{m\acute{a}x}| = \frac{P}{A} + \frac{M_{m\acute{a}x}}{I} c$$

Onde $M_{m\acute{a}x}$ é o momento fletor máximo atuante na viga-coluna, visto anteriormente e c é a distância do centroide até a fibra mais distante situada do lado côncavo.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$M_{m\acute{a}x} = P \cdot e \cdot \sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{P/P_{cr}}\right)$$

Mas:
$$\frac{P}{P_{cr}} = \frac{PL^2}{\pi^2 EI} = \frac{PL^2}{\pi^2 E(Ar^2)} = \frac{1}{\pi^2} \frac{P}{EA} \left(\frac{L}{r}\right)^2 = \frac{1}{\pi^2} \frac{P}{EA} (\lambda)^2$$

Logo:
$$M_{m\acute{a}x} = P \cdot e \cdot \sec\left(\frac{\lambda}{2} \sqrt{P/EA}\right)$$

Assim:
$$|\sigma_{m\acute{a}x}| = \frac{P}{A} + \frac{M_{m\acute{a}x}}{I} c = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I} \sec\left(\frac{\lambda}{2} \sqrt{P/EA}\right)$$

$$|\sigma_{m\acute{a}x}| = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{Ar^2} \sec\left(\frac{\lambda}{2} \sqrt{P/EA}\right) = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{\lambda}{2} \sqrt{P/EA}\right) \right]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

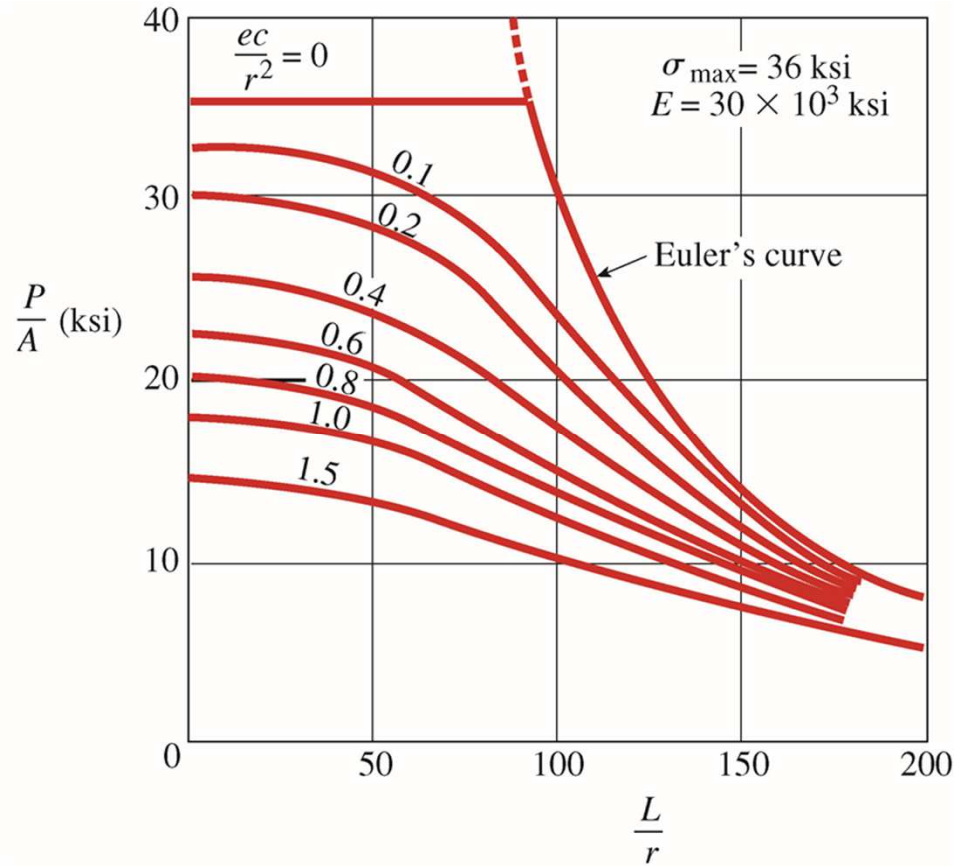
$$|\sigma_{m\acute{a}x}| = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{\lambda}{2} \sqrt{P/EA} \right) \right]$$

A fórmula da secante, dada acima, fornece a máxima tensão de compressão na coluna como função da tensão de compressão média (P/A), do módulo de Young do material, e de dois adimensionais:

- A razão de esbeltez da coluna: $\lambda = L/r$
- A razão de excentricidade do carregamento: ec/r^2 .



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$|\sigma_{\max}| = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{\lambda}{2} \sqrt{P/EA} \right) \right]$$

FIG. 11-27 Graph of the secant formula (Eq. 11-59) for $\sigma_{\max} = 36$ ksi and $E = 30 \times 10^3$ ksi



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap. 11 (seção 11.3)
- [2] Timoshenko, S.P., Gere, J.M. Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, 1961, 541p.