



Escola de Engenharia de Lorena
Universidade de São Paulo

FÓRMULA DE TAYLOR

Disciplina: Cálculo I LOB1003

Profa. responsável: Diovana A. S. Napoleão

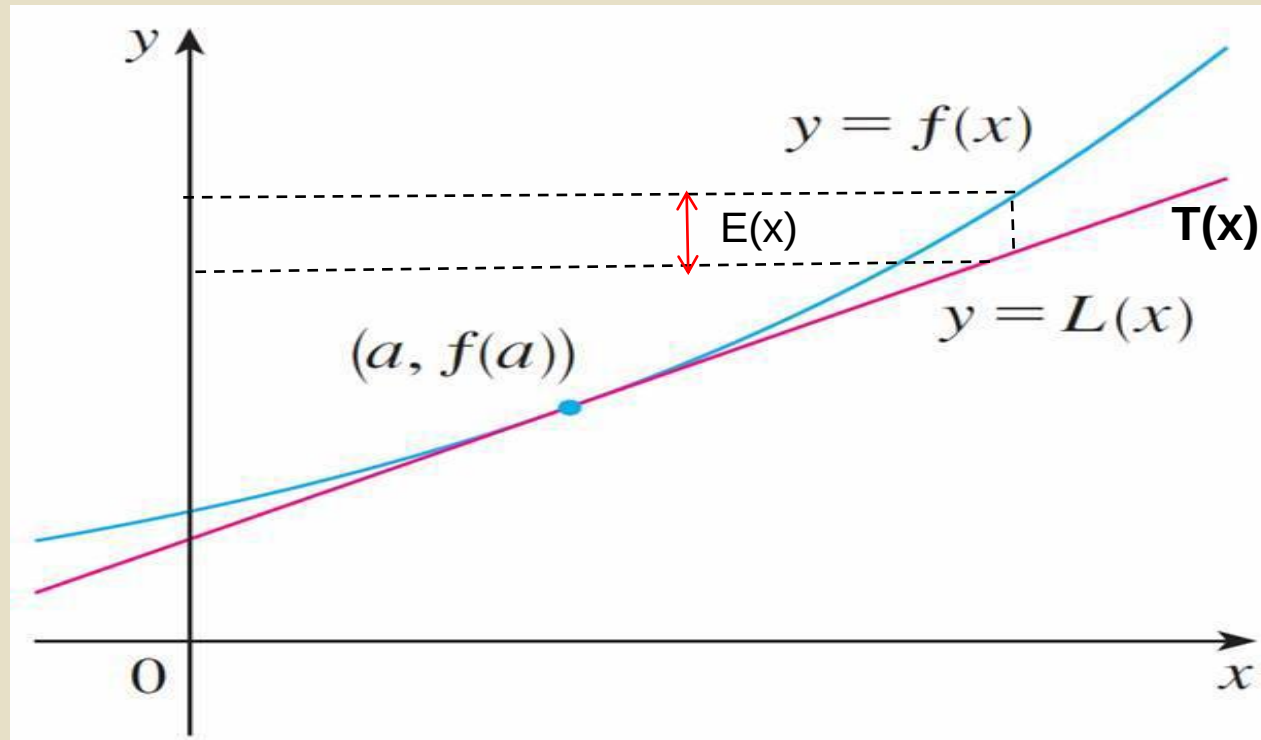
Departamento de Ciências Básicas e Ambientais – EEL/USP

OBJETIVO DA ABORDAGEM DA AULA

1. Determinar polinômios de Taylor de diferentes ordens para funções elementares;
2. Reconhecer o conceito de série de Taylor, como uma forma de representar funções por meio de polinômios derivados;
3. Aplicar a série de Taylor para aproximar valores de funções em torno de um ponto e estimar o erro associado à aproximação;
4. Analisar o comportamento local de uma função a partir das suas derivadas, interpretando o significado geométrico da expansão de Taylor;
5. Resolver problemas de Física e Engenharia que utilizam aproximações de Taylor em modelagem, análises de pequena perturbação e cálculos numéricos;
6. Comparar aproximações de diferentes ordens e avaliar sua precisão e limites de validade;
7. Utilizar a expansão de Maclaurin como caso particular da série de Taylor para simplificar cálculos e desenvolver intuição matemática.

Usaremos a reta tangente em $(x_0, f(x_0))$ como uma aproximação para a curva $y = f(x)$ quando x estiver próximo de x_0 . A equação para a reta tangente é :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Para cada $x \in D$, seja $E(x)$ o erro que se comete na aproximação de $f(x)$ por $T(x)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$E(x) = f(x) - T(x)$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T(x)} + E(x), x \in D_f$$

Então o $\lim_{x \rightarrow x_0} E(x) = 0$

$$T(x_0) = f(x_0)$$

$$\frac{E(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), x \neq x_0$$

Neste estudo torna-se importante analisar a seguinte condição:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0$$

Segue que, se f for derivável em x_0 ,

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

é a função afim que melhor aproxima localmente a f em volta de x_0

O polinômio

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

denomina-se *polinômio de Taylor* de **ordem 1** de f em volta de x_0

Dentro deste contexto a ideia se expande para o polinômio de Taylor de **ordem 2**, através do teorema 1:

Teorema 1: Seja f derivável até a **2ª ordem** no intervalo I e sejam $x, x_0 \in I$. Então existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x, x_0 tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2 + E(x)$$

Teorema 2: Seja f derivável até a **3ª ordem** no intervalo I e sejam $x, x_0 \in I$. Então existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x, x_0 tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x - x_0)^3 + E(x)$$

Polinômio de Taylor de Ordem n

Se f for derivável até a ordem n no intervalo I e $x_0 \in I$. O seguinte polinômio,

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x - x_0)^n$$

denomina-se *polinômio de Taylor, de ordem n , de f em volta x_0* .

Obs.: O polinômio de Taylor, de ordem n , de f em volta de $x_0 = 0$ denomina-se polinômio de Mac-Laurin, de ordem n , de f .

Estimativa do erro com o resto de Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

para algum ξ entre 0 e x .