



VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

Disciplina: Cálculo I LOB1003

Profa. responsável: Diovana A. S. Napoleão

Departamento de Ciências Básicas e Ambientais – EEL/USP

IMPORTÂNCIA DO TÓPICO

O Cálculo Diferencial possui um papel importante em problemas de otimização, determinando como encontrar valores máximo ou mínimo de uma função.

Exemplos de problema de otimização incluem:

- Como produzir uma lata que minimiza o custo de manufatura?
- Qual a aceleração máxima de um ônibus espacial?
- Qual o raio de uma traqueia contraída que expelle mais rapidamente o ar durante a tosse?

OBJETIVOS DO CÁLCULO DIFERENCIAL EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

1. Utilizar a derivada para encontrar valores de x em que $f'(x)=0$ ou $f'(x)$ não existe. Esses pontos são candidatos a **máximos, mínimos ou pontos de inflexão**.
2. Aplicar testes baseados no sinal de $f'(x)$ (Primeiro Teste da Derivada) ou no sinal de $f''(x)$ (Segundo Teste da Derivada) para: identificar máximos locais, mínimos locais ou determinar comportamento de concavidade.
3. Utilizar derivadas para: minimizar custos, maximizar lucros, otimizar volume, área, energia ou tempo, determinar taxas de rendimento, ajustar parâmetros de modelos físicos, químicos ou econômicos.

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

Def.: Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I , então f é côncava para cima em I . Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I , então f é denominada de côncava para baixo em I , conforme Figura 1.

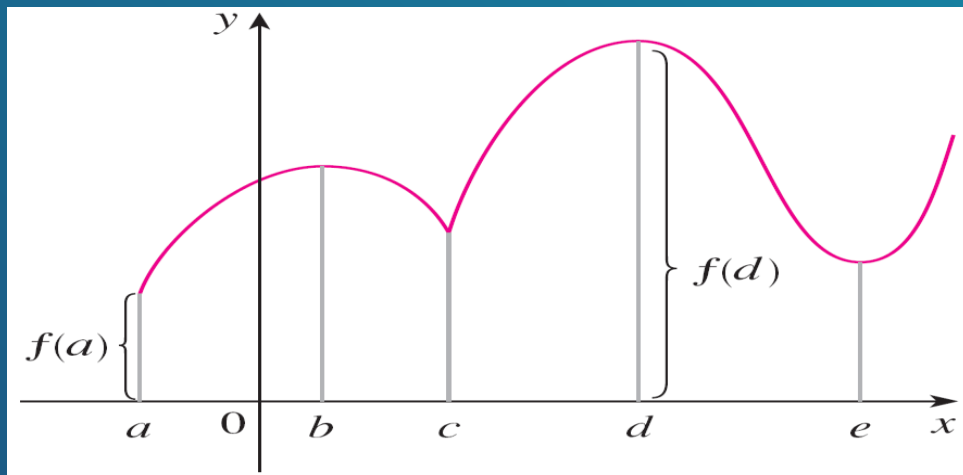


Figura 1- Mínimos absolutos $f(a)$, máximos absolutos $f(d)$, mínimos locais $f(c)$, $f(e)$, máximos locais $f(b)$, $f(d)$

TESTE DA CONCAVIDADE

1- Se $f''(x) > 0$ para todo x em I , então o gráfico de f é côncavo para cima em I .

2- Se $f''(x) < 0$ para todo x em I , então o gráfico de f é côncavo para baixo em I .

PONTO DE INFLEXÃO

Um ponto P na curva $y = f(x)$ é denominado de ponto de inflexão se f é contínua no ponto e a curva mudar de **côncava para cima** para **côncava para baixo** ou vice-versa, conforme Figura 2:

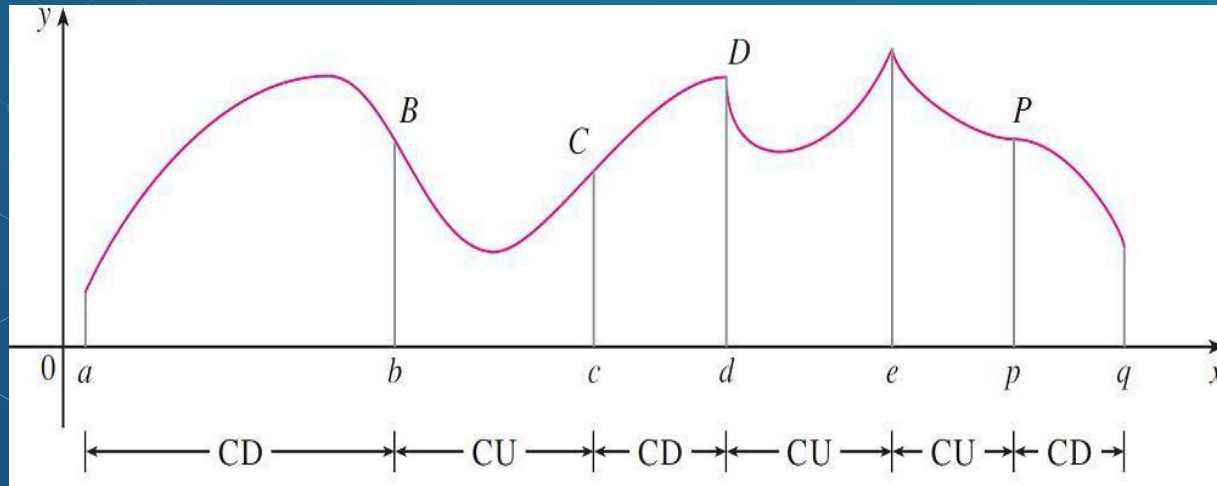


Figura 2- Gráfico com pontos de inflexão

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

Seja C um número no domínio D de uma função f . Então $f(c)$ é o valor máximo absoluto de f em D se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em D . O valor mínimo absoluto de f em D se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em D .

1 Definição Seja c um número no domínio D de uma função f . Então $f(c)$ é o

- valor máximo absoluto de f em D se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em D .
- valor mínimo absoluto de f em D se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em D .

TEOREMA DO VALOR EXTREMO - TVE

3 O Teorema do Valor Extremo Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a, b]$.

O TEOREMA DO VALOR EXTREMO ESTÁ ILUSTRADO NAS SEGUINTE FIGURAS:

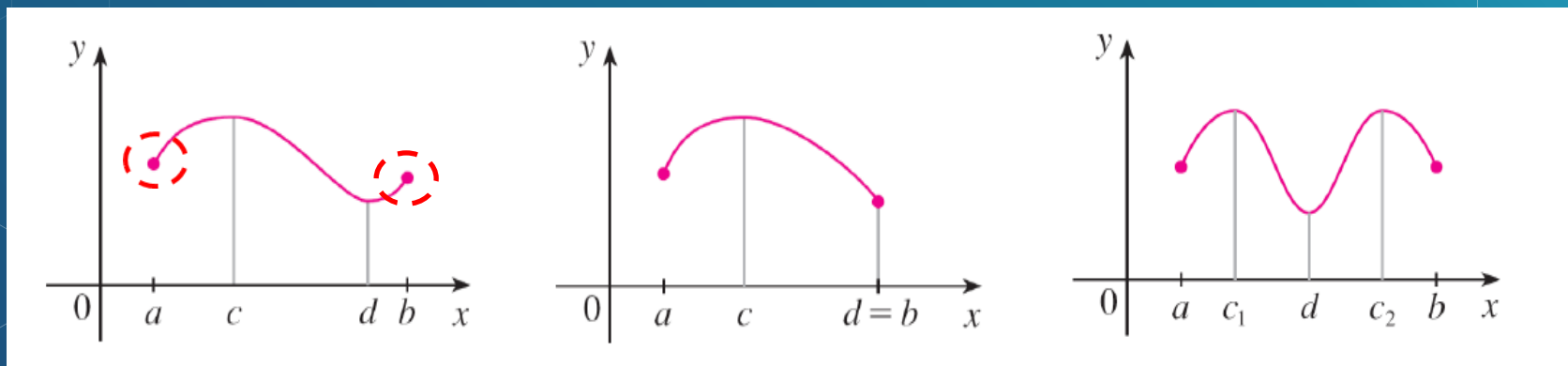


Figura 3- Gráficos referentes ao TVE

TEOREMA DO VALOR EXTREMO - TVE

As Figuras 4 e 5, mostram que uma função pode não possuir valores extremos, sendo omitida uma das duas hipóteses (continuidade ou intervalo fechado) do Teorema do Valor Extremo.

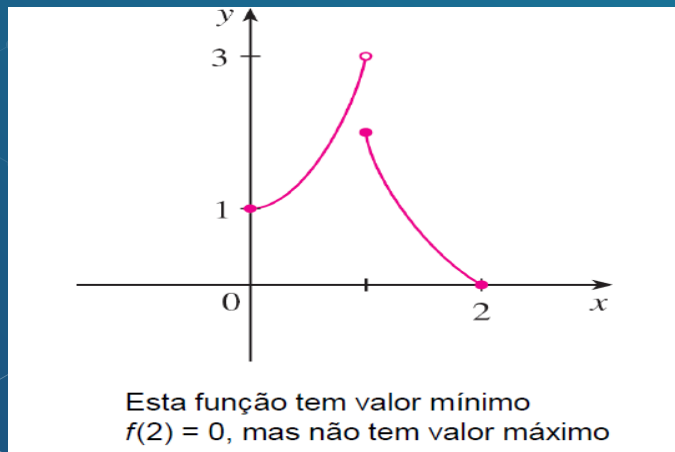


Figura 4 – Condição de existência do TVE

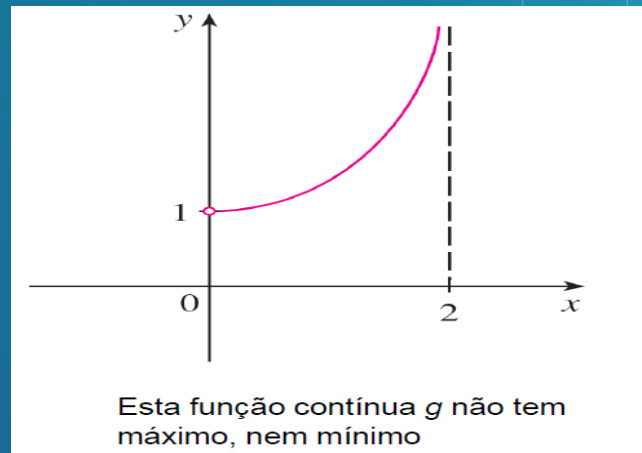


Figura 5 – Condição de existência do TVE

TEOREMA DO VALOR EXTREMO - TVE

A função g da Figura 6 é contínua no intervalo aberto $(0, 2)$, mas não tem valor máximo e nem mínimo. A imagem é $(1, \infty)$. Essa função assume valores arbitrariamente grandes. Isso não contradiz o TVE, pois o intervalo $(0, 2)$ não é fechado.

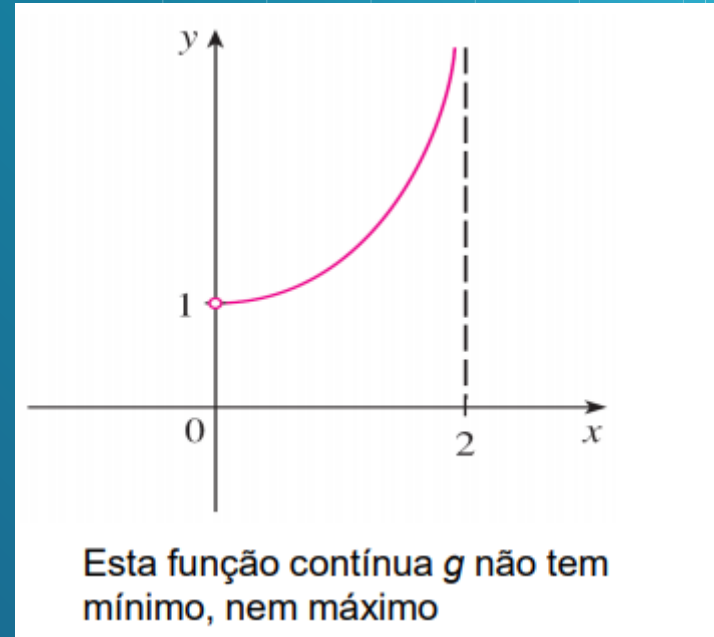
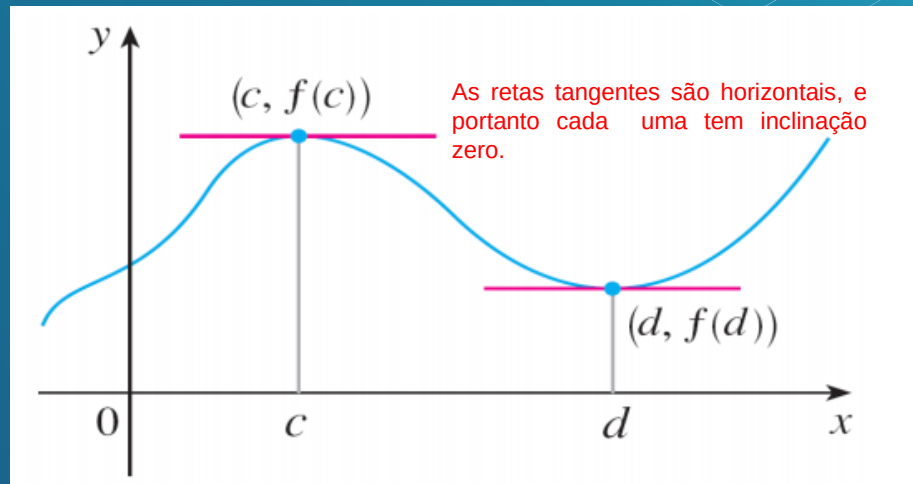


Figura 6

TEOREMA DO VALOR EXTREMO - TVE

O Teorema do Valor Extremo afirma que uma **função contínua em um intervalo fechado tem um valor máximo e um mínimo**; contudo, não diz como encontrar esses valores extremos. Vamos começar procurando os valores extremos locais.

A Figura 7 mostra o gráfico de uma função f com máximo local em c e mínimo local em d .



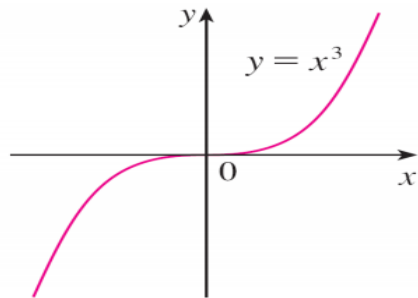
TEOREMA DE FERMAT

Nos pontos de máximo e mínimo as **retas tangentes são horizontais** e, portanto, cada uma tem **inclinação igual a zero**. Como a derivada é a inclinação da reta tangente; então $f'(c) = 0$ e $f'(d) = 0$. O teorema a seguir, afirma que esta condição é verdadeira para as funções diferenciáveis.

4 Teorema de Fermat Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

EXEMPLOS SOBRE O TEOREMA DE FERMAT

Se $f(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2$, logo $f'(0) = 0$. Porém f não tem máximo nem mínimo em 0, como podemos ver em seu gráfico na Figura 8 .



Se $f(x) = x^3$, então $f'(0) = 0$ mas f não tem mínimo ou máximo

Figura 8

EXEMPLOS SOBRE O TEOREMA DE FERMAT

Considera-se a função $f(x) = |x|$ em seu valor mínimo (local e absoluto) em 0, mas o valor não pode ser encontrado por considerar $f'(x) = 0$, pois $f'(x)$ não existe, conforme a Figura 9.

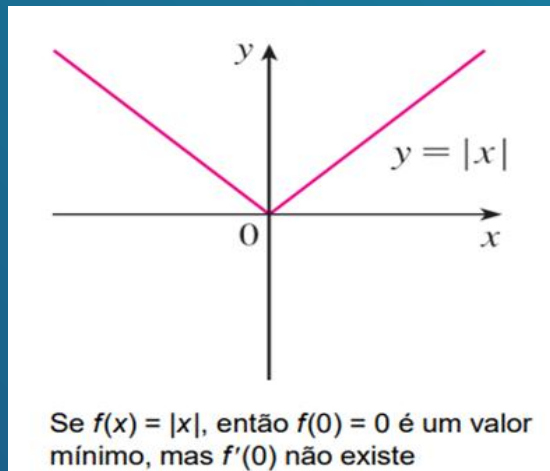


Figura 9

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

O Teorema de Fermat sugere que devemos pelo menos *começar* procurando por valores extremos de f nos números c onde $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe. Esses números têm um nome especial.

6 Definição Um **número crítico** de uma função f é um número c no domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existem.

Em termos de números críticos, o Teorema de Fermat pode ser reescrito como a seguir.

7 Se f tiver um máximo ou mínimo local em c , então c é um número crítico de f .

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO – INTERVALO FECHADO

Para encontrarmos um máximo ou um mínimo absoluto de uma função contínua em um intervalo fechado, observamos que ele é local ou acontece em uma extremidade do intervalo. Assim, o seguinte procedimento de três etapas poderá ser seguido.

O Método do Intervalo Fechado Para encontrar os valores máximo e mínimo *absolutos* de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b) .
2. Encontre os valores de f nas extremidades do intervalo.
3. O maior valor entre as etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.



TEOREMA DE ROLLE

Muitos resultados deste tópico dependem de um fato central, denominado **Teorema do Valor Médio**. Porém, para chegar ao Teorema do Valor Médio será preciso abordar o Teorema de Rolle.

Teorema de Rolle Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
2. f é derivável no intervalo aberto (a, b) .
3. $f(a) = f(b)$

Então, existe um número c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

TEOREMA DE ROLLE

Exemplos de funções que satisfazem o Teorema de Rolle. Em cada caso, parece que há pelo menos um ponto $(c, f(c))$ onde a tangente é horizontal, e, portanto, $f'(c) = 0$. Neste caso o Teorema de Rolle é válido.

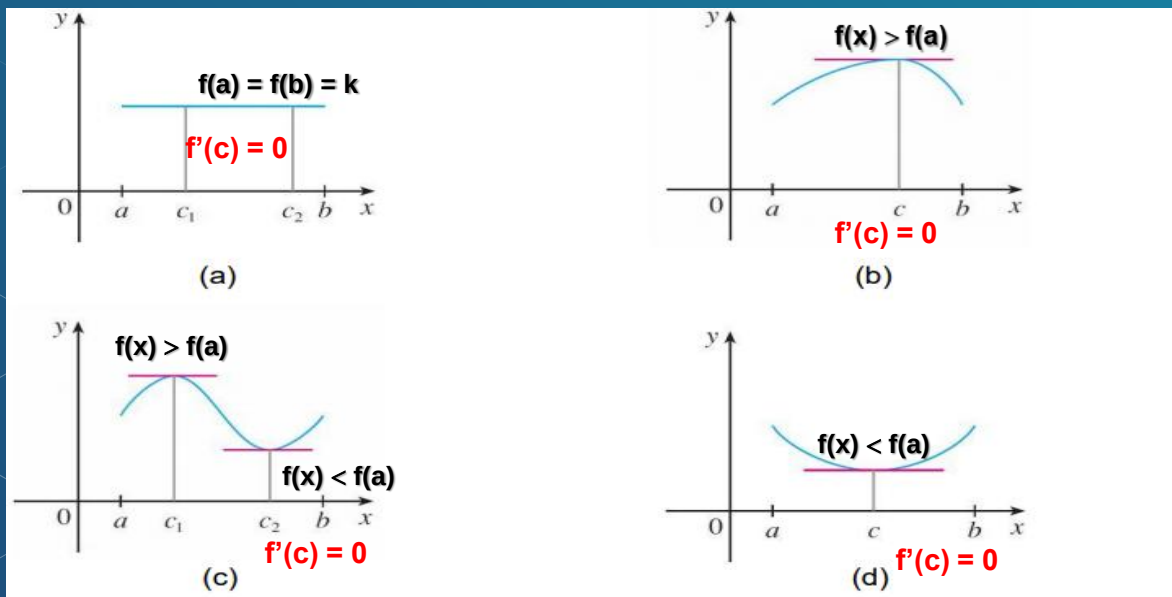


Figura 10 - Gráfico de funções que atestam a possibilidade do Teorema de Rolle

TEOREMA DO VALOR MÉDIO

O Teorema do Valor Médio Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
2. f é derivável no intervalo aberto (a, b) .

Então, existe um número c em (a, b) tal que

$$\boxed{1} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou, de maneira equivalente,

$$\boxed{2} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Interpretação Geométrica

Existe um ponto no interior do intervalo que a inclinação da reta tangente ao gráfico desse ponto é igual à inclinação da reta secante.

CONSEQUÊNCIAS DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO

- 1- Suponha que $f' > 0$ para todo x em um intervalo I .
Então a função f é crescente neste intervalo.
- 2- Suponha que $f' < 0$ para todo x em um intervalo I .
Então a função f é decrescente neste intervalo.
- 3- Suponha que $f' = 0$ para todo x em um intervalo I .
Então a função f é constante neste intervalo.
- 4- Suponha que 2 funções satisfazem $f'(x) = g'(x)$ para todo x .
Então $g(x) = f(x) + k$, onde $k \in \mathbb{R}$.

TEOREMA DO VALOR MÉDIO

O teorema de valor médio pode ser interpretado geometricamente. As Figuras 11 e 12 mostram os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ sobre os gráficos de duas funções diferenciáveis.

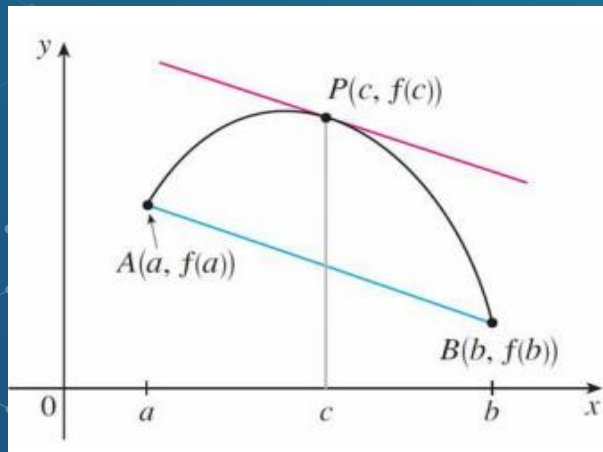


Figura 11

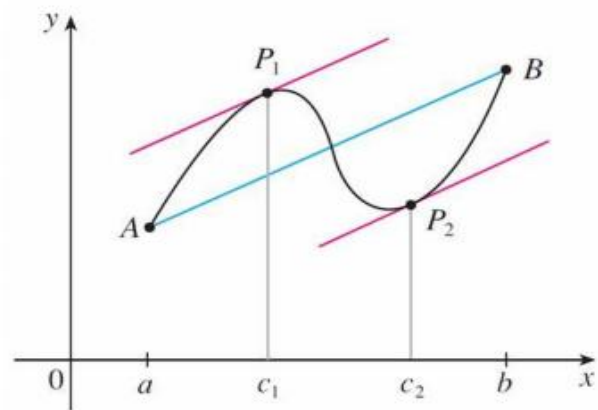


Figura 12

DIFERENÇA PRINCIPAL ENTRE O TEOREMA DE ROLLE E O TEOREMA DO VALOR MÉDIO (TVM)

Teorema de Rolle

Se f é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = 0.$$

👉 A inclinação da tangente é zero.

Teorema do Valor Médio (TVM)

Se f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

👉 A derivada em algum ponto é igual à inclinação da secante.

DIFERENÇA PRINCIPAL ENTRE O TEOREMA DE ROLLE E O TEOREMA DO VALOR MÉDIO (TVM)

2. Diferença fundamental

★ Rolle é um caso especial do Teorema do Valor Médio.

- No TVM, a derivada iguala a inclinação da reta secante.
- No Teorema de Rolle, como $f(a) = f(b)$, essa inclinação é zero, então o TVM se reduz ao resultado:

$$f'(c) = 0.$$

Portanto:

O Teorema de Rolle é um caso particular do Teorema do Valor Médio quando os valores da função nos extremos do intervalo são iguais.

COMO AS DERIVADAS AFETAM A FORMA DE UM GRÁFICO

O que a primeira derivada (f') nos traz de informação sobre a função f ?

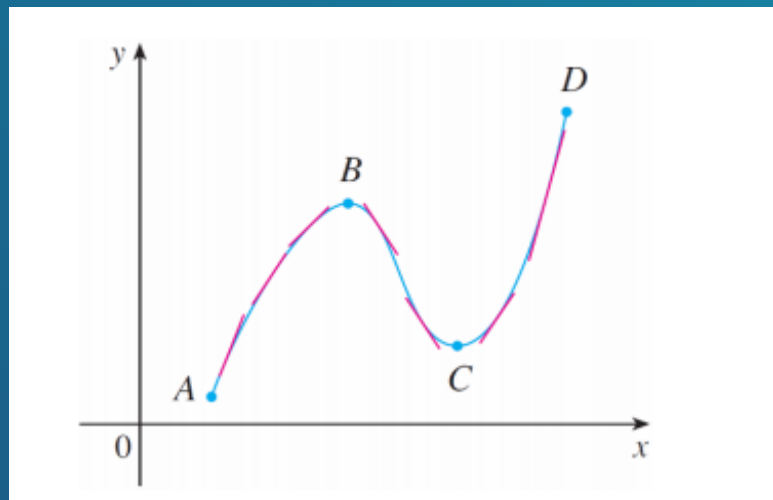


Figura 13 – Gráfico de uma respectiva função

Entre A e B e entre C e D , as retas tangentes têm inclinação positiva e, portanto, $f'(x) > 0$.

COMO AS DERIVADAS AFETAM A FORMA DE UM GRÁFICO

Entre B e C, as retas tangentes têm inclinação negativa e, portanto, $f'(x) < 0$. De acordo com o gráfico f cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa. Para demonstrar que isso é válido, será considerado o Teorema do Valor Médio.

Teste Crescente/Decrescente

- (a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo, então f é crescente nele.
- (b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo, então f é decrescente nele.

COMO AS DERIVADAS AFETAM A FORMA DE UM GRÁFICO

Teste da Primeira Derivada Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f .

- (a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c , então f tem um máximo local em c .
- (b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c , então f tem um mínimo local em c .
- (c) Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se em ambos os lados de c f' for positivo ou negativo), então f não tem máximo ou mínimo locais em c .

COMO AS DERIVADAS AFETAM A FORMA DE UM GRÁFICO

O teste da primeira derivada, na parte a, por exemplo, uma vez que o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em c , f é crescente à esquerda de c decrescente à direita de c . A consequência é que f tem um máximo local em c .

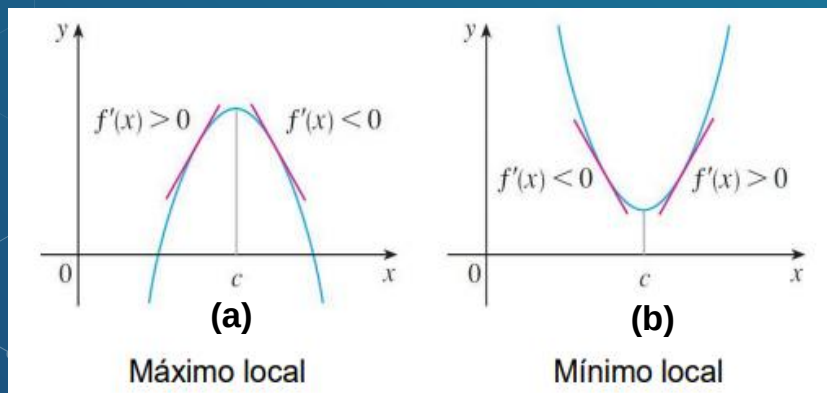


Figura 14 – Gráfico de uma respectiva função com valor de máximo e mínimo local

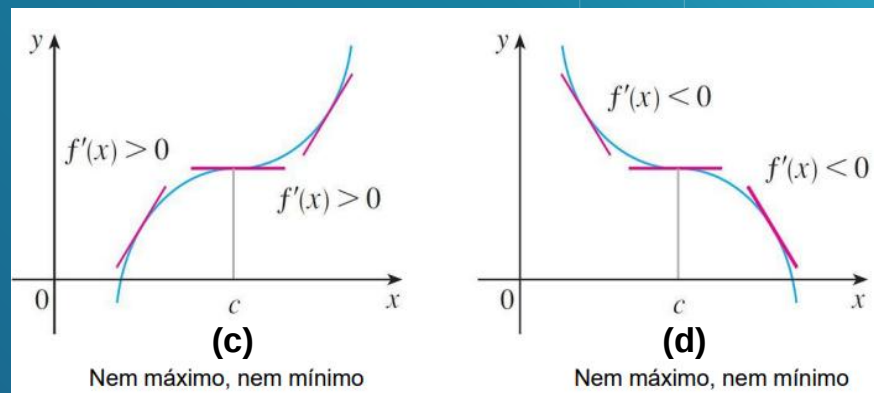


Figura 15 – Gráfico de uma respectiva função sem valor de máximo e mínimo local

COMO AS DERIVADAS AFETAM A FORMA DE UM GRÁFICO

O que a segunda derivada (f'') nos traz de informação sobre a função f ?

Na Figura 16, as retas tangentes a essas curvas foram traçadas em vários pontos. Na parte (a), a curva está acima das retas tangentes e f é denominada de côncava para cima em (a, b). Em (b), a curva está abaixo das retas tangentes g sendo denominada de côncava para baixo em (a, b).

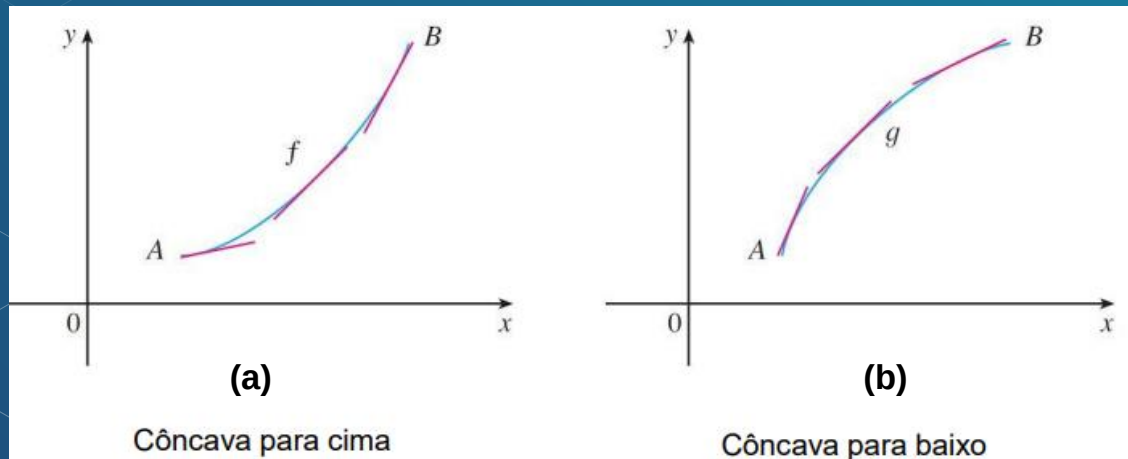


Figura 16 – Gráfico de uma respectiva função

COMO AS DERIVADAS AFETAM A FORMA DE UM GRÁFICO

Definição Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo I , então f é chamada **côncava para cima** em I . Se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes em I , então f é chamada **côncava para baixo** em I .

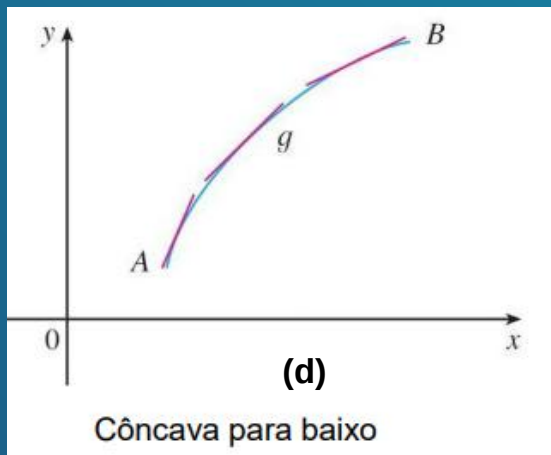
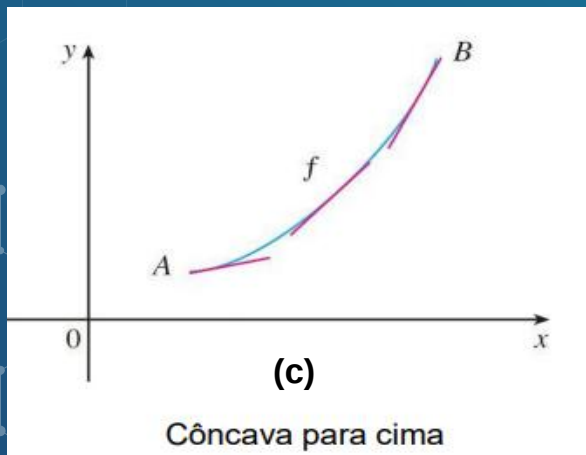


Figura 17 – Gráfico de uma respectiva função

COMO AS DERIVADAS AFETAM A FORMA DE UM GRÁFICO

Teste da Concavidade

- (a) Se $f''(x) > 0$ para todo x em I , então o gráfico de f é côncavo para cima em I .
- (b) Se $f''(x) < 0$ para todo x em I , então o gráfico de f é côncavo para baixo em I .

Obs.: Este teste já foi abordado no slide 2, está sendo apresentado como parte complementar ao tópico.



PARTE COMPLEMENTAR DA MATÉRIA

VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

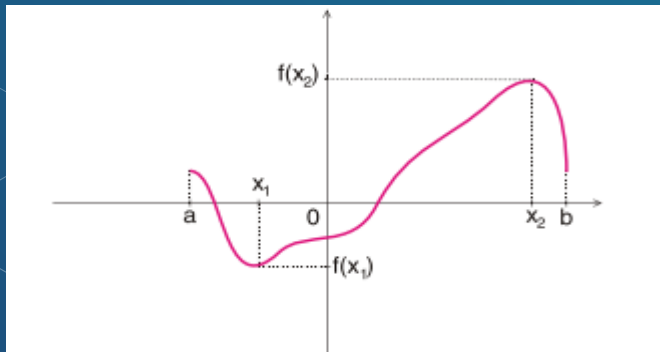
TEOREMA DE WEIERSTRASS

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, existem $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Este teorema nos diz que toda função contínua f , definida em um intervalo fechado e limitado $[a, b]$, assume pelo menos um valor mínimo ($f(x_1)$) e pelo menos um valor máximo ($f(x_2)$), como ilustramos na Figura 18.



Assim, o conjunto $f([a, b]) = \{f(x); x \in [a, b]\}$, imagem de $[a, b]$ por f , está contido no intervalo $[m, M]$, onde $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ pertencem a $f([a, b])$.

Figura 18– Gráfico de uma respectiva função

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Exemplo em que o Teorema Weierstrass não é aplicado.

Consideremos a função contínua $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \in (0, 1]$, cujo gráfico esboçamos na Figura 7.2.

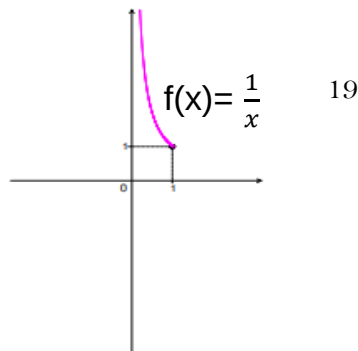


Figura 19– Gráfico de uma respectiva função

Como $f((0, 1]) = [1, +\infty)$, não existe $x_2 \in (0, 1]$ tal que $f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in (0, 1]$. Notemos que, apesar de $(0, 1]$ ser limitado, ele não é fechado.

